6.7.2 Võrgumeetod ehk lõplike vahede meetod

Võrgumeetod ehk lõplike vahede meetod on üks diferentsiaalvõrrandite numbrilise (arvulise) lahendamise meetoditest.

Meetodi idee: tuletised leitakse nn. lõplike vahede abil.

- Vaatleme ühe muutuja funktsiooni $f(x)$ (vt. joonis 14.1 a) Metsaveer[6] või joonist loengus)
- Jagame x telje osadeks võrdse sammuga $\Delta \equiv \Delta_x$ — saame 1D võrgu, mille $i-$ndas punktis $x = x_i$ ja $f(x_i) = f_i$.
- Tuletised punktis x_i leitakse valemite abil, mis põhinevad tuletise definitsioonil:

$$f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}, \qquad f''(x) = \left[f'(x)\right]', \ldots \tag{6.62}$$

[6] J. Metsaveer, Plaatide arvutus ja tasandülesanne, Tallinn, 1987

$$\begin{aligned}
f_i' &= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta}, \\
f_i'' &= \frac{f_{i+1}' - f_{i-1}'}{2\Delta} = \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta^2} = \\
&= \frac{f_{i+1/2}' - f_{i-1/2}'}{\Delta} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta^2}, \\
f_i''' &= \frac{f_{i+1}'' - f_{i-1}''}{2\Delta} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta^3}, \\
f_i^{IV} = f_i'''' &= \frac{f_{i+1}''' - f_{i-1}'''}{2\Delta} = \frac{f_{i+1}'' - 2f_i'' + f_{i-1}''}{\Delta^2} = \\
&= \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta^4}.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

- Tihti esitatakse need ja nendega sarnased valemid nn. graafiliste operaatorite abil (vt. joonis loengus või joonis 14.1b Metsaveer), mis esitavad võrgu sõlmedes leitud funktsiooni väärtuste $f_{i-2}, f_{i-1}, \ldots$ kordajaid.
- Olles näiteks tähistanud $i-$ndale tuletisele vastava graafilise operaatori T_i, saame funktsiooni f tuletiste leidmiseks valemid

$$f_i' = \frac{T_1 f}{2\Delta}, \quad f_i'' = \frac{T_2 f}{\Delta^2}, \quad f_i''' = \frac{T_3 f}{2\Delta^3}, \quad f_i'''' = \frac{T_4 f}{\Delta^4}. \tag{6.64}$$

- Nimetatud graafilised operaartorid on kui trafaretid, millega liigutakse mööda võrku ja määratakse $f_{i-2}, f_{i-1}, \ldots$ kordajad $i-$ndas sõlmes.

Plaadi elastse pinna siirded, sisejõud ja toereaktsioond on kahe muutuja, x ja y, funktsioonid. Seega on nende korral vaja numbriliselt määrata osatuletisi nii x kui y järgi. Vastavad valemid on analoogilised ühe muutuja funktsioonide juures kasutatutega. Nüüd tuleb vaid kasutada kahte indeksit, näiteks punktis $x = x_i$ ja $y = y_k$ osatuletis

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{f_{i+1,k} - f_{i-1,k}}{2\Delta_x} \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{f_{i,k+1} - f_{i,k-1}}{2\Delta_y}, \tag{6.65}$$

kus Δ_x ja Δ_y on vastavalt võrgusammud $x-$ ja $y-$teljel.

- Kuna vaatleme ristkülikplaate, siis pole vaja osadeks jagada kogu x ja y telge — piirdume vaid plaadi külgede pikkuste lõikudega (joonis loengus). Teisisõnu, vaatlema lõike $0 \leq x \leq a$ ja $0 \leq y \leq b$, mille jagame osadeks sammudega

$$\Delta_x = \frac{a}{m}, \qquad \Delta_y = \frac{b}{n}, \tag{6.66}$$

- Vaatleme plaadi elastse pinna (diferentsiaal)võrrandit (6.10)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}$$

Tuues sisse tähistuse $W(x,y) = Dw(x,y)$, Saame viimasele kuju

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = p(x,y) \qquad \text{ehk} \qquad \nabla^2\left(\nabla^2 W\right) = p. \quad (6.67)$$

Viimeses võrrandis on vaja leida neljandat järku osatuletised x ja y järgi ning samuti neljandat järku segaosatuletis.

- Võrrandi (6.67) vasakut poolt saab kujutada graafilise operaatori B abil. Selleks tuleb liita võrrandi liikmetele vastavad graafilised operaatorid ning tuua sisse tähistus $\surd$

$$\alpha = \frac{\Delta_x}{\Delta_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta_y} = \frac{\alpha}{\Delta_x}. \quad (6.68)$$

(vt. joonis loengus või joonis 14.2 Metsaveer)

- Seejärel saab biharmooniline võrrand (6.67), st. plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand, kuju

$$BW = p\Delta_x^4. \quad (6.69)$$

- **Võrgupunktide liigitus.** Vastavalt valemitele (6.66) oleme katnud ristkülikplaadi võrguga kus on $(m+1)(n+1)$ punkti ehk sõlme (joonis loengus).
  - Võrgupunkte, mis asetsevad plaadi servadel nimetame servapunktideks.
  - Võrgupunkte, mis asetsevad servapunktidest seespool nimetame avapunktideks.
  - Kuna neljanda tuletise arvutamise valemeis on vaja teada funktsiooni väärtusi kahes naaberreas või naaberveerus, siis tuleb sisse tuua nn. välis- ehk lisapunktid, mis asuvad väljaspool plaati. Funktsiooni väärtused neis punktides määratakse rajatingimustest. Tavaliselt on võimalik piirduda ühe rea välispunktidega.
  - Punktide arv plaadil on $(m+1)(n+1)$, neist $(m-1)(n-1)$ on avapunktid ja $(m+1)(n+1)-(m-1)(n-1) = 2(m+n)$ rajapunktid.

- **Plaadi paindeülesande lahendamiseks** tuleb lõplikes vahedes esitatud biharmooniline võrrand kujul (6.69) lahti kirjutada igas avapunktis.
  - Tulemusena saame võrrandisüsteemi, kus on avapunktide arvuga võrdne arv algebralisi võrrandeid. Saadud süsteemi lahend annabki meile plaadi elastse pinna siirded (läbipainded) avapunktides.
  - Servapunktide siirded on esitatud rajatingimuste abil.

- Kui siirded on leitud, siis nende abil saame leida sisejõud vastavalt valemitele (6.13)

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) = \frac{\mathcal{M}_x W}{\Delta_x^2}, \\ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) = \frac{\mathcal{M}_y W}{\Delta_y^2}, \\ T_{xy} = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = (1-\nu)\alpha\frac{\mathcal{T}_{xy} W}{4\Delta_x^2} \end{cases} \qquad (6.70)$$

ja (6.14)

$$\begin{cases} Q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right) = \frac{\mathcal{Q}_x W}{2\Delta_x^3}, \\ Q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right) = \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right) = \alpha\frac{\mathcal{Q}_y W}{2\Delta_x^3}. \end{cases} \qquad (6.71)$$

$\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{T}_{xy}, \mathcal{Q}_x$ ja $\mathcal{Q}_y$ on graafilised operaatorid (vt. joon. 14.3 Metsaveer).

- Toereaktsioonide leidmise juures õnnestub plaadi elastse pinna võrrandi abil ellimineerida nn. teise rea välispunktid. Kasutades graafilisi operaatoreid $\mathcal{R}_x$ ja $\mathcal{R}_y$ (vt. joon. 14.4 Metsaveer) saab vastavad avaldised esitada kujul

$$R_x = \frac{\mathcal{R}_x W}{2\Delta_x^3} - \frac{p\Delta_x}{2}, \qquad R_y = \frac{1}{\alpha}\frac{\mathcal{R}_y W}{2\Delta_x^3} - \frac{p\Delta_x}{2}. \qquad (6.72)$$

Ääretingimused.

- **Kinnisserv.** Servapunktides, mis on risti $x-$teljega

$$W_i = 0, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i-1,k} = W_{i+1,k}. \tag{6.73}$$

  Servapunktides, mis on risti $y-$teljega

$$W_i = 0, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{y=y_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i,k-1} = W_{i,k+1}. \tag{6.74}$$

- **Vabalt toetatud serv.** Servapunktides, mis on risti $x-$teljega

$$W_i = 0, \qquad (M_x)_{x=x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i-1,k} = -W_{i+1,k}. \tag{6.75}$$

  Servapunktides, mis on risti $y-$teljega

$$W_i = 0, \qquad (M_x)_{y=y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i,k-1} = -W_{i,k+1}. \tag{6.76}$$

- **Vaba serv.** Siin on olukord tunduvalt keerulisem, sest $W \neq 0$ ja W väärtusi raja- ja välispunktides ei õnnestu avaldada avapunktide kaudu. Selle asemel lisatakse avapunktides lahti kirjutatud plaadi elastse pinna võrranditele lisavõrrandid, mis väljendavad vaba serva tingimusi paindemomendi, põikjõu ja/või toereaktsiooni jaoks.