

## Peatükk 7

# Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades

Mõningaid selliseid ülesandeid oleme juba eespool vaadelnud, vt. näiteks alajaotused 5.11 ja 5.12. Käesoleva peatüki kahes esimeses paragrahvis vaadeldakse telgsümmeetriliste ülesannete lahendamist Love'i pingefunktsiooni ja Legendre'i polünoomide abil vabalt toetatud ümarplaadi paindeülesande näitel. Saadud lahendid on lineaarse elastsusteooria mõttes täpsed lahend-

### 7.1. Üldvõrrandid

276

did, st. lahendamisel lähtutakse elastsusteooria põhivõrranditest. Sellisele lähenemisviisile «vastandub» nn. 0-järku teooria, mille korral lähtutakse tala elastse joone või plaadi elastse pinna võrranditest. Sellist lähenemist ümarplaadi paindeülesande lahendamisele vaatleme kolmandas paragrahvis.

## 7.1 Üldvõrrandid

Käesolevas alajaotuses leiavad käsitlemist ülesanded, kus ei esine vääned. Silindriliste koordinaatide  $(r, \vartheta, z)$  puhul tähendab see seda, et vastavatest siirdekompontidest  $v = 0$  ja komponendid  $u$  ja  $w$  ei sõltu koordinaadist  $\vartheta$ . Seega ka pingekomponendid ei sõltu koordinaadist  $\vartheta$  ja kaks neist  $\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = 0$ . Nullist erinevad deformatsioonikomponendid avalduvad kujul

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (7.1)$$

Tasakaaluvõrrandid saavad aga kuju

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + R = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

kus  $R$  ja  $Z$  on koordinaatide  $r$  ja  $z$  sihiliste mahujõudude intensiivsus (dimensioon  $\text{N/m}^3$ ). Paljudel juhtudel on jällegi otstarbekas tuua sisse pingefunktsioon  $\varphi$ , siin nimetatakse teda aga Love'i pingefunktsiooniks. Tasakaaluvõrrandid on rahuldatud kui valida

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), & \sigma_\vartheta = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], & \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{cases} \quad (7.3)$$

Siinjuures peab  $\varphi$  rahuldama biharmoonilist võrrandit

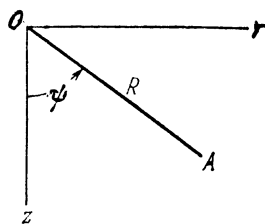
$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (7.4)$$

Antud juhul

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.5)$$

on Laplace'i operaator silindrilistes koordinaatides. Kuna antud juhul ei sõltu  $\varphi$  koordinaadist  $\vartheta$ , siis langeb Laplace'i operaatoris (7.5) kolmas liige välja. Siirdekomponendid  $u$  ja  $w$  määratakse avaldistega

$$2Gu = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad v = 0, \quad 2Gw = 2(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (7.6)$$



Joonis 7.1: Sfäärilised koordinaadid.

Mõnel juhul on silindriliste koordinaatide asemel mõistlik kasutada sfäärilisi koordinaate, st.,  $r$  ja  $z$  asemel kasutatakse koordinaate  $R$  ja  $\psi$ . Nüüd on

vaja (7.5)-s asendada osatuletised  $r$  ja  $z$  järgi. See üleminek on omakorda analoogne DRK  $x$  ja  $y$  ja polaarkoordinaatide  $r$  ja  $\vartheta$  vahelisele seosele. Saame

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \psi} \left( \frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}. \end{cases} \quad (7.7)$$

Seega omab biharmooniline võrrand (7.4) silindriliste koordinaatide puhul kuju

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \varphi = 0 \quad (7.8)$$

ja sfääriliste puhul

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (7.9)$$

Võrrandi (7.9) lahend peab samal ajal rahuldama ka Laplace'i võrrandit, st,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0. \quad (7.10)$$

Viimase erilahendit võib otsida kujul

$$\varphi_n = R^n \Psi_n, \quad (7.11)$$

kus  $\Psi_n$  on vaid muutuja  $\varphi$  funktsioon. Kokku saame viimasest kahest hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left( \sin \psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} \right) + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad (7.12)$$

Kui tähistame  $x = \cos \psi$  ja valime  $x$  uueks sõltumatuks muutujaks, siis saame (7.12)-st Legendre'i võrrandi

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} - 2x \frac{d\Psi_n}{dx} + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad (7.13)$$

Selle võrrandi lahendid on esitatavad Legendre'i polünoomide  $P_n(x)$  kaudu:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots, \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{array} \right. \quad (7.14)$$

Neid polünoome võib kasutada funktsioonidena  $\Psi_n$  avaldises (7.11) kusjuures igat neist võib veel korrutada konstandiga  $A_n$ . Kasutades valemeid

$$x = \cos \psi, \quad Rx = z \quad \text{ja} \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (7.15)$$

saab minna tagasi muutujatele  $r$  ja  $z$ . Seejuures saab võrrandi (7.9) lahend

kuju

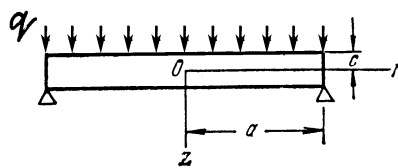
$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = A_0, \quad \varphi_1 = A_1 z, \\ \varphi_2 = A_2 \left[ z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_3 = A_3 \left[ z^3 - \frac{3}{5}z(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_4 = A_4 \left[ z^4 - \frac{6}{7}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \varphi_5 = A_5 \left[ z^5 - \frac{10}{9}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \dots \end{array} \right. \quad (7.16)$$

Toodud polünoomid on ka biharmoonilise võrrandi (7.4) lahendiks. Saab näidata, et kui  $R^n \Psi_n$  osutub harmoonilise võrrandi (7.10) lahendiks, siis  $R^{n+2} \Psi_n$  rahuldab biharmoonilist võrrandit (7.4) (kuid ei rahulda (7.10)) Kor-

rutades (7.16)  $R^2 = r^2 + z^2$ , saame uued lahendid

$$\begin{cases} \varphi_2 = B_2(r^2 + z^2), \\ \varphi_3 = B_3z(r^2 + z^2), \\ \varphi_4 = B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2), \\ \varphi_5 = B_5(2z^3 - 3r^2z)(r^2 + z^2), \\ \dots \end{cases} \quad (7.17)$$

## 7.2 Ümarplaadi paine



Joonis 7.2: Sümmeetriliselt jaotatud põikkoormusega koormatud ja servadest vabalt toetatud ümarplaat.

Vaatleme sümmeetriliselt koormatud ümarplaati (joonis 7.2). Valides avaldistest (7.16) ja (7.17) kolmandat järku polünoomid, saame pingefunktsiooni esitada kujul

$$\varphi = a_3(2z^3 - 3r^2z) + b_3(r^2z + z^3). \quad (7.18)$$

Avaldiste (7.3) põhjal saame seejärel pingekomponendid kujul

$$\begin{cases} \sigma_r = -6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \\ \sigma_\vartheta = -6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \\ \sigma_z = -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3, \\ \tau_{rz} = 0. \end{cases} \quad (7.19)$$

Seega osutuvad pingekomponendid kogu plaadi ulatuses konstantseteks. Valemities (7.19) olevate konstantide  $a_3$  ja  $b_3$  määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi  $\sigma_r$  ja  $\sigma_z$  jaoks. Kokkuvõttes: kolmandat järku polünoomide abil saab esitada lahendi, mis vastab olukorrale, kus plaadi pinnale on rakendatud telgsümmeetrilised konstantsed koormused.

Valides (7.16) ja (7.17) neljandat järku polünoomid, saame pingekomponentide jaoks avaldised

$$\begin{cases} \sigma_r = 96a_4z + 4b_4(14\nu - 1)z, \\ \sigma_z = -192a_4z + 4b_4(16 - 14\nu)z, \\ \tau_{rz} = 96a_4r - 2b_4(16 - 14\nu)r. \end{cases} \quad (7.20)$$

Kui võtta  $96a_4 - 2b_4(16 - 14\nu) = 0$ , saame

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{ja} \quad \sigma_r = 28(1 + \nu)b_4z, \quad (7.21)$$

mis esitab plaadi puhast painet juhul kui ta servadesse on rakendatud ühtlaselt jaotatud momendid.

Ühtlaselt jaotatud koormusele allutatud plaadi lahendi saamiseks lähtutakse kuuendat järku polünoomidest. Vastavatele pingetele (mida siin ei esita, kuid mis sisaldavad konstante  $a_6$  ja  $b_6$ ) lisatakse lahend (7.20) juhul  $b_4 = 0$  ja  $z$ -telje sihiline ühtlane tõmme  $\sigma_z = b$  lahendist (7.19). Seega tuleb rajatingimustest

$$\begin{cases} \sigma_z = 0, & z = c; & \sigma_z = -q, & z = -c; \\ \tau_{rz} = 0, & z = \pm c; \end{cases} \quad (7.22)$$

määrata neli konstanti  $a_6, b_6, a_4$  ja  $b$ . Kokku saame

$$\begin{cases} \sigma_r = q \left[ \frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3z}{8c} \right], \\ \sigma_z = q \left[ -\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3z}{4c} - \frac{1}{2} \right], \\ \tau_{rz} = -\frac{3qr}{8c^3} (c^2 - z^2). \end{cases} \quad (7.23)$$

Valemite (7.23) puhul on huvitav see, et esitatav pingeaotus on analoogne pingete  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$  jaotusega kitsa ristkülikulise tala puhul (võrdle valem (5.63) lk. 179). Tala valemite puhul tuleb arvestada, et sisse on toodud inertsimoment  $I = 2c^3/3$ . Radiaalsed pinged on esitatud paaritu funktsioonina koordinaadist  $z$  ja annavad servas ühtlaselt jaotatud paindemomendi. Et saada lahendit servast vabalt toetatud plaadi jaoks, lisame pingeaualdistele (7.23) lahendi (7.21) ja määrame konstandi  $b_4$  rajatingimusest

$$\int_{-c}^c \sigma_r z dz = 0, \quad r = a. \quad (7.24)$$

Seega saab vaba toetuse puhul radiaalse normaalpinge  $\sigma_r$  avaldis kuju

$$\sigma_r = q \left[ \frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3(2 + \nu)}{8} \frac{z}{5c} + \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right]. \quad (7.25)$$

Kui võtta  $r = 0$ , saame pinge  $\sigma_r$ , mis mõjub plaadi tsentris. Elementaarteooria puhul esitab pinget plaadi tsentris valem

$$\sigma_r = \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3}, \quad (7.26)$$

s.o. (7.25) viimane liige. Kui plaadi paksus  $2c$  on väike võrreldes raadiusega  $a$ , siis osutuvad ka «parandusliikmed» väikesteks.

Puhta painde lisamisega ja rajatingimuse (7.24) rakendamisega kõrvaldasime me küll paindemomendid vabas servas  $r = a$ , kuid ei vabanenud pingetest

$$\sigma_r|_{r=a} = q \left[ \frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(2 + \nu)}{8} \frac{z}{5c} \right]. \quad (7.27)$$

Nende pingete peavektor ja peamoment plaadi servas on nullid, seega tuleb lahendi täpsuse ja «kehtivuse» hindamisel rakendada Saint-Venant'i printsiipi.

Kui kasutada kuuendast kõrgemat järku polünoome, saab leida lahendeid juhtude jaoks, kus  $q = q(r)$ . Teist liiki Legendre'i polünoome ( $Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,  $Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, \dots$ ) kasutades saab leida lahendeid rõngasplaadi jaoks. Kõik need lahendid kehtivad juhul kui läbipainded on väikesed võrreldes paksusega  $2c$ . Suurte läbipainete puhul tuleb arvestada plaadi kesk- tasandi pikenemisega.

### 7.3 Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand.

Paragrahvis 6.1 toodud plaatide paindeteooria hüpoteesid saavad telgsümmeetrilisel juhul kuju

$$\begin{cases} w(r, z) = w(r), & u(r, z) = -z \frac{dw(r)}{dr}, & \sigma_z = 0, \\ R(r, z) = 0, & Z(r, z) = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(r). \end{cases} \quad (7.28)$$

Seejärel saame tasakaaluvõrranditele (7.2) kuju

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \frac{\sigma_\vartheta}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(r). \end{cases} \quad (7.29)$$

Viimasest kahest võrrandist saab elimineerida pinge  $\tau_{rz}$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_\vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\sigma_r)}{\partial r^2} = \frac{zp}{i}, \quad i = \frac{h^3}{12} \quad (7.30)$$

kus  $i$  on inertsimomendi intensiivsus. Elastse pinna diferentsiaalvõrrandi saamiseks tuleb nüüd deformatsioonid avaldada läbi siirete Chauch seoste abil ning seejärel pinged deformatsioonide kaudu üldistatud Hooke'i seaduse abil. Tulemuseks on neljandat järku diferentsiaalvõrrand

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p}{D}, \quad D = \frac{Ei}{1 - \nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (7.31)$$



Peale võrrandi (7.31) lahendamist saab leida normaalpinged

$$\begin{cases} \sigma_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \frac{z}{i} \\ \sigma_\vartheta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \frac{z}{i} \end{cases} \quad (7.32)$$

Nihkepinge  $\tau_{rz}$  saame leida võrrandit (7.29)<sub>1</sub> integreerimisel  $z$  järgi:

$$\tau_{rz} = \int \left[ \frac{\sigma_\vartheta}{r} - \frac{1}{r} (r\sigma_r) \right] dz = \dots, \quad (7.33)$$

kust peale rajatingimuste  $\tau_{rz}|_{z=\pm h/2} = 0$  rahuldamist saame

$$\tau_{rz} = -D \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \frac{3}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (7.34)$$

Analoogiliselt valemitele (6.15) on pingete ja sisejõudude vahelised seosed kujul

$$\sigma_r = \frac{M_r z}{i}, \quad \sigma_\vartheta = \frac{M_\vartheta z}{i}, \quad \tau_{rz} = \frac{3Q_r}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad (7.35)$$

kust saame

$$\begin{cases} M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_\vartheta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \\ Q_r = -D \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \end{cases} \quad (7.36)$$

Diferentsiaalvõrrandi (7.31) saab kirjutada lahendamiseks sobivamale kujule:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{D}. \quad (7.37)$$

Juhul kui  $p(r) = p_o = \text{const}$  saame viimasest

$$w(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 + \frac{p_o r^4}{64D}. \quad (7.38)$$

Konstantide  $C_1, \dots, C_4$  määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi  $w(r)$ ,

$dw(r)/dr$ ,  $M_r(r)$ ,  $M_\vartheta(r)$  või  $Q_r(r)$  jaoks. Vastavad avaldised omavad kuju

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw(r)}{dr} = 2C_1 r \ln r + C_1 r + 2C_2 r + \frac{C_3}{r} + \frac{p_o r^3}{16D}, \\ M_r(r) = -D \left[ 2C_1(1+\nu) \ln r + C_1(3+\nu) + 2C_2(1+\nu) - \frac{C_3(1-\nu)}{r^2} \right] - \\ \quad - (3+\nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ M_\vartheta(r) = -D \left[ 2C_1(1+\nu) \ln r + C_1(1+3\nu) + 2C_2(1+\nu) + \frac{C_3(1-\nu)}{r^2} \right] - \\ \quad - (1+3\nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ Q_r(r) = -\frac{4DC_1}{r} - \frac{p_o r}{2}. \end{array} \right. \quad (7.39)$$

Suurustest (7.38) ja (7.39) on välisserval teada tavaliselt kaks.

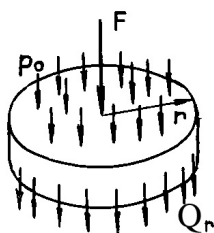
Rõngasplaadi puhul lisandub siseservas veel kaks tingimust, mis kokku võimaldavad määrata neli konstanti.

Ümar- ehk ringplaatide korral peab konstant  $C_3 = 0$  — vastasel korral poleks siirded plaadi keskel lõplikud suurused, sest  $\ln r \rightarrow -\infty$  kui  $r \rightarrow 0$ . Samas,  $r^2 \ln r \rightarrow 0$ , kui  $r \rightarrow 0$ . Konstandi  $C_1$  määramiseks kasutame tingimust, et mööda suvalist kontsentrilist ringjoont mõjuv põikjõud peab tasakaalustama selle ringjoone sees mõjuva koormuse.

- *Ühtlane koormus  $p_o$* . Eeldades nii  $p$  kui  $Q_r$  jaoks positiivsed suunad (vt. joonis), saame

$$2\pi r Q_r + \pi r^2 p_o = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{p_o r}{2}. \quad (7.40)$$

Seega (7.39)<sub>3</sub> põhjal peab  $C_1 = 0$ .



- *Tsentris mõjuv koondatud jõud  $F$ .* Nüüd

$$2\pi r Q_r + F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{F}{2\pi r}. \quad (7.41)$$

Võttes avaldises (7.39)<sub>3</sub> koormuse  $p_o = 0$  saame

$$Q_r = -\frac{4DC_1}{r} = -\frac{F}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{F}{8D\pi}. \quad (7.42)$$

## Näited

### 1. Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat.

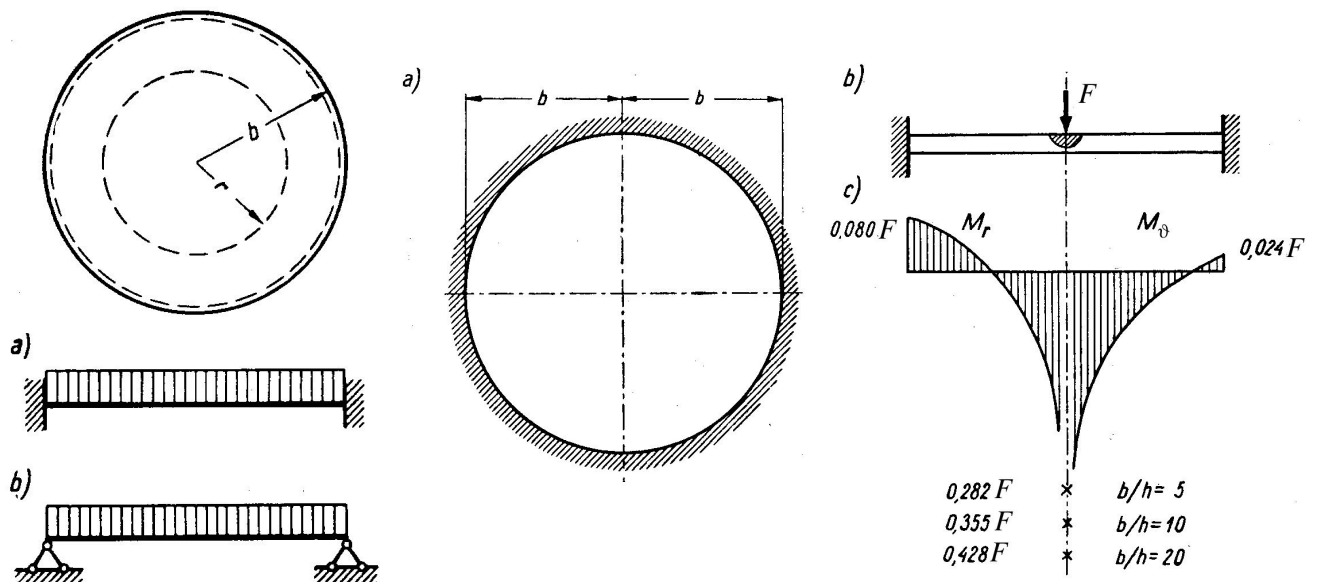
a) jäik kinnitus

b) vaba toetus

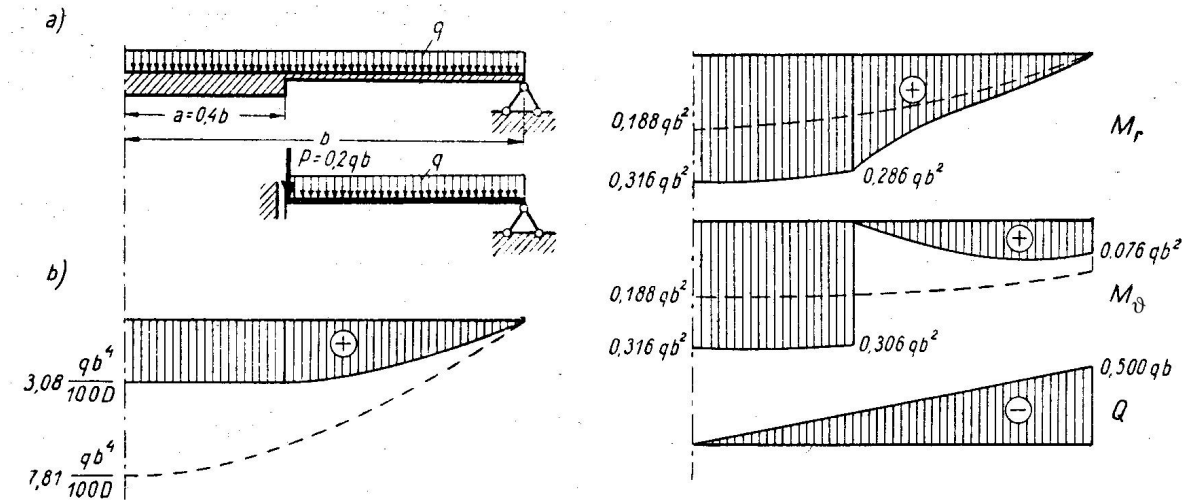
### 2. Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat.

a) jäik kinnitus

b) vaba toetus



## 3. Ühtlaselt jaotatud koormusega rõngasplaat.



NB! Joonisel  $q$ , meil  $p_o!$