7.4 Näiteid ümar- ja rõngasplaatide paindeülesannetest.

Rajatingimused:

- jäik kinnitus

$$w = 0, \qquad \frac{dw}{dr} = 0; \tag{7.43}$$

- vaba toetus

$$w = 0, \qquad M_r = 0; \tag{7.44}$$

- vaba serv

$$M_r = 0, \qquad Q_r = 0. \tag{7.45}$$

Lahendused

1. Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat.

Konstandid $C_1 = C_3 = 0$ ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\begin{cases} w(r) = C_2 r^2 + C_4 + \dfrac{p_o r^4}{64D}. \\ \dfrac{dw(r)}{dr} = 2C_2 r + \dfrac{p_o r^3}{16D}, \\ M_r(r) = -2DC_2(1+\nu) - (3+\nu)\dfrac{p_o r^2}{16}, \\ M_\vartheta(r) = -2DC_2(1+\nu) - (1+3\nu)\dfrac{p_o r^2}{16}, \\ Q_r(r) = -\dfrac{p_o r}{2}. \end{cases} \tag{7.46}$$

a) Jäik kinnitus

Rajatingimused plaadi välisservas $r = b$ on antud kujul $w = 0$ ja $dw/dx = 0$. Kasutades viimaseid, saame määrata konstandid C_2 ja C_4:

$$C_2 = -\frac{p_o b^2}{32D}; \qquad C_4 = \frac{p_o b^4}{64D}. \tag{7.47}$$

Seega saavad siirete ja paindemomentide avaldised (7.46) lõpuks kuju

$$\begin{cases} w(r) = \dfrac{p_o}{64D}\left(b^2 - r^2\right)^2, \\ M_r(r) = \dfrac{p_o}{16}\left[b^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)\right], \\ M_\vartheta(r) = \dfrac{p_o}{16}\left[b^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)\right]. \end{cases} \tag{7.48}$$

Vastavad ekstremaalsed väärtused

$$\begin{cases} r = 0: \quad w = \dfrac{p_o}{64D} b^4, \quad M_r = M_\vartheta = \dfrac{p_o b^2}{16}(1+\nu), \\ r = b: \quad M_r(r) = -\dfrac{p_o}{8} b^2, \quad M_\vartheta = -\dfrac{p_o \nu}{8} b^2. \end{cases} \tag{7.49}$$

b) Vaba toetus

Kasutades rajatingimusi plaadi välisservas $r = b$ kujul $w = 0$ ja $M_r = 0$ saame määrata konstandid

$$C_2 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{p_o b^2}{32D}, \qquad C_4 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{p_o b^4}{32D} - \frac{p_o b^4}{64D}. \tag{7.50}$$

Pannes need väärtused avaldistesse (7.46) saame

$$\begin{cases} w(r) = \dfrac{p_o(b^2 - r^2)}{64D}\left(b^2\dfrac{5+\nu}{1+\nu} - r^2\right), \\ M_r(r) = \dfrac{p_o(3+\nu)}{16}(b^2 - r^2), \\ M_\vartheta(r) = \dfrac{p_o}{16}\left[b^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)\right]. \end{cases} \tag{7.51}$$

Ekstremaalsed väärtused on plaadi keskel, st.,

$$r = 0: \qquad w = \frac{5+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{p_o b^4}{64D}, \qquad M_r = M_\vartheta = \frac{p_o(3+\nu)}{16} b^2. \tag{7.52}$$

2. Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat.

Konstandid $C_1 = F/(8D\pi)$ ning $C_3 = 0$ ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\left\{\begin{aligned} w(r) &= \frac{F}{8D\pi} r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_4, \\ \frac{dw(r)}{dr} &= \frac{F}{8D\pi} r\,(2\ln r + 1) + 2C_2 r, \\ M_r(r) &= -\,D\left\{\frac{F}{8D\pi}\left[2(1+\nu)\ln r + (3+\nu)\right] + C_2(1+\nu)\right\}, \\ M_\vartheta(r) &= -\,D\left\{\frac{F}{8D\pi}\left[2(1+\nu)\ln r + (1+3\nu)\right] + C_2(1+\nu)\right\}, \\ Q_r(r) &= -\,\frac{F}{2\pi r}. \end{aligned}\right. \tag{7.53}$$

a) Jäik kinnitus

Konstandid C_2 ja C_4 määratakse rajatingimustest $w = 0$ ja $dw/dx = 0$ plaadi välisservas $r = b$. Tulemus on

$$C_2 = -\frac{F(2\ln b + 1)}{16D\pi}, \qquad C_4 = \frac{Fb^2}{16D\pi}. \tag{7.54}$$

Siirded ja paindemomendid (7.53) saavad seejärel kuju

$$\left\{\begin{aligned} w(r) &= \frac{F}{16D\pi}\left(2r^2 \ln\frac{r}{b} - r^2 + b^2\right), \\ M_r(r) &= -\,\frac{F}{4\pi}\left[1 + (1+\nu)\ln\frac{r}{b}\right], \\ M_\vartheta(r) &= -\,\frac{F}{4\pi}\left[\nu + (1+\nu)\ln\frac{r}{b}\right]. \end{aligned}\right. \tag{7.55}$$

Plaadi servas $r = b$ paindemomendid

$$M_r = -\frac{F}{4\pi}, \qquad M_\vartheta = -\frac{F\nu}{4\pi}, \tag{7.56}$$

vt. parempoolne joonis lk. 296 ($\nu = 0,3$).

Läbipaine plaadi keskel on lõplik, st.

$$w = \frac{Fb^2}{16D\pi}, \qquad \text{sest} \qquad \lim_{r\to 0} r^2 \ln\frac{r}{b} = 0. \tag{7.57}$$

Paindemomendid ei oma aga keskel lõplikke väärtusi: kui $r \to 0$ siis $M_r \to \infty$ ja $M_\vartheta \to \infty$. Täpsemad arvutused koormuse rakenduspunkti ümbruses ($3-4$ plaadi paksust) paksude plaatide teooria põhjal näitavad, et pinged ületavad voolavuspiiri vaid plaadi surutud osas — koormuse rakenduspunkti ümbruses tekib lokaalne voolamine. Plaadi tõmmatud kihtides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{F}{h^2}(1+\nu)\left(0,485\ln\frac{b}{h} + 0,52\right) \tag{7.58}$$

ning neile saab vastavusse seada nn. fiktiivsed paindemomendid

$$M_r = M_\vartheta = \frac{F}{6}(1+\nu)\left(0,485\ln\frac{b}{h} + 0,52\right). \tag{7.59}$$

Vt. parempoolne joonis lk. 296, kus on toodud paindemomentide epüürid juhul $\nu = 0,3$.Ristikestega on tähistatud fiktiivsete paindemomentide

väärtused kolme erineva raadiuse–paksuse suhte b/h joaks. Kokkuvõttes pole olukord ohtlik kuni pinged (7.58) jäävad lubatud piiridesse.

b) Vaba toetus

Rajatingimused välisserval $r = b$ on $w = M_r = 0$, kust leiame

$$C_2 = -\frac{F}{16D\pi(1+\nu)}\left[2(1+\nu)\ln b + 3 + \nu\right], \qquad C_4 = \frac{Fb^2(3+\nu)}{16D\pi(1+\nu)}. \tag{7.60}$$

Siirded ja paindemomendid (7.53) saavad seejärel kuju

$$\begin{cases} w(r) = \dfrac{F}{16D\pi(1+\nu)}\left[(3+\nu)\left(b^2 - r^2\right) + 2(1+\nu)r^2\ln\dfrac{r}{b}\right], \\ M_r(r) = \dfrac{F(1+\nu)}{4\pi}\ln\dfrac{r}{b}, \\ M_\vartheta(r) = \dfrac{F(1+\nu)}{4\pi}\left(\ln\dfrac{r}{b} + 1 + \nu\right). \end{cases} \tag{7.61}$$

Ekstremaalne läbipaine plaadi keskel on lõplikud

$$w = \frac{Fb^2(3+\nu)}{16D\pi(1+\nu)}. \tag{7.62}$$

Paindemomendid, aga on avaldiste (7.62) põhjal plaadi keskel lõpmata suured. Analoogiliselt jäiga kinnitusega näitab ka siin täpsem uuring, et koormuse rakenduspunkti lähedal tekib lokaalne plastne tsoon kuid plaadi tõmmatud kihtides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{F}{h^2}\left[(1+\nu)\left(0,485\ln\frac{b}{h} + 0,52\right) + 0,48\right]. \tag{7.63}$$

Ka sel juhul pole olukord ohtlik kuni pinged (7.63) jäävad lubatud piiridesse.

3. Rõngasplaat

a) Jäiga südamikuga ümarplaat.

Vaatleme vabalt toetatud astmelist ümarplaati, mille keskmise osa jäikus on suur võrreldes välise osaga (vt. joonis a) lk. 297). Seetõttu käitub väline, st. väikese jäikusega osa kui rõngasplaat. Plaadile mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega p_o. Lihtsuse mõttes eeldame, et sisemise osa raadius $a = 0,4b$ ja $\nu = 0$. Lisaks toome sisse nn. dimensioonita raadiuse $\rho = r/b$.

Rajatingimused:

$$\begin{cases} \text{välisserv, } \rho = 1: \begin{cases} w = 0, \\ M_r = 0; \end{cases} \\ \text{siseserv, } \rho = 0,4: \begin{cases} \dfrac{dw}{dr} = 0, \\ Q = -0,2bp_o, \quad \text{sest } |Q\cdot 2\pi a| = \left|\pi a^2 p_o\right|. \end{cases} \end{cases} \tag{7.64}$$

Kasutades viimaseid koos avaldistega (7.38) ja (7.39) saame määrata konstandid $C_1, \ldots, C_4$. Saadud konstantide asendamisel võrrandiesse (7.38) ja (7.39) saame siirete ja sisejõudude avaldised välise osa jaoks:

$$\begin{cases} w = p_o b^4 \left(1,562\rho^4 - 8,151\rho^2 + 2,448 \ln \rho + 6,589,\right)/100D \\ \dfrac{dw}{dr} = p_o b^3 \left(6,250\rho^3 - 16,302\rho + 2,448/\rho\right)/100D, \\ M_r = p_o b^2 \left(-18,750\rho^2 + 2,448/\rho^2 + 16,302\right)/100, \\ M_\vartheta = p_o b^2 \left(-6,250\rho^2 - 2,448/\rho^2 + 16,302\right)/100, \\ Q = -0,500 p_o b \rho. \end{cases} \tag{7.65}$$

Plaadi keskmine, st. jäigem osa, arvutatakse vastavalt ümarplaadi valemitele.

Siirete ja sisejõudude epüürid on toodud joonistel lk. 297. Vasakpoolne alumine joonis esitab läbipainde epüüri ja parempoolsed sisejõudusid. Kriipsjoonega on esitatud ühtlase paksusega plaadi siirete ja sisejõudude epüürid. On näha, et keskmise osa jäikuse suurendamine vähendab küll läbipaindeid, kui samas suurendab paindemomente nii jäigastatud kui jäigastamata osas. Kuna sellega kaasneb ka pingete kasv, siis ei saa sellist tüüpi konstruktsiooni lugeda heaks.

Kui plaadi keskmise osa jäikus pole suur võrreldes äärmise osaga, siis on arvutus keerulisem, sest plaati tuleb vaadelda kui tervikut, võttes arvesse paksuse hüppelist muutust. Tuleb koostada siirete avaldised plaadi mõlema osa jaoks. Need avaldised sisaldavad 8 konstanti, millest kaks keskmisele osale vastavat on nullid. Ülejäänud 6 määratakse rajatingimustest välisserval, st. $\rho = 1$ on $w = M_r = 0$ ja pidevustingimustest siirete w ja sisejõudude Q, M_r ning M_ϑ jaoks kohal $r = a$.

b) Välisservast jäigalt kinnitatud ja siseservast vaba rõngasplaat.

Jäigalt kinnitatud välisservas $r = b$ peavad $w = 0$ ja $dw/dr = 0$. Vabas siseservas $r = a$ aga $M_r = 0$ ja $Q = 0$. Kasutades selliseid rajatingimusi saame avaldistest (7.38) ja (7.39) neli võrrandit konstantide $C_1, \ldots, C_4$ määramiseks.

Kui konstandid on leitud saame omakorda leida siirete ja sisejõudude avaldised, milledest siinkohal esitame vaid siirete oma:

$$\begin{cases} w = \dfrac{p_o a^4}{64D}\left[-1 + 2(1-k-2\beta^2)(1-\rho^2) + \rho^4 - 4k\ln\rho - 8\beta^2\rho^2\ln\rho\right], \\ \rho = \dfrac{r}{a}, \qquad \beta = \dfrac{b}{a}, \\ k = \dfrac{(1-\nu)\beta^2 + (1+\nu)(1+4\beta^2\ln\beta)}{(1-\nu)+(1+\nu)\beta^2}\beta^2. \end{cases} \tag{7.66}$$

Kokkuvõte. Rõngasplaatide korral on võimalikud väga mitmed jäiga kinnituse, vaba toetuse ja vaba serva kombinatsioonid. Kõigi nende puhul tuleb lähtudes avaldistest (7.38) ja (7.39) ning konkreetsetest rajatingimustest (7.43)–(7.45) koostada võrrandisüsteem konstantide $C_1, \ldots, C_4$ määramiseks. Seejärel saadakse siirete ja sisejõudude avaldised.

Peatükk 8

Plaatide stabiilsus

8.1 Sissejuhatus

Vaatleme plaati, millele mõjuv koormus on plaadi tasandis.

- Koormus suhteliselt väike
  - tasandülesanne — plaat jääb tasapinnaliseks

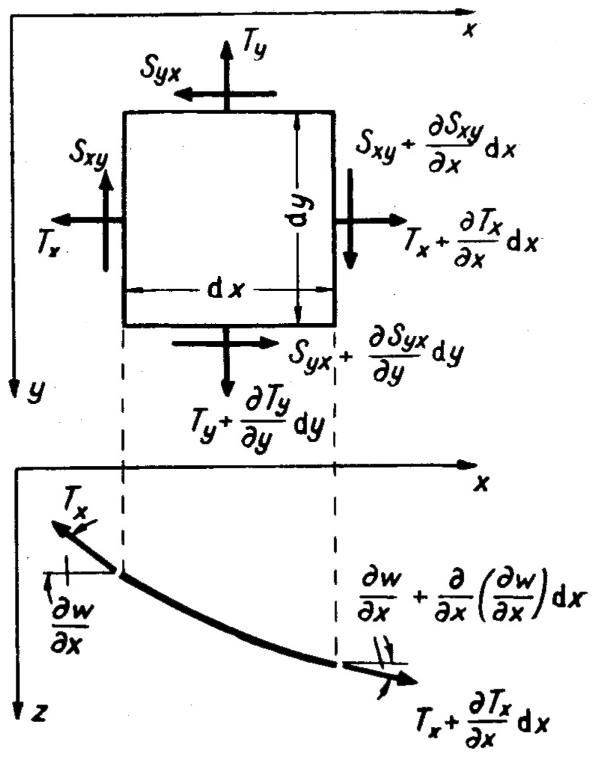
- Koormus ületab kriitilise piiri
  - Mõlgid (mõlkumine) — stabiilsuse kadu
  - Analoogia tala stabiilsuse kaoga — tala nõtke
  - Erinevus talast — stabiilsuse kadumisega koos ei pruugi kaduda plaadi kandevõime — painduvate plaatide teooria.

Vt. lisaks R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967 lk. 469–488.

8.2 Kriitilise koormuse määramine staatilise tasakaalu meetodil

Idee:

- Plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrandisse (EPDV) tuleb lisada liikmed, mis vastavad plaadi tasandis mõjuvatele jõududele.
- Tuleb leida plaadi läbipainde avaldis, mis rahuldaks nii EPDV-t kui rajatingimusi.



Joonis 8.1: Plaadi element $dx - dy - h$ ja talle mõjuvad jõud

Seni oleme EPDV tuletamisel arvesse võtnud vaid sisejõudusid (painde- ja väändemomente ning põikjõudu), mis on põhjustatud plaadile mõjuvast põikkoormusest. Hüljatud on olnud plaadi tasandis mõjuvad piki- ja nihkejõud ehk aheljõud. Stabiilsuse (ja suurte läbipainete) uurimisel tuleb aga needki arvesse võtta.

Vaatleme plaadi elementi $dx - dy - h$, millele mõjuvad pikijõud T_x ja T_y ning nihkejoud (tangentsiaaljõud) $S_{xy} = S_{yx}$ (vt. joonis 8.1). Vastavad ahelpinged[a] $\sigma_x = T_x/h$, $\sigma_y = T_y/h$ ja $\tau_{xy} = S_{xy}/h$.

[a] NB! nagu teistelgi sisejõududel on aheljõudude dimensioon N/m

Staatilise tasakaalu korral peavad vaadeldavale elemendile mõjuvate summaarsete jõudude projektsioonid koordinaattelgedel olema nullid. Eeldame, nagu eespoolgi, et pöörded on väikesed ja seega $\cos\alpha \sim 1$ ning $\sin\alpha \sim \tan\alpha \sim \alpha$. Kuna x- ja y-telgede sihis mõjuvad vaid sisejõud siis saavad tasakaaluvõrrandid kuju

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0. \tag{8.1}$$

Projekteerides jõud T_x, T_y ja $S_{xy} = S_{yx}$ z-teljele saame nn. täiendava jõu, mis tuleb lisada plaadi EPDV-sse (6.10):

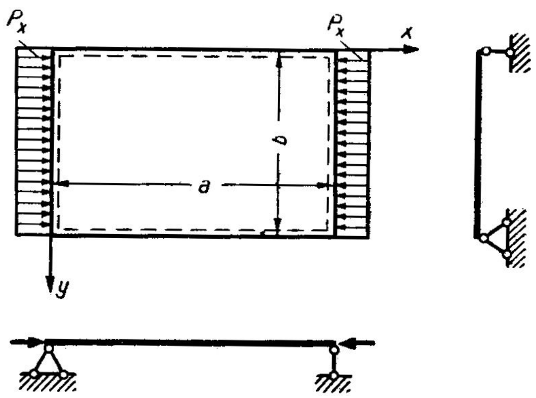
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(p(x,y) + T_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right). \tag{8.2}$$

Valides põikkoormuse $p = 0$, saamegi võrrandi kriitilise koormuse leidmiseks:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = T_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{8.3}$$

8.2.1 Ristkülikplaadi kriitilise koormuse leidmine

Jäigale kontuurile toetuv ühes sihis surutud plaat (joon. 8.2).



Joonis 8.2: Jäigale kontuurile toetuv ristkülikplaat.

- Koormus P_x on rakendatud plaadi servadel $x = 0$ ja $x = a$.
  - $T_x = -P_x$, $T_y = S_{xy} = 0$
  - Kriitilise koormuse määramise võrrand (8.3) lihtsustub

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+P_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \tag{8.4}$$

- Lahendit otsime analoogiliselt Navier' meetodiga kujul

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{8.5}$$

- (8.5) $\longrightarrow$ (8.4)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2-P_x\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=0. \tag{8.6}$$

- (8.6) peab kehtima iga x puhul $\Rightarrow$ üksikud sõltumatud võrrandid

$$P_x=\pi^2 D\frac{\left(m^2/a^2+n^2/b^2\right)^2}{m^2/a^2}. \tag{8.7}$$

- Fikseeritud m korral omab P_x minimaalset väärtust $n=1$ korral.

- Fikseeritud n korral sõltub minimaalset P_x tagav m väärtus suhtest a/b.
- $n=1\longrightarrow$ (8.7) $\Rightarrow$

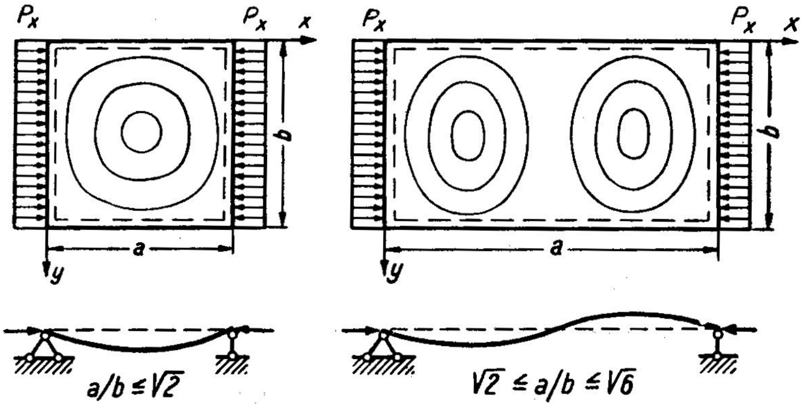
$$P_x=\frac{\pi^2 D}{a^2}\left(m+\frac{1}{m}\frac{a^2}{b^2}\right)^2. \tag{8.8}$$

  P_x miinimumile vastab

$$\frac{d}{dm}\left(m+\frac{1}{m}\frac{a^2}{b^2}\right)=1-\frac{1}{m^2}\frac{a^2}{b^2}=0 \quad\Rightarrow\quad m=\frac{a}{b}. \tag{8.9}$$

- Kuna poollainete arv m saab olla vaid täisarv, kuid küljepikkuste suhe a/b ei pruugi olla täisarv, siis pole tulemus otseselt rakendatav.
  - Leiame millise a/b väärtuse korral annavad m ja $m+1$ poollainet sama kriitilise koormuse P_{kr}: m & $m+1\longrightarrow$ (8.8) $\Rightarrow$

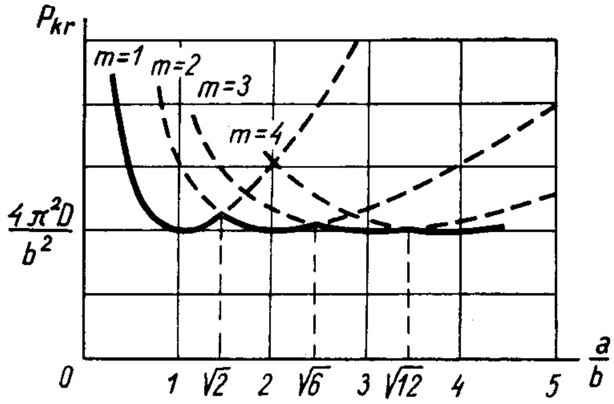
$$\frac{a}{b}=\sqrt{m(m+1)} \tag{8.10}$$



Joonis 8.3: Ühe ja kahe poollainega mõlkumiskujud.

– Teisisõnu, piir ühe ja kahe poollaine vahel on $a/b = \sqrt{2}$, kahe ja kolme vahel $a/b = \sqrt{6}$, kolme ja nelja vahel $a/b = \sqrt{12}$ jne. (vt. joonised 8.3 ja 8.4).

- Üksikud kõverad joonisel 8.4 vastavad poollainete arvule $m = 1, 2, 3, \ldots$. On selge, et kriitiline koormus P_{kr} omab minimaalset väärtust $4\pi^2 D/b^2$ juhul kui a/b on täisarv. Viimase joonise põhjal on selge, et juhtude $a/b \geq 1$ korral (koormus mõjub pikema külje sihis) sobib kriitiliseks



Joonis 8.4: Kriitiline koormus sõltuvana suhtest a/b.

koormuseks see sama minimaalne väärtus

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}. \tag{8.11}$$

- Juhtudel kui $a/b < 1$ (koormus mõjub lühema külje sihis) on $m = n = 1$ ja valemist(8.8) saame

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \tag{8.12}$$

- Kui $a/b \ll 1$, siis saab viimane kuju

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2}. \tag{8.13}$$

Kriitilise pinge leidmiseks jagatakse kriitiline koormus plaadi paksusega h:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{h}. \tag{8.14}$$

Arvestades, et $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ saame pikemate külgede sihis surutud plaadi ($a/b > 1$) jaoks

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \tag{8.15}$$

ja lühemate külgede sihis surutud plaati ($a/b < 1$) jaoks

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \tag{8.16}$$

Sisukord