

7.4 Näiteid ümar- ja rõngasplaatide paindeülesannetest.

Rajatingimused:

- jäik kinnitus

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0; \quad (7.43)$$

- vaba toetus

$$w = 0, \quad M_r = 0; \quad (7.44)$$

- vaba serv

$$M_r = 0, \quad Q_r = 0. \quad (7.45)$$

Lahendused

1. Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat.

Konstandid $C_1 = C_3 = 0$ ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\left\{ \begin{array}{l} w(r) = C_2 r^2 + C_4 + \frac{p_o r^4}{64D}. \\ \frac{dw(r)}{dr} = 2C_2 r + \frac{p_o r^3}{16D}, \\ M_r(r) = -2DC_2(1 + \nu) - (3 + \nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ M_\vartheta(r) = -2DC_2(1 + \nu) - (1 + 3\nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ Q_r(r) = -\frac{p_o r}{2}. \end{array} \right. \quad (7.46)$$

a) Jäik kinnitus

Rajatingimused plaadi välisservas $r = b$ on antud kujul $w = 0$ ja $dw/dx = 0$. Kasutades viimaseid, saame määrata konstandid C_2 ja C_4 :

$$C_2 = -\frac{p_o b^2}{32D}; \quad C_4 = \frac{p_o b^4}{64D}. \quad (7.47)$$

Seega saavad siirete ja paindemomentide avaldised (7.46) lõpuks kuju

$$\begin{cases} w(r) = \frac{p_o}{64D} (b^2 - r^2)^2, \\ M_r(r) = \frac{p_o}{16} [b^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)], \\ M_\vartheta(r) = \frac{p_o}{16} [b^2(1 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \end{cases} \quad (7.48)$$

Vastavad ekstremaalsed väärtused

$$\begin{cases} r = 0 : & w = \frac{p_o}{64D} b^4, \quad M_r = M_\vartheta = \frac{p_o b^2}{16} (1 + \nu), \\ r = b : & M_r(r) = -\frac{p_o}{8} b^2, \quad M_\vartheta = -\frac{p_o \nu}{8} b^2. \end{cases} \quad (7.49)$$

b) Vaba toetus

Kasutades rajatingimusi plaadi välisservas $r = b$ kujul $w = 0$ ja $M_r = 0$ saame määrata konstandid

$$C_2 = -\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{p_o b^2}{32D}, \quad C_4 = \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{p_o b^4}{32D} - \frac{p_o b^4}{64D}. \quad (7.50)$$

Pannes need väärtused avaldistesse (7.46) saame

$$\begin{cases} w(r) = \frac{p_o(b^2 - r^2)}{64D} \left(b^2 \frac{5 + \nu}{1 + \nu} - r^2 \right), \\ M_r(r) = \frac{p_o(3 + \nu)}{16} (b^2 - r^2), \\ M_\vartheta(r) = \frac{p_o}{16} [b^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \end{cases} \quad (7.51)$$

Ekstremaalsed väärtused on plaadi keskel, st.,

$$r = 0 : \quad w = \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{p_o b^4}{64D}, \quad M_r = M_\vartheta = \frac{p_o(3 + \nu)}{16} b^2. \quad (7.52)$$

2. Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat.

Konstandid $C_1 = F/(8D\pi)$ ning $C_3 = 0$ ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\left\{ \begin{array}{l} w(r) = \frac{F}{8D\pi} r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_4, \\ \frac{dw(r)}{dr} = \frac{F}{8D\pi} r (2 \ln r + 1) + 2C_2 r, \\ M_r(r) = -D \left\{ \frac{F}{8D\pi} [2(1 + \nu) \ln r + (3 + \nu)] + C_2(1 + \nu) \right\}, \\ M_\vartheta(r) = -D \left\{ \frac{F}{8D\pi} [2(1 + \nu) \ln r + (1 + 3\nu)] + C_2(1 + \nu) \right\}, \\ Q_r(r) = -\frac{F}{2\pi r}. \end{array} \right. \quad (7.53)$$

a) Jäik kinnitus

Konstandid C_2 ja C_4 määratakse rajatingimustest $w = 0$ ja $dw/dx = 0$ plaadi välisservas $r = b$. Tulemus on

$$C_2 = -\frac{F(2 \ln b + 1)}{16D\pi}, \quad C_4 = \frac{Fb^2}{16D\pi}. \quad (7.54)$$

Siirded ja paindemomendid (7.53) saavad seejärel kuju

$$\left\{ \begin{array}{l} w(r) = \frac{F}{16D\pi} \left(2r^2 \ln \frac{r}{b} - r^2 + b^2 \right), \\ M_r(r) = -\frac{F}{4\pi} \left[1 + (1 + \nu) \ln \frac{r}{b} \right], \\ M_\vartheta(r) = -\frac{F}{4\pi} \left[\nu + (1 + \nu) \ln \frac{r}{b} \right]. \end{array} \right. \quad (7.55)$$

Plaadi servas $r = b$ paindemomendid

$$M_r = -\frac{F}{4\pi}, \quad M_\vartheta = -\frac{F\nu}{4\pi}, \quad (7.56)$$

vt. parempoolne joonis lk. 296 ($\nu = 0, 3$).

Läbipaine plaadi keskel on lõplik, st.

$$w = \frac{Fb^2}{16D\pi}, \quad \text{sest} \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \ln \frac{r}{b} = 0. \quad (7.57)$$

Paindemomendid ei oma aga keskel lõplikke väärtusi: kui $r \rightarrow 0$ siis $M_r \rightarrow \infty$ ja $M_\vartheta \rightarrow \infty$. Täpsemad arvutused koormuse rakenduspunkti ümbruses (3–4 plaadi paksust) paksude plaatide teooria põhjal näitavad, et pinged ületavad voolavuspiiri vaid plaadi surutud osas — koormuse rakenduspunkti ümbruses tekib lokaalne voolamine. Plaadi tõmmatud kihtides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{F}{h^2}(1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right) \quad (7.58)$$

ning neile saab vastavusse seada nn. fiktiivsed paindemomendid

$$M_r = M_\vartheta = \frac{F}{6}(1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right). \quad (7.59)$$

Vt. parempoolne joonis lk. 296, kus on toodud paindemomentide epüürid juhul $\nu = 0,3$. Ristikestega on tähistatud fiktiivsete paindemomentide

väärtused kolme erineva raadiuse–paksuse suhte b/h jaoks. Kokkuvõttes pole olukord ohtlik kuni pinged (7.58) jäävad lubatud piiridesse.

b) Vaba toetus

Rajatingimused välisserval $r = b$ on $w = M_r = 0$, kust leiame

$$C_2 = -\frac{F}{16D\pi(1 + \nu)} [2(1 + \nu) \ln b + 3 + \nu], \quad C_4 = \frac{Fb^2(3 + \nu)}{16D\pi(1 + \nu)}. \quad (7.60)$$

Siirded ja paindemomendid (7.53) saavad seejärel kuju

$$\begin{cases} w(r) = \frac{F}{16D\pi(1 + \nu)} \left[(3 + \nu)(b^2 - r^2) + 2(1 + \nu)r^2 \ln \frac{r}{b} \right], \\ M_r(r) = \frac{F(1 + \nu)}{4\pi} \ln \frac{r}{b}, \\ M_\vartheta(r) = \frac{F(1 + \nu)}{4\pi} \left(\ln \frac{r}{b} + 1 + \nu \right). \end{cases} \quad (7.61)$$

Ekstremaalne läbipaine plaadi keskel on lõplikud

$$w = \frac{Fb^2(3 + \nu)}{16D\pi(1 + \nu)}. \quad (7.62)$$

Paindemomendid, aga on avaldiste (7.62) põhjal plaadi keskel lõpmata suured. Analoogiliselt jäiga kinnitusega näitab ka siin täpsem uuring, et koormuse rakenduspunkti lähedal tekib lokaalne plastne tsoon kuid plaadi tõmmatud kihtides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_{\vartheta} = \frac{F}{h^2} \left[(1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right) + 0,48 \right]. \quad (7.63)$$

Ka sel juhul pole olukord ohtlik kuni pinged (7.63) jäävad lubatud piiridesse.

3. Rõngasplaat

a) Jäiga südamikuga ümarplaat.

Vaatleme vabalt toetatud astmelist ümarplaati, mille keskmise osa jäikus on suur võrreldes välise osaga (vt. joonis a) lk. 297). Seetõttu käitub väline, st. väikese jäikusega osa kui rõngasplaat. Plaadile mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega p_o . Lihtsuse mõttes eeldame, et sisemise osa raadius $a = 0,4b$ ja $\nu = 0$. Lisaks toome sisse nn. dimensioonita raadiuse $\rho = r/b$.

Rajatingimused:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{välisserv, } \rho = 1 : \left\{ \begin{array}{l} w = 0, \\ M_r = 0; \end{array} \right. \\ \text{siseserv, } \rho = 0,4 : \left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dr} = 0, \\ Q = -0,2bp_o, \quad \text{sest } |Q \cdot 2\pi a| = |\pi a^2 p_o|. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (7.64)$$

Kasutades viimaseid koos avaldistega (7.38) ja (7.39) saame määrata konstandid C_1, \dots, C_4 . Saadud konstantide asendamisel võrrandiesse (7.38) ja (7.39) saame siirete ja sisejõudude avaldised välise osa jaoks:

$$\begin{cases} w = p_o b^4 (1,562\rho^4 - 8,151\rho^2 + 2,448 \ln \rho + 6,589,) / 100D \\ \frac{dw}{dr} = p_o b^3 (6,250\rho^3 - 16,302\rho + 2,448/\rho) / 100D, \\ M_r = p_o b^2 (-18,750\rho^2 + 2,448/\rho^2 + 16,302) / 100, \\ M_\vartheta = p_o b^2 (-6,250\rho^2 - 2,448/\rho^2 + 16,302) / 100, \\ Q = -0,500p_o b \rho. \end{cases} \quad (7.65)$$

Plaadi keskmine, st. jäigem osa, arvutatakse vastavalt ümarplaadi valemitele. Siirete ja sisejõudude epüürid on toodud joonistel lk. 297. Vasakpoolne alumine joonis esitab läbipainde epüüri ja parempoolsed sisejõudusid. Kriipsjoonega on esitatud ühtlase paksusega plaadi siirete ja sisejõudude epüürid. On näha, et keskmise osa jäikuse suurendamine vähendab küll läbipaindeid, kui samas suurendab paindemomente nii jäigastatud kui jäigastamata osas. Kuna sellega kaasneb ka pingete kasv, siis ei saa sellist tüüpi konstruktsiooni lugeda heaks.

Kui plaadi keskmise osa jäikus pole suur võrreldes äärmise osaga, siis on arvutus keerulisem, sest plaati tuleb vaadelda kui tervikut, võttes arvesse paksuse hüppelist muutust. Tuleb koostada siirete avaldised plaadi mõlema osa jaoks. Need avaldised sisaldavad 8 konstanti, millest kaks keskmisele osale vastavat on nullid. Ülejäänud 6 määratakse rajatingimustest välisserval, st. $\rho = 1$ on $w = M_r = 0$ ja pidevustingimustest siirete w ja sisejõudude Q, M_r ning M_ϑ jaoks kohal $r = a$.

b) Välisservast jäigalt kinnitatud ja siseservast vaba rõngasplaat.

Jäigalt kinnitatud välisservas $r = b$ peavad $w = 0$ ja $dw/dr = 0$. Vabas siseservas $r = a$ aga $M_r = 0$ ja $Q = 0$. Kasutades selliseid rajatingimusi saame avaldistest (7.38) ja (7.39) neli võrrandit konstantide C_1, \dots, C_4 määramiseks.

Kui konstandid on leitud saame omakorda leida siirete ja sisejõudude avaldised, milledest siinkohal esitame vaid siirete oma:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \frac{p_0 a^4}{64D} [-1 + 2(1 - k - 2\beta^2)(1 - \rho^2) + \rho^4 - 4k \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho], \\ \rho = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \\ k = \frac{(1 - \nu)\beta^2 + (1 + \nu)(1 + 4\beta^2 \ln \beta)}{(1 - \nu) + (1 + \nu)\beta^2} \beta^2. \end{array} \right. \quad (7.66)$$

Kokkuvõte. Rõngasplaatide korral on võimalikud väga mitmed jäiga kinnituse, vaba toetuse ja vaba serva kombinatsioonid. Kõigi nende puhul tuleb lähtudes avaldistest (7.38) ja (7.39) ning konkreetsetest rajatingimustest (7.43)–(7.45) koostada võrrandisüsteem konstantide C_1, \dots, C_4 määramiseks. Seejärel saadakse siirete ja sisejõudude avaldised.

Peatükk 8

Plaatide stabiilsus

8.1 Sissejuhatus

Vaatleme plaati, millele mõjuv koormus on plaadi tasandis.

- Koormus suhteliselt väike
 - tasandülesanne — plaat jääb tasapinnaliseks

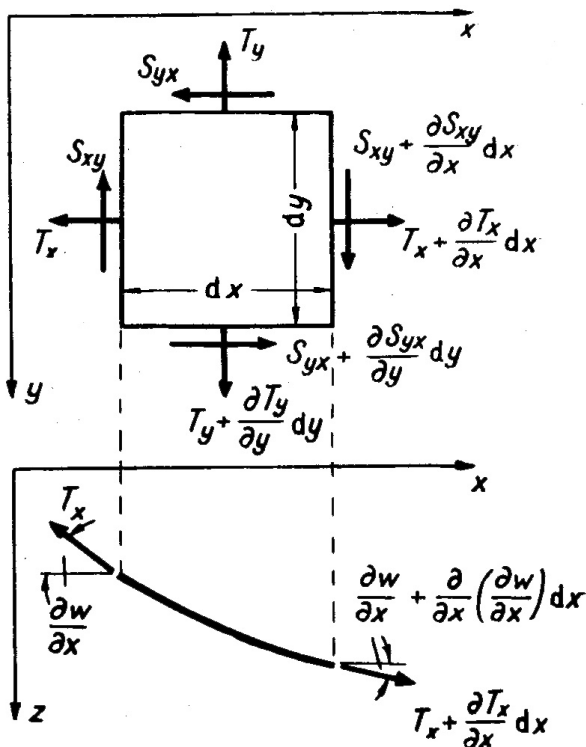
- Koormus ületab kriitilise piiri
 - Mõlgid (mõlkumine) — stabiilsuse kadu
 - Analoogia tala stabiilsuse kaoga — tala nõtkes
 - Erinevus talast — stabiilsuse kadumisega koos ei pruugi kaduda plaadi kandevõime — painduvate plaatide teooria.

Vt. lisaks R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967 lk. 469–488.

8.2 Kriitilise koormuse määramine staatilise tasakaalu meetodil

Idee:

- Plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrandisse (EPDV) tuleb lisada liikmed, mis vastavad plaadi tasandis mõjuvatele jõududele.
- Tuleb leida plaadi läbipainde avaldis, mis rahuldaks nii EPDV-t kui rajatingimusi.



Joonis 8.1: Plaadi element $dx - dy - h$ ja talle mõjuvad jõud

Seni oleme EPDV tuletamisel arvesse võtnud vaid sisejõudusid (paine- ja väändemomente ning põikjõudu), mis on põhjustatud plaadile mõjuvast põikkoormusest. Hüljatud on olnud plaadi tasandis mõjuvad piki- ja nihkejõud ehk aheljõud. Stabiilsuse (ja suurte läbipainete) uurimisel tuleb aga needki arvesse võtta.

Vaatleme plaadi elementi $dx - dy - h$, millele mõjuvad pikijõud T_x ja T_y ning nihkejõud (tangentsiaaljõud) $S_{xy} = S_{yx}$ (vt. joonis 8.1). Vastavad aheltinged^a $\sigma_x = T_x/h$, $\sigma_y = T_y/h$ ja $\tau_{xy} = S_{xy}/h$.

^aNB! nagu teistelgi sisejõududel on aheljõudude dimensioon N/m

Staatilise tasakaalu korral peavad vaadeldavale elemendile mõjuvate summaarsete jõudude projektsioonid koordinaattelgedel olema nullid. Eeldame, nagu eespoolgi, et pöörded on väikesed ja seega $\cos \alpha \sim 1$ ning $\sin \alpha \sim \tan \alpha \sim \alpha$. Kuna x - ja y -telgede sihis mõjuvad vaid sisejõud siis saavad tasakaaluvõrrandid kuju

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0. \quad (8.1)$$

Projekteerides jõud T_x , T_y ja $S_{xy} = S_{yx}$ z -teljele saame nn. täiendava jõu, mis tuleb lisada plaadi EPDV-sse (6.10):

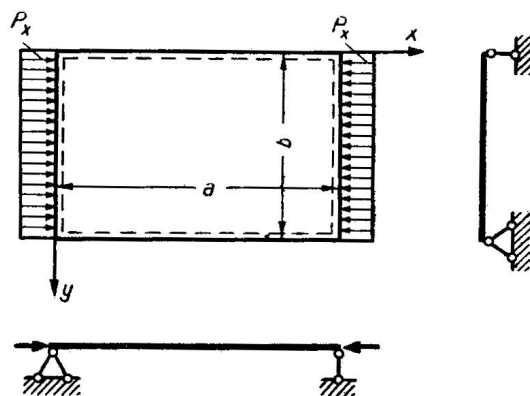
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(p(x, y) + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (8.2)$$

Valides põikkoormuse $p = 0$, saamegi võrrandi kriitilise koormuse leidmiseks:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8.3)$$

8.2.1 Ristkülikplaadi kriitilise koormuse leidmine

Jäigale kontuurile toetuv ühes sihis surutud plaat (joon. 8.2).



Joonis 8.2: Jäigale kontuurile toetuv ristkülikplaat.

- Koormus P_x on rakendatud plaadi servadel $x = 0$ ja $x = a$.
 - $T_x = -P_x$, $T_y = S_{xy} = 0$
 - Kriitilise koormuse määramise võrrand (8.3) lihtsustub

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (8.4)$$

- Lahendit otsime analoogiliselt Navier' meetodiga kujul

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.5)$$

- (8.5) \rightarrow (8.4)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - P_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (8.6)$$

- (8.6) peab kehtima iga x puhul \Rightarrow üksikud sõltumatud võrrandid

$$P_x = \pi^2 D \frac{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2}{m^2/a^2}. \quad (8.7)$$

- Fikseeritud m korral omab P_x minimaalset väärtust $n = 1$ korral.

- Fikseeritud n korral sõltub minimaalset P_x tagav m väärtus suhtest a/b .

- $n = 1 \rightarrow$ (8.7) \Rightarrow

$$P_x = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2. \quad (8.8)$$

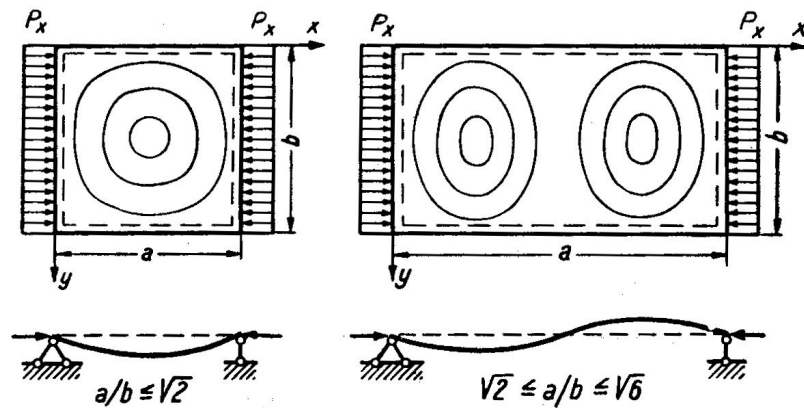
P_x miinimumile vastab

$$\frac{d}{dm} \left(m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right) = 1 - \frac{1}{m^2} \frac{a^2}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a}{b}. \quad (8.9)$$

- Kuna poollainete arv m saab olla vaid täisarv, kuid küljepikkuste suhe a/b ei pruugi olla täisarv, siis pole tulemus otseselt rakendatav.

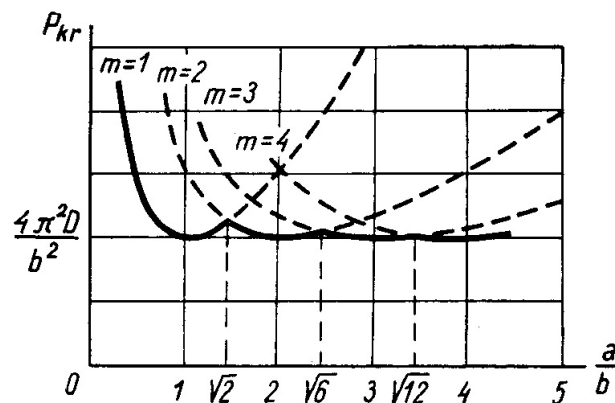
- Leiame millise a/b väärtuse korral annavad m ja $m + 1$ poollainet sama kriitilise koormuse P_{kr} : $m \ \& \ m + 1 \rightarrow$ (8.8) \Rightarrow

$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m+1)} \quad (8.10)$$



Joonis 8.3: Ühe ja kahe poollainega mõlkumiskujud.

- Teisisõnu, piir ühe ja kahe poollaine vahel on $a/b = \sqrt{2}$, kahe ja kolme vahel $a/b = \sqrt{6}$, kolme ja nelja vahel $a/b = \sqrt{12}$ jne. (vt. joonised 8.3 ja 8.4).
- Üksikud kõverad joonisel 8.4 vastavad poollainete arvule $m = 1, 2, 3, \dots$. On selge, et kriitiline koormus P_{kr} omab minimaalset väärtust $4\pi^2 D/b^2$ juhul kui a/b on täisarv. Viimase joonise põhjal on selge, et juhtude $a/b \geq 1$ korral (koormus mõjub pikema külje sihis) sobib kriitiliseks

Joonis 8.4: Kriitiline koormus sõltuvana suhtest a/b .

koormuseks see sama minimaalne väärtus

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}. \quad (8.11)$$

- Juhtudel kui $a/b < 1$ (koormus mõjub lühema külje sihis) on $m = n = 1$ ja valemist (8.8) saame

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \quad (8.12)$$

- Kui $a/b \ll 1$, siis saab viimane kuju

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2}. \quad (8.13)$$

Kriitilise pinge leidmiseks jagatakse kriitiline koormus plaadi paksusega h :

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{h}. \quad (8.14)$$

Arvestades, et $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ saame pikemate külgede sihis surutud plaadi ($a/b > 1$) jaoks

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{3(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (8.15)$$

ja lühemate külgede sihis surutud plaati ($a/b < 1$) jaoks

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \quad (8.16)$$

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	3
1.1 Elastsusõpetus	4
1.2 Mehaanika harud	6
1.2.1 Jäiga keha mehaanika	7
1.2.2 Pideva keskkonna mehaanika	8
1.2.3 Tehniline mehaanika	9

1.3	Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest	10
1.4	Elastsusõpetuse ülesanded	50
1.5	Klassikalise elastsusteooria põhieeldused ja põhihüpoteesid . .	51
2	Pinge	54
2.1	Jõu ja pinged	55
2.2	Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid	60
2.3	Pinged kaldpinnal, rajatingimused keha pinnal	66
2.4	Peapinged, pinge invariantid	68
2.5	Pingetensor	73
3	Deformatsioon	76
3.1	Siire ja deformatsioon	77
3.1.1	Cauchy seosed	77

3.1.2	Orienteeritud lõigu pikenemine	83
3.2	Deformatsioonitensor	87
3.3	Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus	88
3.4	Pidevustingimused	89
3.5	Üldistatud Hooke'i seadus	94
3.5.1	Deformatsioonide avaldamine pingete kaudu	94
3.5.2	Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu	97
3.6	Elastsusjõu töö ja deformatsiooni potentsiaalne energia	100
4	Elastsusteooria põhivõrrandid, nende lahendusmeetodid ja lihtsamad ruumilised ülesanded	105
4.1	Elastsusteooria põhivõrrandid	106
4.2	Elastsusteooria ülesannete lahendusmeetodid	110
4.2.1	Elastsusteooria ülesannete lahendamine siiretes	111

4.2.2	Elastsusteooria ülesande lahendamine pingetes	114
4.3	Lihtsamad ruumilised ülesanded	118
4.3.1	Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne	119
4.3.2	Prismaatiliste varraste puhas paine	124
4.3.3	Paadi puhas paine	128
4.3.4	Varda tõmme omakaalu mõjul	131
4.3.5	Ülesanded	134
5	Elastsusteooria tasandülesanne	136
5.1	Tasandülesande mõiste	137
5.2	Tasanddeformatsioon	138
5.3	Tasandpingus	142
5.4	Tasandülesande lahendamine pingetes	143
5.5	Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides	148
5.6	Konsooli paine	157

5.7	Ühtlaselt koormatud tala paine	176
5.8	Hüdrostaatilisel koormatud tugiseina arvutus.	183
5.9	Hüdrostaatilisel koormatud vertikaalne konsool	189
5.10	Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides	191
5.10.1	Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon	191
5.10.2	Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides . . .	193
5.11	Kõvera tala paine	194
5.12	Pöörlev ketas	197
5.13	Radiaalne pingus.	201
5.14	Kiilu surve.	202
5.15	Koondatud jõu mõju pooltasandile	205
6	Õhukeste plaatide paine	211
6.1	Plaatide paindeteooria põhimõisted ja hüpoteesid	211

6.2	Plaadi läbipainde ja plaadi punktide siirete ning deformatsioonide vahelised seosed	217
6.3	Plaadi elastse pinna võrrand	219
6.4	Sisejõud	223
6.4.1	Toereaktsioonid	225
6.5	Ääritingimused	227
6.6	Ühtlaselt koormatud plaatide lihtsamad paindeülesanded . . .	231
6.6.1	Silindriline paine	231
6.6.2	Ühtlaselt koormatud jäigalt kinnitatud elliptiline plaat	233
6.7	Elastse pinna võrrandi lahendamine ristkülikulise plaadi korral	237
6.7.1	Navier' meetod — lahendus kahekordsetes trigonomeetrilistes ridades	237
6.7.2	Võrgumeetod ehk lõplike vahede meetod	255
7	Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades	275
7.1	Üldvõrrandid	276

7.2	Ümarplaadi paine	284
7.3	Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand. . .	289
7.4	Näiteid ümar- ja rõngasplaatide paindeülesannetest.	298
8	Plaatide stabiilsus	311
8.1	Sissejuhatus	311
8.2	Kriitilise koormuse määramine staatilise tasakaalu meetodil . .	312
8.2.1	Ristkülikplaadi kriitilise koormuse leidmine	315