

## 1.4 Elastsusõpetuse ülesanded

*Elastsusõpetuse põhiülesandeks* on elastses kehas välismõjude toimel tekkivate pingete ja deformatsioonide määramine.

- Elastsusõpetuse meetodid
  - võimaldavad lahendada ülesandeid, mida pole tugevusõpetuse meetoditega võimalik lahendada;
  - võimaldavad hinnata tugevusõpetuses saadud lahendite täpsust.
- Käesolevas kursuses vaadeldakse
  - välismõjudena vaid välisjõudusid;
  - lineaarset ehk klassikalist elastsusõpetust (elastsusteooriat).
    - \* pingete ja deformatsioonide vahelised seosed on lineaarsed ✓
    - \* siirded (ehk paigutised) on väikesed võrreldes kehade joonmõõtmetega ning suhtelised deformatsioonid (suhtelised pikenemised ja nihkenurgad) on väikesed võrreldes ühega.

## 1.5 Klassikalise elastsusteooria põhieeldused ja põhihüpoteesid

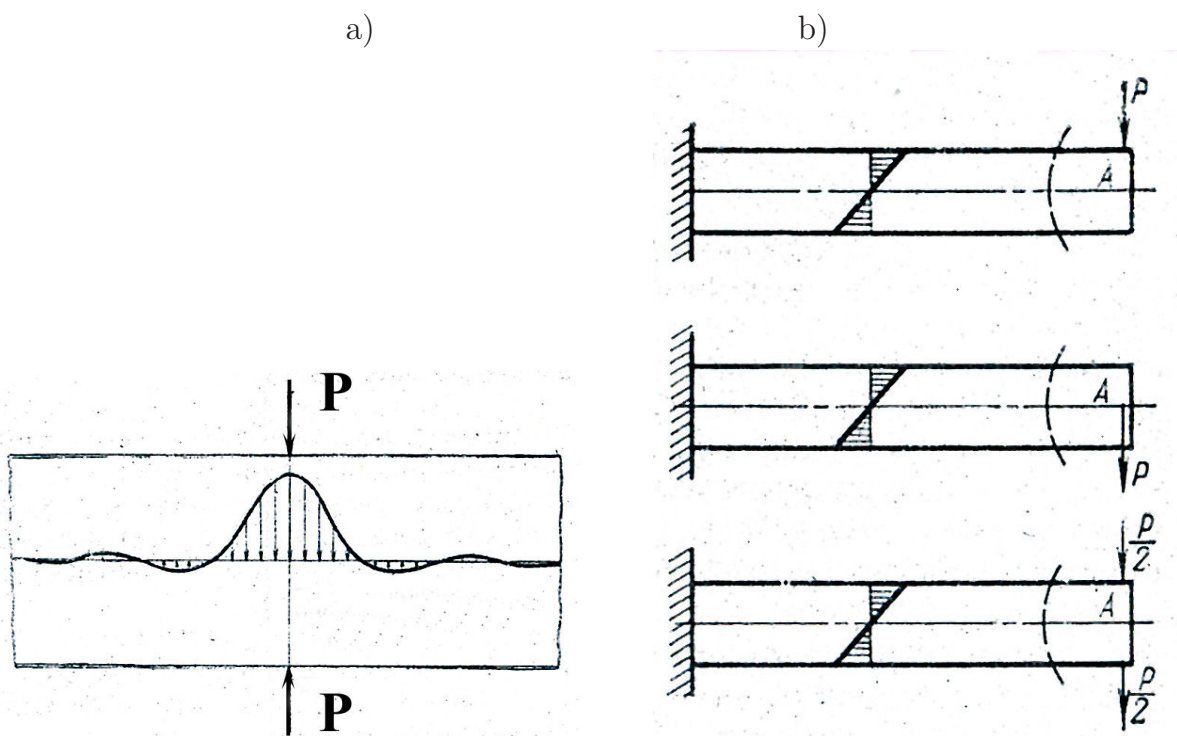
Uurimisobjekt: ideaalselt (täielikult) elastne keha.

- *Ideaalselt elastne keha* taastab täielikult oma algse kuju ja mahu pärast välisjõudude mõju kõrvaldamist.
  - Defineeritakse nn. *algolek*: välisjõudude puudumisel puuduvad kehas pinged ja deformatsioonid.

Hüpoteesid ja eeldused

- *Pidevuse hüpotees*: eeldame, et uuritavad tahked kehad koosnevad ainek, mis täidab ruumi pidevalt
  - Keha mistahes mahus puuduvad tühimikud või katkevused.
- Eeldatakse, et ideaalselt elastne keha on *homogeenne*.
  - Pinge–deformatsiooni seosed on kõigis keha punktides samad.

- Eeldatakse, et ideaalselt elastne keha on *isotroopne*.
  - Keha elastsed omadused on samad kõigis suundades.
- *Superpositsiooni printsiip* ehk *jõudude mõju sõltumatus printsiip*.
  - Lineaarne teooria: lineaarsed seosed ja väikesed deformatsioonid
    - \* Selle asemel, et uurida jõusüsteemi tervikmõju kehale võib uurida iga üksikjõu mõju eraldi ja tulemused liita. Teisisõnu, lineaarses elastsusteoorias loetakse erinevate lahendite summa alati lahendiks.
- *Saint Venant'i printsiip*. Kaks sõnastust:
  1. Tasakaalus olevate jõudude rakendamine mingil väikesel keha osal kutsub esile vaid lokaalseid pingeid rakenduskoha lähiümbruses (Joon. 1.33).
  2. Koormuse rakenduspunktist piisavalt kaugel ei sõltu pinged oluliselt koormuse rakendusviisist, st. jaotusest keha pinnal .



Joonis 1.33: Saint Venant'i printsiip: a) kahe taskaalus olava jõu poolt põhjustatud normaalpingete epiüür; b) kolm erineval jaotunud koormust, millel on sama peavektor.

# Peatükk 2

## Pinge

---

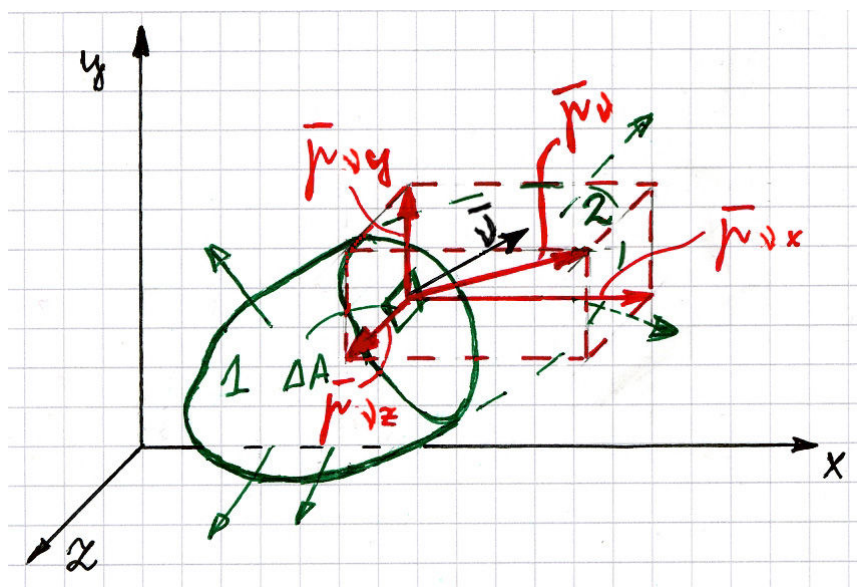
### 2.1. Jõu ja pinged

## 2.1 Jõu ja pinged

Kehale mõjuvad välisjõud saab jagada kahte rühma.

1. *Pindjõud ehk kontaktjõud* on põhjustatud keha kontaktist teiste kehade või keskkondadega. Näiteks survejõud, mis mõjuvad vette asetatud kehale või vundamendi surve pinnasele jne.
    - Pindjõu dimensioon:  $1\text{N}/\text{m}^2$
    - Kui pind, millel jõud mõjub on väike võrreldes keha mõõtemetega (keha välispinnaga), siis võib sellist jõudu lugeda koondatud jõuks, st. summaarne jõud loetakse rakendatuks ühte punkti.
  2. *Mahujõud ehk ruumjõud* mõjuvad igale keha punktile. Näiteks gravitatsioonijõud (keha kaal) või elektromagnetilised jõud või inertsjõud.
    - Mahujõu dimensioon:  $1\text{N}/\text{m}^3$
    - Mõnedes õpikutes käsitletakse mahujõu asemel massjõudu. Vastav dimensioon  $1\text{N}/\text{kg}$
-

Vaatleme meelevaldse kujuga keha, millele mõjuv pind- ja mahujõududest koosnev (välis)jõudude süsteem on tasakaalus. Rakendame lõikemeetodit: jagame keha mõtteliselt kaheks osaks 1 ja 2; hülgame osa 2 ja vaatleme osa 1 (joon. 2.1).

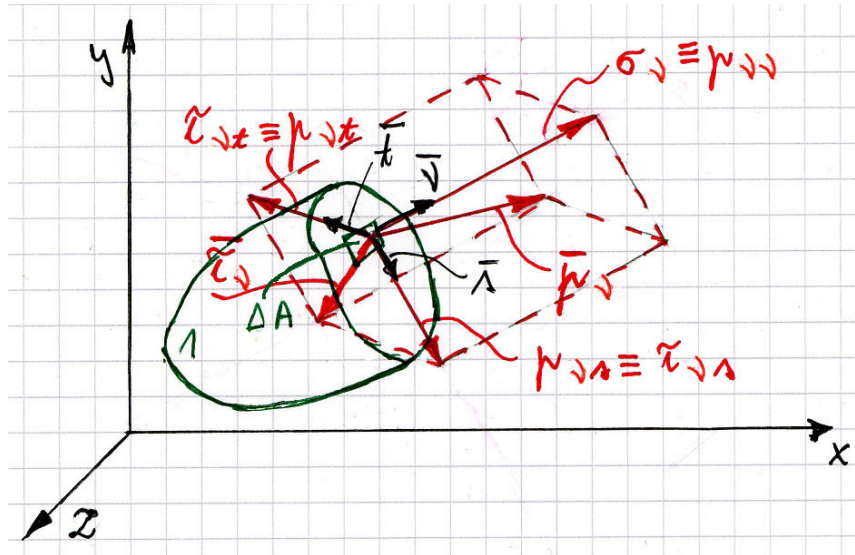


Joonis 2.1: Pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  koordinaattelgede  $xyz$  suunalised komponendid.

- Selleks, et osa 1 oleks ka peale osa 2 eraldamist tasakaalus tuleb lõikepinnale rakendada osa 2 asendavad jõud, st. sisejõud, mis on jaotunud üle kogu lõikepinna.
- Lõikepind osal 1 on määratud välisnormaaliga  $\boldsymbol{\nu}$ . Mõjugu väikesel pinnal  $\Delta A$  sisejõud  $\Delta S$ . Suhet  $\Delta S/\Delta A$  võib nimetada keskmiseks pingeks pinnal  $\Delta A$ .
- Kui minna piirile  $\Delta A \rightarrow 0$ , saame (tegeliku) *pinge pinnal normaaliga  $\boldsymbol{\nu}$*

$$\mathbf{p}_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta A}. \quad (2.1)$$

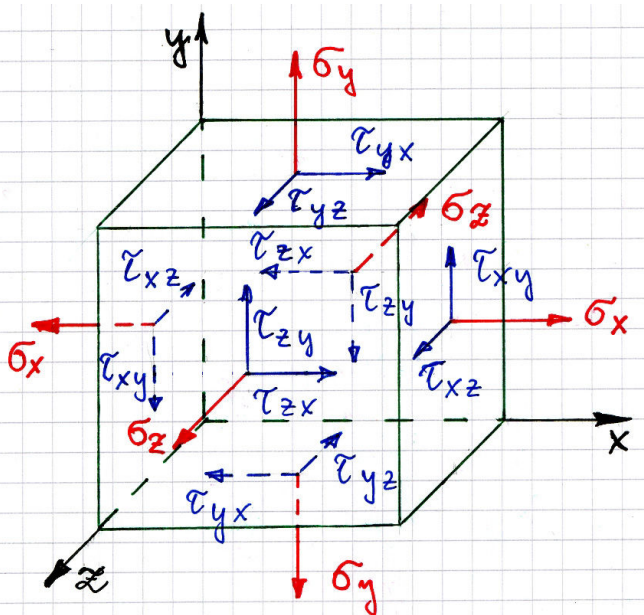
- Üldjuhul vektorite  $\boldsymbol{\nu}$  ja  $\mathbf{p}$  suunad ei ühti.
- Edaspidi on tihti otstarbekas kasutada pingevektori asemel tema projektsioone koordinaattelgedel  $p_{\nu x}$ ,  $p_{\nu y}$ ,  $p_{\nu z}$ , mis omakorda määravad ära pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  koordinaattelgede  $xyz$  sihilised komponendid (vt. joon. 2.1). Siin ja edaspidi märgib esimene indeks pinnanormaali sihti ja teine pingevektori komponendi mõjumise sihti.



Joonis 2.2: Pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  lahutamine normaal- ja nihkepingeks.

- Teisest küljest saab pinnal normaaliga  $\nu$  mõjuva pingevektori lahutada *normaal- ja nihkepingeks*:  $\mathbf{p}_\nu = \sigma_\nu + \tau_\nu$ . Nihkepinge  $\tau_\nu$  lahutatakse tavaliselt veelkord kaheks komponendiks:  $\tau_\nu = \tau_{\nu s} + \tau_{\nu t}$  (vt. joon. 2.2, kus  $\mathbf{p}_{\nu n} \equiv \sigma_\nu$ ,  $\mathbf{p}_{\nu s} \equiv \tau_{\nu s}$  ja  $\mathbf{p}_{\nu t} \equiv \tau_{\nu t}$ ).

Kui lõike pind on paralleelne koordinaattasanditega, siis kasutatakse indeksi  $\nu$  asemel lõikepinnale normaaliks oleva koordinaattelje nime, näiteks  $x$ .

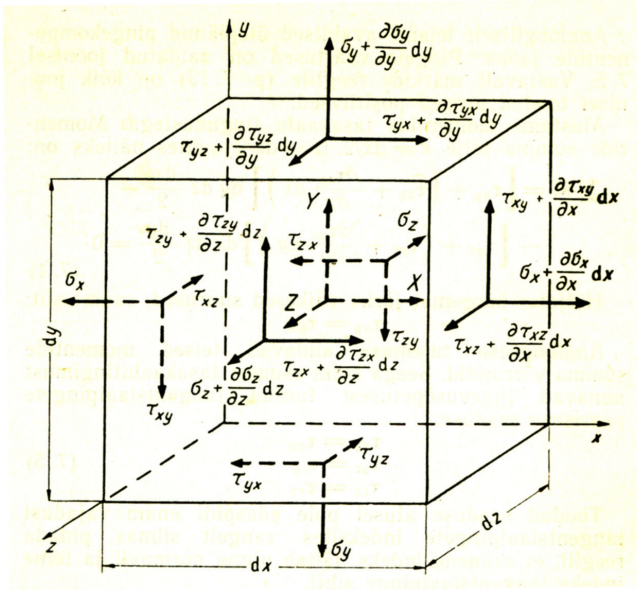


Joonis 2.3: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.

Märgireeglid: joonis 2.3.

- *Positiivne sisepind* on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

## 2.2 Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid



Joonis 2.4: Elementaarristtahukas

Tahkes kehas välisjõudude toimel ilmnevad pinged pole üldjuhul konstantsed, vaid võivad omada igas keha punktis erinevaid väärtusi:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x, y, z), & \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z), \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z), & \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z), \dots\end{aligned}\quad (2.2)$$

Vaatleme välisjõudude mõju all tasakaalus olevast kehas välja lõigatud elementaarristtahukat (joon. 2.4). Igal risttahuka tahul mõjub 3 pingekomponenti  $\Rightarrow$  kokku 18 pingekomponenti.

Olgu punktis koordinaatidega  $x, y, z$  normaalpinge väärtus  $\sigma_x(x, y, z)$ . Kasutades Taylori rittaarendust (säilitades seejuures vaid esimest järku väikesed suurused) võime kirjutada

$$\begin{aligned}\sigma_x(x + dx, y + dy, z + dz) &= \sigma_x(x, y, z) + \\ &\quad \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial z} dz.\end{aligned}\quad (2.3)$$

- Viimase avaldise (2.3) põhjal  $\sigma_x(x + dx, y, z) = \sigma_x(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dx$ .
- Teiste pingekomponentide jaoks saab tuletada analoogilised valemid.
- Kehale mõjuvate mahujõudude projektsioonid tähistame  $X, Y, Z$  (NB! mahujõu dimensioon on  $1 \text{ N/m}^3$ ).

Keha on tasakaalus  $\Rightarrow$  peab ka elementaarristtahukas olema tasakaalus. Leiame jõudude projektsioonid  $x$  teljel ja võrrutame saadu nulliga:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ & \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Avame sulud ja jagame saadud võrrandi elementaarruumalaga  $dV = dx dy dz$ :

$$\frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\tau_{zx}}{dz} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\tau_{zx}}{dz} + X = 0.$$

Peale koondamist saame ühe otsitavatest võrranditest

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (2.5)$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks tasakaaluvõrrandit kasutades jõudude

projektsioone  $y$  ja  $z$  teljel:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Saadud võrrandid ongi *elastse keha tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid*. Kui † mahujõudude projektsioonid sisaldavad inertsjõudusid, saab viimste abil lahendada ka dünaamika ülesandeid. √

Järgnevalt leiame momendid ristahuka keskpunkti läbiva  $x$  telje suhtes ja võrrutame tulemuse nulliga:

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \\ & \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

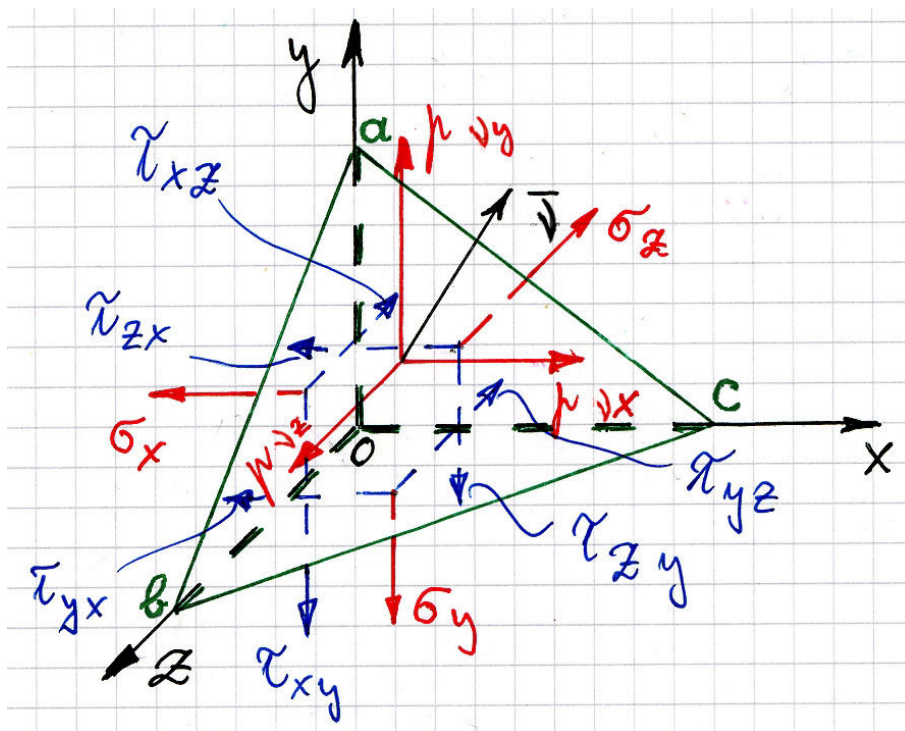
Avame sulud:

$$\tau_{yz} dx dy dz - \tau_{zy} dx dy dz + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dz \frac{dy^2}{2} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy \frac{dz^2}{2}}_{\text{kõrgemat järku väikesed liikmed } \approx 0} = 0. \quad (2.8)$$

Pärast kõrgemat järku väikeste liikmete hülgamist saame  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , mis on tuntud *nihkepingete paarsuse seadusena*. Leides analoogiliselt momendid  $y$  ja  $z$  telje suhtes saame kokkuvõttes

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.9)$$

Tänu nihkepingete paarsusele väheneb tundmatute pingekomponentide arv üheksalt kuuele. Nende määramiseks on meil aga ainult kolm tasakaaluvõrrandit. Seega on tegu staatiliselt määramata ülesandega ja me vajame lisavõrrandeid, mis võtaks arvesse materjali füüsikalisi omadusi.



Joonis 2.5: Pinged kaldpinnal



## 2.3 Pinged kaldpinnal, rajatingimused keha pinnal

Selleks, et uurida pingeseisundit suvalises keha punktis on vaja osata leida pingeid meelevaldse orientatsiooniga kaldpinnal. Joonisel 2.5 kujutatud kaldpinna  $abc$  orientatsioon koordinaattelgede suhtes on määratud pinnanormaali  $\boldsymbol{\nu}$  suunakoosinustega

$$l = \cos(\boldsymbol{\nu}, x), \quad m = \cos(\boldsymbol{\nu}, y), \quad n = \cos(\boldsymbol{\nu}, z). \quad (2.10)$$

Koos koordinaatpindadega moodustub tetraeeder  $Oabc$ . Tähistame kaldpinna  $abc$  pindala  $dA$ . Teiste külgede pindalad avalduvad nüüd läbi vektori  $\boldsymbol{\nu}$  suunakoosinuste:

$$A_{Oab} = dA \cdot l, \quad A_{Obc} = dA \cdot m, \quad A_{Oac} = dA \cdot n. \quad (2.11)$$

Koostame tetraeedri jaoks tasakaalu võrrandid. Peale joonisel 2.5 näidatud pingete mõjuvad tetraeedrile veel mahujõud  $X, Y, Z$ , mida pole joonisel näidatud. Projekteerime summaarsed jõud  $x$  teljele:

$$\begin{aligned} p_{\nu x} dA - \sigma_x A_{Oab} - \tau_{yx} A_{Obc} - \tau_{zx} A_{Oac} - X dV = \\ p_{\nu x} dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{yx} dA \cdot m - \tau_{zx} dA \cdot n - X dV = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Jagame viimase avaldise pindalaga  $dA$ , hülgame viimase liikme kui kõrgemat järku väikese<sup>1</sup> ja saame avaldise

$$p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n. \quad (2.13)$$

Korrates sama protseduuri teiste telgedega saame avaldised ka ülejäänud kahe projektsiooni leidmiseks. Kokku

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (2.14)$$

Valemid (2.14) võimaldavad leida mistahes kaldpinnal mõjuva pingevektori  $\mathbf{p}_{\nu}$  komponente kui on teada pinnanormaal  $\boldsymbol{\nu}$  ja pingekomponendid koordinaatpindadel  $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$

Kui pind  $abc$  ühtib keha välispinnaga, siis esitavad võrrandid (2.14) *rajatingimusi (ääretingimusi) keha pinnal*.

<sup>1</sup> $\lim_{dA \rightarrow 0} (dV/dA) = 0$

## 2.4 Peapinged, pinge invariandid

Kuna vaadeldav tetraeeder on lõpmata väike, siis tegelikult võimaldavad valemid (2.14) määrata pingeid keha mistahes punkti läbival mistahes kaldpinnal kui on teada pinnanormaal  $\nu$  ja pinged (pingekomponendid) seda punkti läbivatel koordinaattasanditel  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ .

Pinnal normaaliga  $\nu$  mõjuva pinge saab omakorda jagada normaalpingeks  $\sigma_\nu$  ja nihkepingeks  $\tau_\nu$ . Kui on teada pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  komponendid ja normaali  $\nu$  suunakoosinused, siis saame leida

$$\sigma_\nu = p_{\nu x}l + p_{\nu y}m + p_{\nu z}n. \quad (2.15)$$

Kasutades valemeid (2.14) saab  $\sigma_\nu$  omakorda avaldada koordinaattasandeil mõjuvate pingete kaudu. Nihkepinge  $\tau_\nu$  kujutab endast pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  projektsiooni vaadeldaval pinnal ja tema moodul

$$\tau_\nu^2 = p_\nu^2 - \sigma_\nu^2. \quad (2.16)$$

On selge, et nii  $\mathbf{p}_\nu$  kui  $\sigma_\nu$  ja  $\tau_\nu$  sõltuvad pinna orientatsioonist. Saab näidata, et igas punktis leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat pinda, millel  $\tau_\nu = 0$  ja  $\sigma_\nu = p_\nu$ . Sellistel pindadel mõjuvaid normaalpingeid nimetatakse *peapingeteks* ja vastavaid kaldpindu määravaid pinnanormaale *peasuundadeks*.

**Peapingete ja peasuundede leidmise protseduur.**

- Tähistame otsitava peapinge  $\sigma$  ja talle vastava pinnanormaali suunakoosinused  $l, m, n$ .
- Nende nelja tundmatu määramiseks on võrrandsüsteem

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

koos lisatingimusega

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (2.18) \quad *$$

- Meid huvitab selle VS-i mittetriviaalne lahend ( $l, m, n$  pole korraga nullid). See tingimus on täidetud kui karakteristlik determinant

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

- Viimasest saadakse omakorda karakteristlik võrrand

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (2.20)$$

kus suuruseid

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{cases} \quad (2.21)$$

nimetatakse *pinge invariantideks*<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Täpsemalt öeldes nimetatakse neid pingetensori invariantideks. Tensori mõiste juurde tuleme õige pea.

---

- Uuritaval juhul on kuupvõrrandil (2.20) kolm reaalarvulist lahendit, mis järjestatakse kahanevas järjekorras  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .
- Neile vastava kolme peasuuna määramiseks asendatakse saadud kolm peapinget võrrandisüsteemi (2.19), (2.20).
  - Tulemusena saadakse seega kolm peapinget ja kolm peasuunda, mille suunakoosinusi tähistatakse  $l_i, m_i, n_i, i = 1, 2, 3$ .
  - Kui kõik kolm peapinget on võrdsed, siis sobib peapinnaks iga vaadeldavat punkti läbiv pind.
  - Kui kaks peapinget on võrdsed ja kolmas neist erinev, siis saame leida sellele kolmandale peapingele vastava peasuuna (mis omakorda määrab peapinna). Ülejäänud kaheks peasuunaks sobib mistahes ristuvate suunade paar, mis on omakorda risti kolmanda peasuunaga.

- Kasutades peapingeid saame pinge invariandid kujul

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \\ I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \quad (2.22)$$

- Pinge invariandid on sõltumatud koordinaatide  $xyz$  valikust.
- Kuna invariandid on sõltumatud koordinaatide valikust, tuleb neid vaadelda kui põhilisi suurusi, mis iseloomustavad pinget vaadeldavas punktis — kõik pingekomponendid on määratavad läbi invariantide.

## 2.5 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaatissandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ja kuus nihkepinget  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$  moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada  $3 \times 3$  (tasandülesannete korral  $2 \times 2$ ) tabelina nagu maatrikseid. Pingetensor iseloomustab täielikult pigust (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingevektori suvalisel seda punkti läbival pinnal (vt. valemid (2.14)).

Käesolevas kursuses vaatleme kolme liiki füüsikalisi suurusi:

1. skalaar — pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus (näit. mass, tihedus, temperatuur);

2. vektor — teda iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund (näit. jõud, pinnanõrmaal, kiirus, siire jne.);
  3. tensor — teda iseloomustab lisaks moodulile kaks suunda: (i) pinnanormaali suund ja (ii) pingekomponendi suund (näit. pinge ja deformatsioon).
- Vektoreid võib nimetada esimest järku tensoreiks ja skalaare nullindat järku tensoreiks.

### Maatriksite ja tensorite omavaheline suhe

- Kui on fikseeritud kordinaatsüsteem, siis saab iga teist järku tensori esitada  $3 \times 3$  maatriksina ja iga vektori arvukolmikuna.
- Vastupidine aga ei kehti — iga  $3 \times 3$  maatriks ei osutu tensoriks.
- Koordinaatide teisendamisel teisenevad nii tensori kui vektori komponendid kindlate reeglite alusel.

- Pärast koordinaatteisendust peab tensor (vektor) esitama endiselt täpselt sama füüsikalist suurust, mida enne teisendust.
  - \* Kui see nii on, siis ongi tegu tensoriga, vastupidisel juhul mitte.
  - \* Vastupidine olukord on füüsikaliselt vastuvõtmatu. Pole võimalik, et pinge keha punktis või punkti siire või kiirus sõltuks kordinaatsüsteemi valikust.

**Ülesanne 1.** Leida pingetensori

$$\begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix}$$

peapinged ja peasuunad.

# Sisukord

<b>Eessõna</b>	<b>1</b>
<b>1 Sissejuhatus</b>	<b>3</b>
1.1 Elastsusõpetus . . . . .	4
1.2 Mehaanika harud . . . . .	6
1.2.1 Jäiga keha mehaanika . . . . .	7
1.2.2 Pideva keskkonna mehaanika . . . . .	8
1.2.3 Tehniline mehaanika . . . . .	9

---

1.3 Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest . . . . .	10
1.4 Elastsusõpetuse ülesanded . . . . .	50
1.5 Klassikalise elastsusteooria põhieeldused ja põhihüpoteesid . . . . .	51
<b>2 Pinge</b>	<b>54</b>
2.1 Jõu ja pinged . . . . .	55
2.2 Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid . . . . .	60
2.3 Pinged kaldpinnal, rajatingimused keha pinnal . . . . .	66
2.4 Peapinged, pinge invariantid . . . . .	68
2.5 Pingetensor . . . . .	73

---