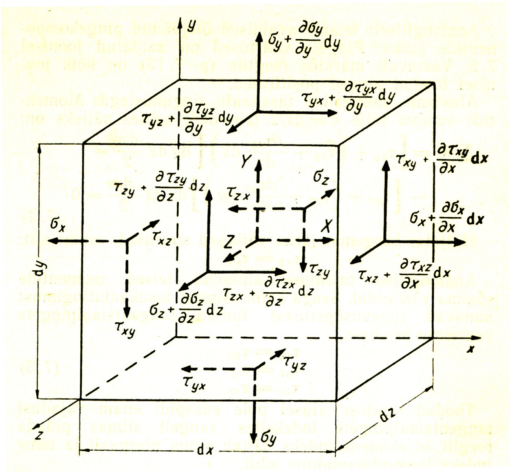
3.6 Elastsusjõu töö ja deformatsiooni potentsiaalne energia



Vaatleme lõpmata väikest risttahukat (joon. 2.4). Arvestame klassikalise elastsusteooria eeldusi ja hüpoteese:

- ideaalselt elastne materjal;
- superpositsiooni printsiip;
- deformatsioonid on väikesed

ning leiame *pingete poolt keha deformeerimisel tehtava töö.*

- Vaatleme tahke, mis on risti x teljega. Eeldame, et normaalpingete toimel suureneb tahkude vaheline kaugus $d\varepsilon_x dx$ võrra.
  - Vastav elastsusjõu elementaartöö (hüljates kõrgemat järku väikesed suurused): $\sigma_x dydzd\varepsilon_x dx$.

- Vaatleme tahke, mis on risti x teljega ja tahke, mis on risti y teljega. Eeldame, et nihkepingete toimel muutub nurk x ja y telje vahel väikese suuruse $d\gamma_{xy}$ võrra.
  - Vastav elastsusjõu elementaartöö (hüljates kõrgemat järku väikesed suurused): $\tau_{xy} dydzd\gamma_{xy} dx$. ⋆
- Analoogiliselt saab leida pingetele σ_y, σ_z, τ_{yz} ja τ_{xz} vastavad tööd.

Rakendame superpositsiooni printsiipi ja saame summaarse elementaartöö

$$dA^* = (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz})\, dxdydz. \tag{3.34}$$

Jagades viimase elementaarruumalaga $dV = dxdydz$, saame elementaartöö tiheduse $dA = dA^*/dV$. Kuna eelduse põhjal on materjal ideaalselt elastne, siis on tehtud töö tõttu suurendatud elementaarristahuka potentsiaalset energiat $dW^* = dA^*$ võrra. †

Edaspidi vaatleme seega suurust dW, st. potentsiaalse energia juurdekasvu ühikruumala kohta:

$$dW = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}. \tag{3.35}$$

Asendame saadud avaldisse pinged $\sigma_x, \ldots$ üldistatud Hooke'i seadusest (3.30) ja saame

$$\begin{aligned} dW &= (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x)\, d\varepsilon_x + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y)\, d\varepsilon_y + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z)\, d\varepsilon_z + \\ &\quad + \mu\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \mu\gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \mu\gamma_{zx} d\gamma_{xz} = \\ &= \lambda\theta d\theta + 2\mu\left(\varepsilon_x d\varepsilon_x + \varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z\right) + \\ &\quad + \mu\left(\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \gamma_{zx} d\gamma_{xz}\right). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Viimast avaldist integreerides leiame potentsiaalse energia tiheduse sõltuvana deformatsioonidest

$$W = \frac{1}{2}\left[\lambda\theta^2 + 2\mu\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2\right) + \mu\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)\right]. \tag{3.37}$$

Kuna Lamé koefitsiendid (3.29) on positiivsed, siis peab ka potentsiaalne energia olema positiivne (või null) igas ideaalselt elastse keha punktis.

Kasutades taas Hooke'i seadust kujul (3.30) saame *Clapeyroni valemi*

$$W = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right). \tag{3.38}$$

Viimasest saab omakorda avaldada W läbi pingete ja elastsuskonstantide E ja ν kui kasutada Hooke'i seadust kujul (3.22)

$$W = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z\right) + 2\left(1+\nu\right)\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right]. \tag{3.39}$$

Kuna W on potentsiaalne energia, siis peab avaldis (3.35) olema funktsiooni W täisdiferentsiaal, mis omakorda tähendab, et

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, & \sigma_y = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, & \sigma_z = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}, \\ \tau_{xy} = \dfrac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, & \tau_{yz} = \dfrac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} = \dfrac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}. \end{cases} \tag{3.40}$$

Viimased avaldised on tuntud *Castigliano valemitena.* Ülaltoodu kontrolliks leiame avaldistest (3.37)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = \sigma_x, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = \mu\gamma_{xy} = \tau_{xy}, \quad \ldots \end{cases} \tag{3.41}$$

Et leida kehas salvestunud summaarne potentsiaalne energia W tuleb potentsiaalse energia tihedust integreerida üle kohu keha ruumala V, st.

$$W = \int_V W dV = \int\int\int_V W dxdydz. \tag{3.42}$$

Rakendes Clapeyroni valemit avaldub summaarne potentsiaalne energia kujul

$$W = \frac{1}{2}\int\int\int_V (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})\, dxdydz. \tag{3.43}$$

Peatükk 4

Elastsusteooria põhivõrrandid, nende lahendusmeetodid ja lihtsamad ruumilised ülesanded

4.1 Elastsusteooria põhivõrrandid

1. *Tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid* (2.6) *(3 võrrandit):*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

2. *Cauchy seosed* (3.6) *(6 võrrandit):*

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \tag{4.2}$$

---

3. *Üldistatud Hooke'i seadus (6 võrrandit) nn. otsesel kujul* (3.22)*:*

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right], & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right], & \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right], & \gamma_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx} \end{cases} \tag{4.3}$$

või nn. pöördkujul (3.30)

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Võrrandeid kokku 15.

Tundmatud kokku 15: 6 pingetensori komponenti + 6 deformatsioonitensori komponenti + 3 siirdevektori komponenti.

Rajatingimused ehk ääretingimused ehk servatingimused võivad olla kolme põhitüüpi.

1. Keha välispinnal on antud pindjõud (2.14):

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \tag{4.5}$$

2. Keha välispinnal on antud siirded. Põhimõtteliselt tähendab see seda, et on antud keha välispinna liikumisseadus.

3. Osal keha pinnast on antud siirded ja osal pindjõud.

Võib esineda veelgi komplitseeritumaid juhte, kus mingil osal keha pinnast on antud näiteks üks kolmest siirdekomponendist ja kaks pindjõu komponenti.

Pidevustingimused.

Kui põhimuutujateks on valitud deformatsioonid või pinged, siis on tarvis arvestada ka pidevustingimusi (3.18):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \dfrac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{cases} \tag{4.6}$$

4.2 Elastsusteooria ülesannete lahendusmeetodid

Elastsusteooria põhivõrrandeid võib lahendada mitmel erineval moel, sõltuvalt sellest millised suurused on valitud põhimuutujateks.

1. *Lahendamine siiretes* — tundmatuteks on valitud siirdevektori komponenedid $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ ja $w(x, y, z)$.
2. *Lahendamine pingetes* — tundmatuteks on valitud pingetensori komponendid $\sigma_x(x, y, z), \ldots, \tau_{xy}(x, y, z), \ldots$.
3. *Lahendamine deformatsioonides* — tundmatuteks on valitud deformatsioonitensori komponendid $\varepsilon_x(x, y, z), \ldots, \gamma_{xy}(x, y, z), \ldots$.
4. *Nn. segalahendi leidmine* — eelmise kolme kombinatsioonid.

Järgmises alajaotuses vaatleme kahte esimest juhtu.

Teoreem: Kui keha olek on üheselt määratud ja kehtib jõudude mõju sõltumatuse printsiip, siis omab elastsusteooria ülesanne ühest lahendit.

4.2.1 Elastsusteooria ülesannete lahendamine siiretes

Otsitavad: siirdekomponendid $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ ja $w(x, y, z)$.

1. Tasakaaluvõrrandites (4.1) olevad pingetensori komponendid asendatakse üldistatud Hooke'i seduse (4.4) abil deformatsioonitensori komponentidega:
$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0. \tag{4.7}$$
2. Kasutades Cauchy seoseid (4.2) saame
$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}_{=\nabla^2 u} + \mu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)}_{=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial x}} + X = 0, \tag{4.8}$$
kus ∇^2 on *Laplace'i operaator.* Kokku saime võrrandi
$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0. \tag{4.9}$$

3. Korrates sama protseduuri viimasele kahele võrranditest (4.1) saame *Lamé võrrandid:*

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+X=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v+Y=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w+Z=0. \end{cases} \tag{4.10}$$

   Saadud võrrandid ühendavad endas kõik eelpool vaadeldud seosed ja võrrandid, st. nad sisaldavad endas tasakaaluvõrrandeid, Cauchy seoseid ning üldistatud Hooke'i seadust.

4. Rajatingimused (4.5) esitatatkse antud juhul samuti läbi siirete kasutades valemeid (4.4) ja (4.2) (nagu Lamé võrrandite tuletamisel):

$$\begin{cases} p_{\nu x}=\lambda\theta l+\mu\dfrac{\partial u}{\partial\nu}+\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}l+\dfrac{\partial v}{\partial x}m+\dfrac{\partial w}{\partial x}n\right), \\ p_{\nu y}=\lambda\theta m+\mu\dfrac{\partial v}{\partial\nu}+\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}l+\dfrac{\partial v}{\partial y}m+\dfrac{\partial w}{\partial y}n\right), \\ p_{\nu z}=\lambda\theta n+\mu\dfrac{\partial w}{\partial\nu}+\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}l+\dfrac{\partial v}{\partial z}m+\dfrac{\partial w}{\partial z}n\right), \end{cases} \tag{4.11}$$

   kus

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=\frac{\partial u}{\partial x}l+\frac{\partial u}{\partial y}m+\frac{\partial u}{\partial z}n, \qquad \frac{\partial v}{\partial\nu}=\ldots, \qquad \frac{\partial w}{\partial\nu}=\ldots \tag{4.12}$$

5. Ülesande edasine lahendamine käib järgmiselt:
   (i) Lamé võrrandid (4.10) integreeritakse rajatingimustel (4.11);
   (ii) Cauchy seostest (3.6) määratakse deformatsioonitensori komponendid;
   (iii) Üldistatud Hooke'i seadusest (4.4) määratakse pingetensori komponenedid.

4.2.2 Elastsusteooria ülesande lahendamine pingetes konstantsete mahujõudude korral

Otsitavad: 6 pingetensori komponenti.

- Eeldame, et kõik mahujõud on konstantsed igas keha punktis $\Rightarrow \frac{\partial X}{\partial x} = \ldots = 0$.
- Alustame ruumdeformatsiooni θ ja pingetensori esimese invariandi I_1^σ omaduste uurimisega. Selleks teisendame Lamé võrrandeid (4.10) järgmiselt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(4.10)_1 + \frac{\partial}{\partial y}(4.10)_2 + \frac{\partial}{\partial z}(4.10)_3,$$

$$\ldots,$$

$$(\lambda+\mu)\underbrace{\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)}_{\nabla^2\theta} + \mu\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u+\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 v+\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 w\right)}_{\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\nabla^2\theta} = 0,$$

$$\ldots,$$

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\theta = 0. \tag{4.13}$$

Viimane on samaväärne võrrandiga

$$\nabla^2\theta = 0. \tag{4.14}$$

  - Funktsiooni, mis rahuldab *Laplace'i võrrandit* (4.14) nimetatakse *harmooniliseks funktsiooniks.*
  - Kui rakendada Hooke'i seadust ruumdeformatsioonil (3.24), siis saame võrrandile (4.14) kuju (pingetensori esimene invariant $I_1^\sigma \equiv I_1$)

$$\nabla^2 I_1^\sigma = 0. \tag{4.15}$$

- Kuue tundmatu määramiseks peame antud juhul kasutama tasakaaluvõrrandeid koos pidevustingimustega (4.6). Need kuus pidevusvõrrandit tuleb aga väljendada pingetes.
  - Asendame Hooke'i seadusest (4.3) deformatsioonitensori komponendid esimesse pidevusvõrrandisse $(4.6)_1$:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\nu\left(\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\nu\left(\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\right)-2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}=0 \tag{4.16}$$

– Viimasest ellimineerime nihkepinge τ_{xy}. Selleks

$$\frac{\partial}{\partial x}(4.1)_1 + \frac{\partial}{\partial y}(4.1)_2 - \frac{\partial}{\partial z}(4.1)_3$$

$$\ldots$$

$$-2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \ldots \rightarrow (4.16) \pm \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2}, \pm \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}, \pm \nabla^2 \sigma_z \ldots \Rightarrow$$

$$(1+\nu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial z^2} = 0.$$

- Kokku saame analoogiliselt toimides kuus võrrandit, mis on tuntud *Beltrami–Michelli võrranditena* ning mis väljendavad pidevustingimusi pingetes (juhul kui mahujõud on konstantsed) —

$$\begin{cases} (1+\nu)\nabla^2 \sigma_x + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x^2} = 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{xy} + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x \partial y} = 0, \\ (1+\nu)\nabla^2 \sigma_y + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial y^2} = 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{yz} + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial y \partial z} = 0, \\ (1+\nu)\nabla^2 \sigma_z + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial z^2} = 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{xz} + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x \partial z} = 0. \end{cases} \qquad (4.17)$$

Kokkuvõte.

Antud juhul, st., elastsusteooria ülesande lahendamisel pingetes tuleb:

(i) lahendada tasakaaluvõrrandid (4.1) koos pingetes esitatud pidevustingimustega (4.17) ja rajatingimustega (4.5);

(ii) määrata üldistatud Hooke'i seadusest (4.3) deformatsioonitensori komponendid;

(iii) määrata Cauchy seostest (4.2) siirdevektori komponendid.