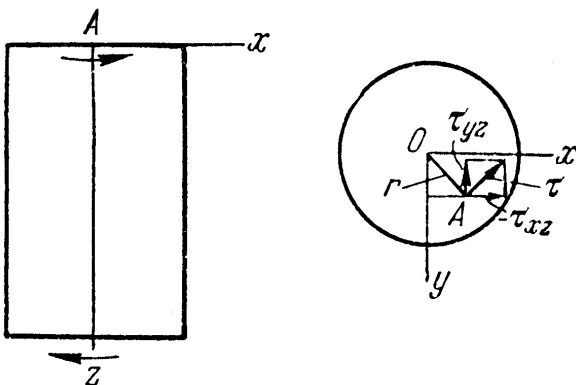


## 4.3 Lihtsamad ruumilised ülesanded

Käesolevas alajaotuses vaatleme mõningate lihtsamate elastsusteooria ülesannete lahendamist pingetes.

- Vaadeldavate ülesannete *lihtsus* seisneb eeskätt selles, et *pingekomponendid on konstantsed või lineaarfunktsioonid koordinaatidest  $(x, y, z)$* .
  - Sellisel juhul on Beltrami-Michelli võrrandid (4.17), st. pidevusvõrrandid pingetes, automaatselt rahuldatud.
- *Vaatleme elementaarteooriast*, st. tugevusõpetusest (tehnilisest mehaanikast), *tuntud lahendeid ja näitame, et nad rahuldavad elastsusteooria tasakaaluvõrrandeid (4.1) ja rajatingimusi (4.5)*.
- Leiame keha punktide siirded läbi üldistatud Hooke'i seaduse (4.3) ja Cauchy seoste (3.6). Elementaarteoorias piirduetakse peaasjalikult vaid varda telje siirete määramisega.

### 4.3.1 Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne



Vaatleme konstantse ristlõikega ümarvarrast, mille otstesse on rakendatud pöördemomendid. Vastavalt elementaarteooriale, st. tugevusõpetusest tuntud valemitele, avaldub nihkepinge varda väändel kujul

$$\tau = G\vartheta r, \quad (4.18)$$

Joonis 4.1: Ümarvarda vääne.

kus  $G$  on nihkeelastsusmoodul,

$r$  — polaarraadius ja  $\vartheta$  — väändenurk varda pikkusühiku kohta. Pingevektor  $\tau$  on seejuures risti varda raadiusega  $r$ . Tuletame meelde, et väändenurk  $\vartheta \ll 1$  ja et on tehtud terve rida katseandmetel põhinevaid lihtsustavaid eeldusi: (i) ristlõiked jäävad tasapinnalisteks; (ii) ristlõigete vahekaugus ei muutu; (iii) ristlõige  $z = \text{const.}$  pöörduv nurga  $\vartheta_z = \vartheta z$  võrra; (iv) raadiused jäävad sirgeteks; (v) varda läbimõõt ei muutu; (vi) mahujõud on hüljatud.

Lahutame nüüd pingevektori  $\boldsymbol{\tau}$   $x$ - ja  $y$ -telje sihiliseks komponendiks:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\vartheta r \frac{x}{r} = G\vartheta x, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -G\vartheta r \frac{y}{r} = -G\vartheta y. \quad (4.19)$$

Ülejäänud pinged on vastavalt tehtud eeldustele nullid, st.,

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \quad (4.20)$$

Allpool näitame, et vaadeldav lahend rahuldab lineaarse elastsusteooria põhivõrrandeid.

Kuna pingekomponendid on kas nullid või lineaarfunktsioonid koordinaatidest  $x$  ja  $y$ , siis on pidevustingimused pingetes (Beltrami–Michelli võrrandid) (4.17) automaatselt rahuldatud:

$$\begin{cases} (1 + \nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x^2} = 0, & (1 + \nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x\partial y} = 0, \\ \dots, & \dots, \\ \dots, & \dots \end{cases}$$

Tasakaaluvõrrandid (4.1) on rahuldatud kuna mahujõudud on hüljatud:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

Silindri külgpind on pingevaba. Seega, saavad rajatingimused (4.5) kuju

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = 0, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = 0. \end{cases}$$

Külginna normaali suunakoosinused

$$l = \cos(\boldsymbol{\nu}, x) = \frac{x}{r}, \quad m = \cos(\boldsymbol{\nu}, y) = \frac{y}{r}, \quad n = \cos(\boldsymbol{\nu}, z) = 0. \quad (4.21)$$

Kui arvestada vaid viimast, st.  $n = 0$  ja avaldise (4.20), jääb jääb rajatingimustest alles vaid üks võrrand

$$0 = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m, \quad (4.22)$$

mis on rahuldatud ringsilindri puhul, st. tingimustel (4.21)<sub>1,2</sub>. Ka on selge, et mitteümarvada puhul elementaarteooria lahend ei sobi, sest normaal pole enam antud avaldisega (4.21) ja (4.22) ei kehti varda külgpinnal.

Siirete leidmine toimub üldistatud Hooke'i seaduse (4.3) ja Cauchy seoste (3.6) abil. Arvestades pingekomponentide väärtusi:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0, & \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = 0, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = 0, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = \vartheta x, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0, & \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \tau_{zx} = -\vartheta y. \end{cases}$$

Rajatingimused antakse punktis  $A$  kujul  $u = v = w = 0$  ja  $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial w/\partial x = 0$ , st. keelatud on nii pöörded kui siirded. Sellistel rajatingimustel saame

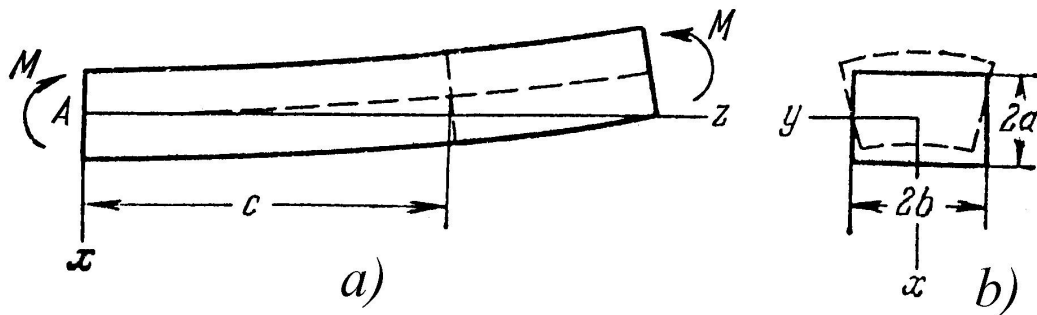
$$u = -\vartheta yz, \quad v = \vartheta xz, \quad w = 0. \quad (4.23)$$

*Seega osutub ümarvada puhul elementaarteooria eeldus, et ristlõiked jäävad tasapinnaliseks ja raadiused sirgeteks, õigeks.*

### Märkused:

1. Kui väliskoormus on varda otsale antud tangentsiaalpingetega kujul (4.18) siis on leitud lahend kehtiv varda suvalise ristlõike jaoks. Kui väliskoormus on aga antud mingil teisel kujul, siis tuleb otspindade lähedal rakendada Saint-Venant'i printsiipi.
2. Valemite (4.23) tuletamine on üksikasjalikult esitatud õpikus S.P. Timoshenko, J.N. Goodier. Theory of Elasticity. McGraw-Hill, 1970. Venekeelne tõlge: Teoria uprugosti, Mir, Moskva, 1975..
3. Õpikus «R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967» on vaadeldav ülesanne lahendatud siiretes. Lõpuks näidatakse, saadud lahend sisaldab elementaarteooriast pärit valemit (4.18).

## 4.3.2 Prismaatiliste varraste puhas paine



Joonis 4.2: Prismaatilise varda paine.

Vaatleme prismaatilist varrast, mis paindub peatasandis  $xz$  varda otstesse rakendatud vastassuunaliste ja suuruselt võrdsete momentide toimel. Koordinaatide alguse paneme varda vasakusse otsa ja ristlõike pinnakeskmesse. Elementaarteooria põhjal

$$\sigma_z = \frac{Ex}{R}, \quad \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (4.24)$$

kus  $R$  on painutatud varda kõverusraadius. Lahend (4.24) rahuldab

massjõudude puudumisel tasakaaluvõrrandeid (4.1) ja rajatingimusi (4.5) varda külgpinnal. Otspindadel on lahend täpne kui väliskoormus jaotub vastavalt avaldisele (4.24). Paindemoment määratakse valemiga

$$M = \int_A \sigma_z x dA = \int_A \frac{Ex^2 dA}{R} = \frac{EI_y}{R}. \quad (4.25)$$

Viimasest avaldisest saame leida varda telje kõveruse

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_y}. \quad (4.26)$$

Siirete leidmiseks kasutame Hooke'i seadust (4.3) ja Cauchy seoseid (3.6) (antud juhul on tala teljeks  $z$ -telg!)

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{R}, \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu x}{R}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu x}{R}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Kui lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem (4.27) samadel rajatingimustel, mis alajaotuses 4.3.1, st. punktis  $A$  on keelatud nii siirded kui pöörded ehk  $u = v = w = 0$  ja  $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial v/\partial x = 0$  kui  $x = y = z = 0$ . Pärast mõningaid teisendusi saame (tuletuskäiku vt. näit. Timoshenko & Goodier)

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2R}[z^2 + \nu(x^2 - y^2)], \\ v = -\frac{\nu xy}{R}, \quad w = \frac{xz}{R}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Varda kõverdunud telje võrrandi saame võttes viimases avaldises  $x = y = 0$ :

$$u = -\frac{z^2}{2R} = -\frac{Mz^2}{2EI_y}, \quad v = w = 0. \quad (4.29)$$

See avaldis langeb kokku elementaarteooria läbipainde avaldisega.

Vaatleme nüüd varda suvalist ristlõiget  $z = c$  (enne deformatsiooni). Peale deformatsiooni asuvad selle ristlõike punktid tasandil

$$z = c + w = c + \frac{cx}{R}, \quad (4.30)$$

st. *puhtal paindel jäävad ristlõiked tasapinnalisteks*. Et uurida ristlõike deformatsioone tema tasandis, vaatleme külgi  $y = \pm b$  (vt. joonis 4.2 b)). Pärast deformatsiooni

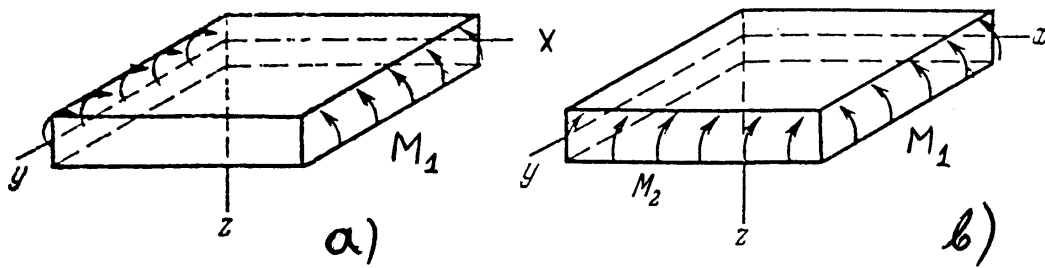
$$y = \pm b + v = \pm b \left(1 - \frac{\nu x}{R}\right), \quad (4.31)$$

st., *peale deformatsiooni on küljed  $y = \pm b$  kaldu*. Kaks ülejäänud külge  $x = \pm a$  omavad peale deformatsiooni kuju

$$x = \pm a + u = \pm a - \frac{1}{2R}[c^2 + \nu(a^2 - y^2)], \quad (4.32)$$

st. nende kujuks peale deformatsiooni on parabool. *Seega on tala pealmine ja alumine pind pikisuunas nõgus ja ristsuunas kumer, st. moodustab sadulpinna*.

## 4.3.3 Paadi puhas paine



Joonis 4.3: Ristkülikulise plaadi paine.

*Eelmises alajaotuses saadud tulemusi saab rakendada konstantse paksusega plaatide paindeülesannete puhul.* Kui pinged  $\sigma_x = Ez/R$  on rakendatud piki  $y$ -teljega paralleelseid plaadi külgi (vt. joonis 4.3 a)), siis omab plaadi pind peale deformatsiooni sadulpinna kuju, kusjuures tema kõverus  $xz$  tasapinnas on  $1/R$  ning ristuv suunas  $\nu/R$ . Siinjuures eeldatakse, et läbipainded on võrreldes plaadi paksusega väikesed. Tähistame plaadi paksuse  $h$ , paindemomendi plaadi  $y$ -telje sihilise serva pikkusühiku kohta  $M_1$  ja inertsimomendi

pikkusühiku kohta  $I_y = h^3/12$ . Nüüd valemi (4.26) põhjal

$$\frac{1}{R} = \frac{M_1}{EI_y} = \frac{12M_1}{Eh^3}. \quad (4.33)$$

Kui paindemomendid  $M_1$  ja  $M_2$  mõjuvad kahes ristuv suunas, siis saadakse elastse plaadi pinna kõverus paindemomentidest  $M_1$  ja  $M_2$  põhjustatud kõveruste superpositsioonina.

Tähistame  $1/R_1$  ja  $1/R_2$  plaadi kõverused  $xz$  ja  $yz$  tasandites. Momendid  $M_1$  ja  $M_2$  on endiselt mõõdetud serva pikkusühiku kohta. Kasutades nüüd avaldist (4.33) ja superpositsiooniprintsiipi saame

$$\frac{1}{R_1} = \frac{12}{Eh^3}(M_1 - \nu M_2), \quad \frac{1}{R_2} = \frac{12}{Eh^3}(M_2 - \nu M_1). \quad (4.34)$$

$M_1$  ja  $M_2$  loetakse positiivseteks kui nad põhjustavad positiivsete kiudude tõmmet. (4.34) põhjal

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right), \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1} \right). \quad (4.35)$$

Väikeste läbipainete puhul võib kasutada aproksimatsiooni

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4.36)$$

Tähistades

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.37)$$

ja arvestades (4.36) saame avaldistele (4.35) kuju

$$M_1 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (4.38)$$

Konstanti  $D$  nimetatakse plaadi paindejäikuseks.

Juhul kui plaat paindub silindriliselt (moodustaja on paralleelne  $y$ -teljega), siis  $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$  ja (4.38) saab kuju

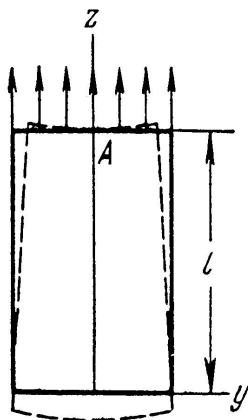
$$M_1 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_2 = -D\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.39)$$

Kui  $M_1 = M_2 = M$ , siis ka  $1/R_1 = 1/R_2 = 1/R$  ja plaat paindub sfääriliseks

pinnaks, nii et (4.35) saab kuju

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \frac{1}{R} = \frac{D(1+\nu)}{R}. \quad (4.40)$$

#### 4.3.4 Varda tõmme omakaalu mõjul



*Vaatleme ülemisest otsast jäigalt kinnitatud ristkülikulise ristlõikega varrast. Mahujõud*

$$X = Y = 0, \quad Z = -\rho g, \quad (4.41)$$

kus  $\rho g$  on varda erikaal.

*Varda igas ristlõikes on nullist erinev vaid temast allpool asuva osa kaalust põhjustatud normaalpin-*  
*ge:*

Joonis 4.4: Varda deformatsioon omakaalu mõjul.

$$\sigma_z = \rho g z, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0, \quad (4.42)$$

Tasakaaluvõrrandid (4.1) on sellise pingeaotuse korral rahuldatud.

*Rajatingimused:* Nullist erinevad pinged vaid varda ülemisel välispinnal — seal  $\sigma_z = \rho g l$ .

Kuna pidevustingimused pingetes (vt. näiteks Beltrami-Michelli võrrandid (4.17)) sisaldavad vaid teist järku osatuletisi pingekomponentidest, siis on nad antud juhul automaatselt rahuldatud.

Siirded ja deformatsioonid määrame Hooke'i seaduse abil

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\rho g z}{E}, \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

Siirdekomponendid  $u, v$  ja  $w$  leitakse avaldistest (4.43) integreerimise teel. Integreerimiskonstandid määratakse rajatingimustest punktis  $A$ . Jäiga kinnitu-

se tõttu on seal keelatud nii siirded kui pöörded, st., punktis  $x = y = 0, z = l$  on  $u = v = w = 0$  ja  $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial w/\partial x = 0$ . Tulemus on järgmine (tuletuskäiku vt. näit. Timoshenko & Goodier):

$$\begin{cases} u = -\frac{\nu \rho g x z}{E}, & v = -\frac{\nu \rho g y z}{E}, \\ w = \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E}(x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E} \end{cases} \quad (4.44)$$

On selge, et  $z$ -telje punktid omavad vaid vertikaalseid siirdeid:

$$w|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -\frac{\rho g}{2E}(l^2 - z^2). \quad (4.45)$$

Teised punktid, st. kus  $x \neq 0$  või  $y \neq 0$ , omavad ka horisontaalseid siirdeid. Seega *sirged, mis olid enne deformatsiooni paralleelsed  $z$ -teljega on peale deformatsiooni  $z$  suhtes kaldu. Tala lõiked, mis olid enne deformatsiooni risti  $z$ -teljega, moodustavad pärast deformatsiooni paraboolse pinna.* Näiteks punktid, mis olid enne deformatsiooni tasandil  $z = c$  asuvad peale deformatsiooni pinnal  $z = c + w|_{z=c}$ . See pind on risti kõigi nende varda kiududega, mis enne deformatsiooni olid vertikaalsed.