

4.3.5 Ülesanded

Ülesanne 3. Tala (plaadi) puhas paine. Tala dimensioonid (joon. 4.2): $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ ja $0 \leq z \leq l$. Otstesse $z = 0$ ja $z = l$ on rakendatud momendid M . Leida (alajaotuste 4.3.2 ja 4.3.3 põhjal) tala (plaadi) peatasandi xz ja löike $z = l$ deformeerunud kuju järgmistel juhtudel:

1. $M = 2\text{kNm}$; $l = 0,1\text{m}$; $a = 0,005\text{m}$; $b = 0,05\text{m}$;
2. $M = 10\text{kNm}$; $l = 1\text{m}$; $a = 0,03\text{m}$; $b = 0,05\text{m}$;
3. $M = 10\text{kNm}$; $l = 1\text{m}$; $a = 0,015\text{m}$; $b = 0,5\text{m}$;
4. $M = 10\text{kNm}$; $l = 0,5\text{m}$; $a = 0,015\text{m}$; $b = 0,5\text{m}$.

Vaadelda kolmest materjalist talasid (plaate):

1. teras: $E = 210\text{GPa}$; $\nu = 0,3$;
2. alumiinium: $E = 70\text{GPa}$; $\nu = 0,35$;
3. vask: $E = 110\text{GPa}$; $\nu = 0,32$.

Hinnata maksimaalse vertikaalsirde ja tala paksuse suhet, st. seda kas läbipainded on väikesed või ei. Lahendused vt. <http://cens.ioc.ee/~salupere/loko.html>.

Peatükk 5

Elastusteooria tasandülesanne

5.1 Tasandülesande mõiste

Selleks, et iseloomustada *pingust* või *deformatsiooni elastse keha punktis* kasutatakse peapinge ja peadeformatsiooni mõistet. Pinguse puhul eristatakse järgmist kolme juhtu:

- *ruumpingus* — kõik kolm peapinget on nullist erinevad;
- *tasandpingus* — kaks peapinget on nullist erinevad;
- *joonpingus* — vaid üks peapinge on nullist erinev.

Analoogiliselt, st. läbi peadeformatsioonide, defineeritakse *ruum-, tasand- ja joondeformatsiooni*.

Üldjuhul võib nii pinguse kui deformatsiooni iseloom olla keha erinevates punktides erinev. Kui igas keha punktis on pingus (deformatsioon) sama iseloomuga siis öeldakse, et kehas on *ühtlane pingus (deformatsioon)*.

Elastsusteooria ülesannet nimetatakse *tasandülesandeks* (ehk tasapinnaliseks ülesandeks) kui deformatsioon või pinge on kogu keha ulatuses tasapinnaline.

5.2 Tasanddeformatsioon

Vaadeldaval juhul on kõigis keha punktides deformatsioon tasapinnaline, st. üks peadeformatsioonidest on null. Tasanddeformatsioon saab tekkida kui siirded

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0. \quad (5.1)$$

Vastavalt Cauchy seostele (4.2)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Selline deformatsiooniseisund tekib pikas kehas, millele mõjub keha pinnaga (z -teljega) ristuv koormus. Näiteks: pikk tugisein; (metro)tunnel; pikk \sqrt radiaalselt surutud völli; pika plaadi silindriline paine (NB! Saint Venant'i pil- did

Pingete leidmiseks kasutame üldistatud Hooke'i seadust nn. pöördkujul (4.4):

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y = \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} = 0, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y), & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Teisest küljest, arvestades Hooke'i seadust kujul (4.3), peab

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0,$$

kust saame

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Tasakaaluvõrrandid (4.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

Arvestades ülesande sisu jääb järgi kaks võrrandit

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + X = 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

kusjuures ka mahujõud $Z = 0$.

Rajatingimustest (4.5)

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases}$$

jääb samuti alles 2 esimest võrrandit —

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m; \end{cases} \quad (5.5)$$

- keha külgpind on paralleelne z -tejega ning seetõttu normaali suunakosinus $n = 0$.

- $p_{\nu z} = 0$ kuna muidu poleks meil tasanddeformatsiooni.

Pidevusvõrranditest deformatsioonides (4.6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

jääb alles vaid esimene

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.6)$$

5.3 Tasandpingus

Vaatleme olukorda, kus kõigis keha punktides üks peapingetest on null. Sellisel juhul saame valida Descartes'i ristkoordinaadid nii, et

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (5.7)$$

Selline pingus tekib näiteks õhukeses plaadis, millele mõjub servades rakedatud koormus, mis on risti z -teljega.

Üldistatud Hooke'i seadusest (4.3) saame

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}, & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}, & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\nu \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}, & \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Tasakaaluvõrrandid on tasandpinguse korral samad kui olid tasanddeformatsiooni korral, st. esitatud kujul (5.4).

5.4 Tasandülesande lahendamine pingetes

Väga sageli lahendatakse elastsusteooria ülesanded pingetes, sest sellel meetodil on võrreldes siiretes lahendamisega mõned eelised:

- sageli ongi ülesande lahendina vaja leida vaid pingeid, siirded on teisejärgulise tähtsusega ning neid polegi vaja leida;

- üldjuhul on siirete avaldised võrreldes pingete avaldisega tunduvalt keerukamad.

Tundmatud: pingetensori komponendid σ_x , σ_y ja τ_{xy} .

Esmalt peame pidevustingimuse (5.6)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

avaldama pingetes. Selleks kasutame üldistatud Hooke'i seadust kujul (5.8) kust leiame vajalikud osatuletised läbi pingete:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Seega saab pidevustingimus kuju

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.10)$$

Viimasest avaldisest saab tasakaaluvõrrandite (5.4) abil elimineerida nihkepinge. Selleks diferentseerime (5.4)₁ x järgi ja (5.4)₂ y järgi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial X}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial Y}{\partial y}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Eeldades, et mahujõud on konstantsed, saame viimaste liitmise tulemusena

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}. \quad (5.12)$$

Asendades viimase tulemuse pidevustingimusse (5.10) saame peale teisendusi

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0. \quad (5.13)$$

Kasutades Laplace'i operaatorit ∇^2 saame väljendada *tasandülesande pidevustingimuse pingetes* kujul

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (5.14)$$

Tasandülesande lahendamine pingetes lihtsustub oluliselt kui tuua sisse *Airy' pingefunktsioon* $\varphi(x, y)$, mis on seotud pingekomponentidega järgmisel kujul:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx, \quad (5.15)$$

kus X ja Y on konstantsed mahujõud. Alternatiivne võimalus siduda pingekomponendid ja pingefunktsioon:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (5.16)$$

Nii (5.15) kui (5.16) korral on tasakaaluvõrrandid (5.4) automaatselt rahuldatud. Pannes selliselt defineeritud pingekomponendid pidevustingimusse (5.14) saame *biharmoonilise võrrandi*

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0. \quad (5.17)$$

Lahti kirjutatult saab viimane kuju

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (5.18)$$

Funktsiooni, mis rahuldab biharmoonilist võrrandit (5.17) või (5.18) nimetatakse *biharmooniliseks funktsiooniks*.

Kuna tasakaaluvõrrandid on antud juhul automaatselt rahuldatud, siis taandub tasandülesande lahendamine pingetes neljandat järku osatuletisega diferentsiaalvõrrandi lahendamisele. Siinjuures tuleb loomulikult arvesse võtta pingetes antud ääritingimusi. Peale pingefunktsiooni leidmist määratakse pingetensori komponendid (näiteks avaldistest (5.15)). Seejärel saab üldistatud Hooke'i seaduse abil leida deformatsioonikomponendid ja Cauchy seostest siirdekomponeendid.

Tegelikult on pingefunktsiooni leidmine mitmel juhul suhteliselt lihtne. Vastavat meetodit võib nimetada *poolvastupidiseks meetodiks*. Selle põhjal antakse pingefunktsioon ette kas polünoomina või trigonomeetrilise reana, mis sisaldavad määramata konstante. Viimased määratakse ülesande lahendamise käigus ääritingimuste ja biharmoonilise võrrandi abil.

5.5 Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides

Kui väljendada Airy funktsioon polünoomina

$$\begin{aligned} \varphi = & \left(\frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2 \right) + \left(\frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3 \right) + \\ & + \left(\frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} xy^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4 \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

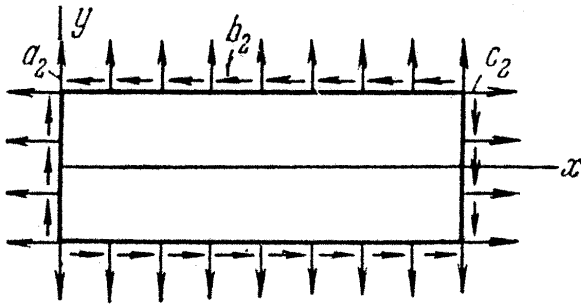
saab konstrueerida terve rea tasandülesande lahendusi. Vaadeldav lähenemisviis on rakendatav kui uuritakse ristkülikulisi plaate või talasid. Mahujõud, k.a. keha kaal, hülgame. Käesolevas alajaotuses vaatleme talasid, mille pikkus on l , kõrgus $2c$ ja laius 1. Tala teljeks on x -telg ja y telg on suunatud üles. Kuna lineaarses elastsusteoorias kehtib superpositsiooni printsiip, siis vaatleme algul polünoome kuni 5. astmeni eraldi. Järgmises alajaotuses konstrueerime saadud tulemuste abil erinevaid lahendeid.

A) Ruutpolünoom

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2. \quad (5.20)$$

Sellise valiku puhul on biharmooniline võrrand (5.18) automaatselt rahuldatud. Mahujõude hülgamise puhul saame avaldistest (5.15) pingekomponendid kujul

$$\sigma_x = c_2; \quad \sigma_y = a_2; \quad \tau_{xy} = -b_2. \quad (5.21)$$



Selline pingeseisund tähendab $a_2 > 0$ ja $c_2 > 0$ puhul ühtlast tõmmet kahes risttuvas sihis koos ühtlase nihkega $b_2 > 0$. Vastavad rajatingimused on esitatud joonisel 5.1. Võttes osa polünoomi koefitsente võrdseks nulliga, saab rajatingimusi varieerida.

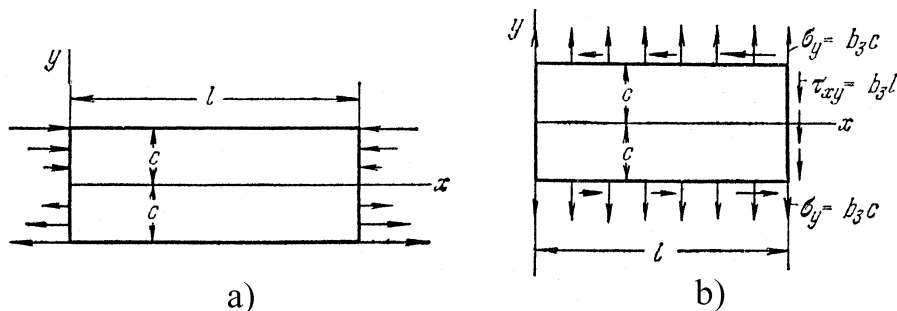
Joonis 5.1: Ruutpolünoomile vastavad rajatingimused.

B) Kuuppolünoom

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2}y^3. \quad (5.22)$$

Ka antud juhul on biharmooniline võrrand (5.18) automaatselt rahuldatud. Pingete avaldiste (5.15) põhjal aga

$$\sigma_x = c_3x + d_3y; \quad \sigma_y = a_3x + b_3y; \quad \tau_{xy} = -b_3x - c_3y. \quad (5.23)$$



Joonis 5.2: Kuuppolünoomile vastavad rajatingimused: a) $d_3 \neq 0$, $a_3 = b_3 = c_3 = 0$ ja b) $b_3 \neq 0$, $a_3 = c_3 = d_3 = 0$

- Valides nüüd vaid $d_3 \neq 0$ saame puhtale paindele vastava pingeseisundi. Vastavad rajatingimused on esitatud joonisel 5.2 a).
- Vaid $b_3 \neq 0$ — pindadel $y = \pm c$ mõjuvad pinged $\sigma_y = \pm b_3 y$ ja $\tau_{yx} = -b_3 x$ ning pinnal $x = l$ pinge $\tau_{xy} = -b_3 l$ (joonis 5.2 b)).
- Vaid $c_3 \neq 0 \dots$
- Vaid $a_3 \neq 0 \dots$

Teist ja kolmandat järku polünoomide puhul polnud vaja esitada täiendavaid kitsendusi polünoomide koefitsentidele, sest biharmooniline võrrand oli automaatselt rahuldatud. Kõrgemat järku polünoomide puhul pole asi aga enam nii lihtne.

C) Neljandat järku polünoom

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4. \quad (5.24)$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (5.18) rahuldatud vaid juhul kui

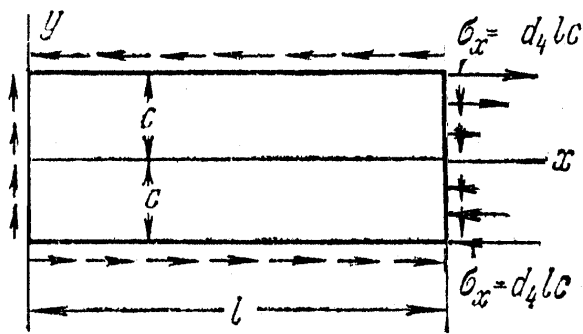
$$e_4 = -(2c_4 + a_4) \quad (5.25)$$

ning pingekomponendid (5.15) saavad kuju

$$\begin{cases} \sigma_x = c_4 x^2 + d_4 x y - (2c_4 + a_4) y^2; \\ \sigma_y = a_4 x^2 + b_4 x y + c_4 y^2; \\ \tau_{xy} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 x y - \frac{d_4}{2} y^2. \end{cases} \quad (5.26)$$

Kuna koefitsentide a_4, \dots, d_4 valik on vaba, siis on (5.26) abil võimalik kirjeldada mitmesuguseid rajatingimusi. Näiteks kui vaid $d_4 > 0$ on nullist erinev polünoomi koefitsent, siis

$$\sigma_x = d_4 x y; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2. \quad (5.27)$$



Vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} y = \pm c, & \tau_{yx} = -\frac{d_4}{2}c^2, \\ x = 0, & \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2}y^2 \\ x = l, & \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2}y^2, \quad \sigma_x = d_4ly. \end{cases} \quad (5.28)$$

Joonis 5.3: Neljandat järku polünoomile vastavad rajatingimused $d_4 > 0$ ja $a_4 = b_4 = c_4 = 0$ puhul. on kujutatud joonisel 5.3.

Vaatleme ühikulise paksusega plaati. Leiame plaadi kontuuril mõjuvatest pingetest põhjustatud jõupaaride momendid (vt. joonis 5.3).

$$\begin{cases} M(\tau_{xy}) = -2 \int_0^c |\tau_{xy}| l dy = \dots = -\frac{d_4 l c^3}{3}, \\ M(\tau_{yx}) = 2 |\tau_{yx}| l c = \dots = d_4 l c^3, \\ M(\sigma_x) = -2 \int_0^c \sigma_x y dy = \dots = -\frac{2d_4 l c^3}{3}. \end{cases} \quad (5.29)$$

Seega on antud juhul (st. juhul kui mööda plaadi kontuuri on rakendatud joonisel 5.3 kujutatud pindjõud) plaadile mõjuv jõusüsteem tasakaalus.

Kui vaid $c_4 > 0$ oleks nullist erinev polünoomi koefitsent, siis saaksime avaldistest (5.26)

$$\sigma_x = c_4 x^2 - 2c_4 y^2; \quad \sigma_y = c_4 y^2; \quad \tau_{xy} = -2c_4 xy. \quad (5.30)$$

Jne., jne.

D) Viiendat järku polünoom

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5. \quad (5.31)$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (5.18) rahuldatud kui

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5) \text{ ja } f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5). \quad (5.32)$$

Pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} = \dots \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x^2} = \dots \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} = \dots \end{cases} \quad (5.33)$$

Valides vaid $d_5 > 0$ nullist erinevaks polünoomikoefitsendiks, saame pingeaotuse

$$\sigma_x = d_5 \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right), \quad \sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3, \quad \tau_{xy} = -d_5 x y^2. \quad (5.34)$$

Viimasele vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} y = \pm c, & \sigma_y = \pm \frac{1}{3} d_5 c^3, & \tau_{yx} = -d_5 x c^2 \\ x = 0, & \sigma_x = -\frac{2d_5 y^3}{3}, & \tau_{xy} = 0, \\ x = l, & \sigma_x = d_5 \left(l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right), & \tau_{xy} = -d_5 l y^2. \end{cases} \quad (5.35)$$

Kuna biharmooniline võrrand (5.18) on lineaarne diferentsiaalvõrrand, siis on tema lahendiks ka suvaline lahendite superpositsioon. Seega, liites eespool leitud elementaarlahendeid, saame leida meid huvitava probleemi lahendi.