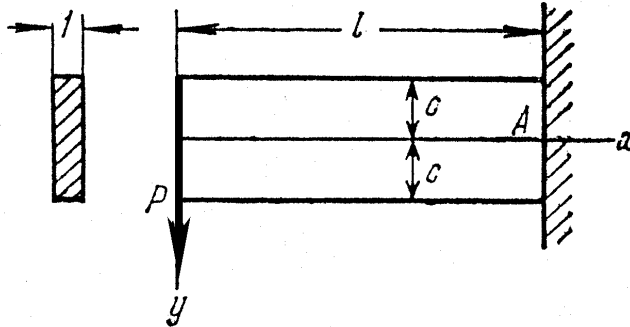


5.6 Konsooli paine

Vaatleme kitsa ristkülikulise ristlõikega konsooli, mille vabas otsas ($x = 0$) on rakendatud jõud \mathbf{P} , mida võib vaadelda kui otspinnal mõjuvate nihkepingete peavektorit (joonis 5.4). Konsooli pealmine ja alumine pind on pingevabad ja ots $x = l$ jäigalt kinnitatud.



Joonis 5.4: Kitsa ristkülikulise ristlõikega konsool pikkusega l , kõrgusega $2c$ ja paksusega 1.

Sellist olukorda saab vaadelda kui superpositsiooni puhtast nihkest (alajaotus 5.5 A valemid (5.21) $a_2 = c_2 = 0$ ja $b_2 \neq 0$) ja valemitega (5.27) esitatud

juhust (alajaotus 5.5 C $a_4 = b_4 = c_4 = e_4 = 0$ ja $d_4 \neq 0$). Saame

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2 = \tau_{yx}. \quad (5.36)$$

Rajatingimused

$$\tau_{yx}|_{y=\pm c} \equiv \tau_{xy}|_{y=\pm c} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}, \quad (5.37)$$

$$\sum F_{iy}|_{x=0} = P = -\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \int_{-c}^c \left(b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{3P}{4c}. \quad (5.38)$$

Pannes nüüd konstandid b_2 ja d_4 valemitest (5.37) ja (5.38) pingete avaldisse (5.36) saame

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right). \quad (5.39)$$

Arvestades, et inertsimoment $I \equiv I_z = 2c^3/3$, siis

✓

$$\sigma_x = -\frac{P}{I}xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2). \quad (5.40)$$

Lahend on täpne Saint-Venanti printsiibi mõttes, st., 5.5 C puhul on tala otsas nihkepinged paraboolse jaotusega.

Leiame nüüd siirdekomponeendid u ja v . Hooke'i seadusest

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{P}{EI}xy, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\nu P}{EI}xy, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2). \end{cases} \quad (5.41)$$

Integreerime (5.41)₁ koordinaadi x järgi ja (5.41)₂ koordinaadi y järgi:

$$u = -\frac{P}{2EI}x^2y + f(y), \quad v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + f_1(x), \quad (5.42)$$

kus funktsioonid $f(y)$ ja $f_1(x)$ on integreerimiskonstantide analoogid. Pannes (5.42) valemisse (5.41)₃ saame

$$-\frac{P}{2EI}x^2 + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu P}{2EI}y^2 + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2). \quad (5.43)$$

Viimane on esitatav kujul

$$F(x) + G(y) = K, \quad (5.44)$$

kus

$$F(x) = \frac{df_1(x)}{dx} - \frac{P}{2EI}x^2, \quad G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu P}{2EI}y^2 - \frac{P}{2IG}y^2, \quad K = -\frac{P}{2IG}c^2. \quad (5.45)$$

Kuna $F(x) + G(y) = K = const.$, siis peavad ka $F(x)$ ja $G(y)$ olema konstantid. Tähistades $F(x) = d$ ja $G(y) = e$ saame valemist (5.44) tingimuse

$$d + e = -\frac{P}{2IG}c^2 \quad (5.46)$$

ja diferentsiaalvõrrandid

$$\frac{df(y)}{dy} = -\frac{\nu P}{2EI}y^2 + \frac{P}{2IG}y^2 + e, \quad \frac{df_1(x)}{dx} = \frac{P}{2EI}x^2 + d \quad (5.47)$$

Viimaste integreerimisel saame

$$f(y) = -\frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6IG}y^3 + ey + g, \quad f_1(x) = \frac{P}{6EI}x^3 + dx + h. \quad (5.48)$$

Seega saavad siirete avaldised (5.42) kuju

$$u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + ey + g, \quad v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 + dx + h. \quad (5.49)$$

Konstandid d, e, g ja h määratakse tingimusest (5.46) ja kolmest rajatingimusest siiretele.

Olgu punkt A tala ristlõike $x = l$ kese. Jäiga kinnituse tõttu peab see punkt olema fikseeritud — tema siirded on nullid ja ristlõige $x = l$ ei saa pöörduda ümber punkti A .

Seega kui $x = l$ ja $y = 0$, siis $u = v = 0$ ning

$$g = 0 \quad \text{ja} \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl. \quad (5.50)$$

Võttes valemis (5.49)₂ $y = 0$, saame konsooli kõverdunud telje võrrandi (enne deformatsiooni on teljeks x -telg, st. sirge $y = 0$):

$$v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l - x). \quad (5.51)$$

Konstandi d määramiseks kasutame kolmandat rajatingimust, mis ei luba vaadeldaval ristlõikel pöörduda ümber punkti A . Seda tingimust võib ette anda mitmel viisil. Vaatleme kahte:

a) tala telje element on punktis A fikseeritud, st.,

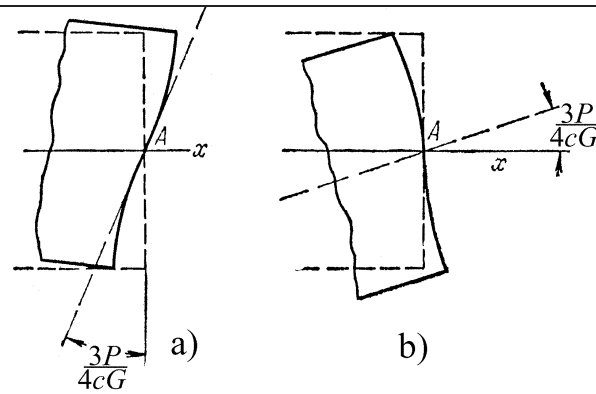
$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0; \quad (5.52)$$

b) tala ristlõike vertikaalne element on punktis A fikseeritud, st.,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0. \quad (5.53)$$

Juhul a) saame avaldiste (5.52), (5.51) ja (5.46) põhjal

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{ja} \quad e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI}. \quad (5.54)$$

Joonis 5.5: Rajatingimused otsas $x = l$.

Seega saavad siirdekompontentide avaldised (5.49) ja kõverdunud telje võrrand (5.51) kuju

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI}\right)y, \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI}, \\ v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI}. \end{cases} \quad (5.55)$$

võrrand (5.55)₃ annab konsooli vaba otsa $x = 0$ läbipaindeks $Pl^3/3EI$, mis ühtib tugevusõpetusest tuntud tulemustega.

Juhul b) saame konstantidele väärtused

$$e = \frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{ja} \quad d = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI} \quad (5.56)$$

ning siirdekompontentide ja tala kõverdunud telje jaoks avaldised

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + \frac{Pl^2}{2EI}y, \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \left(\frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Pc^2}{2GI}\right)x + \frac{Pc^2l}{2GI} + \frac{Pl^3}{3EI}, \\ v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2GI}(l-x). \end{cases} \quad (5.57)$$

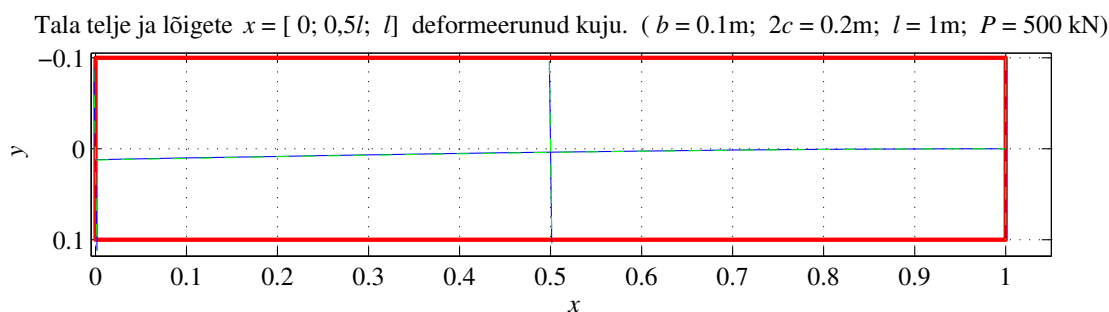
Seega saame võrrandi (5.57)₃ kasutamise puhul tala teljele

$$\frac{Pc^2}{2GI}(l-x) = \frac{3P}{4Gc}(l-x) \quad (5.58)$$

võrra suuremad läbipainded kui võrrandi (5.55)₃ puhul. Põhjus on selles, et rajatingimused (5.52) keelavad tala telje pöörded kuid lubavad otspinna pöörded punktis A (vt. joonis 5.5 a). Rajatingimused (5.53) keelavad aga tala otspinna pöörded kuid lubavad telje pöörded (vt. joonis 5.5 b). Mõlemal juhul toimuvad pöörded ühe ja sama nurga $3P/4cG$ võrra kuigi pöörduvad erinevad elemendid.

Tegelikult jääb aga kogu otspind $x = l$ paigale ja õiget tulemust ei anna ei juht a) ega b) ning kinnituskoha läheduses ei vasta ka pingeaotus valemitega (5.40) antule. Avaldise (5.40) puhul tuleb rakendada Saint-Venant'i printsiipi, st., et (5.40) annaks tõepärasema tulemuse, peame olema otsast $x = l$ piisavalt kaugel. Seega pikkade konsoolide puhul on tulemus «täpsem», st. vastab enam tegelikkusele, kui lühikeste puhul.

Näited. Joonistada: 1) tala kõverdunud telg (elastne joon) ja 2) ristlõigete $x = 0, l/2, l$ deformeerunud kuju erinevate c ja l väärtuste jaoks mõlema $\sqrt{ju-}$ $b \neq 1$ hud $b \neq 1$ ülalvaadeldud ääritingimuse korral.

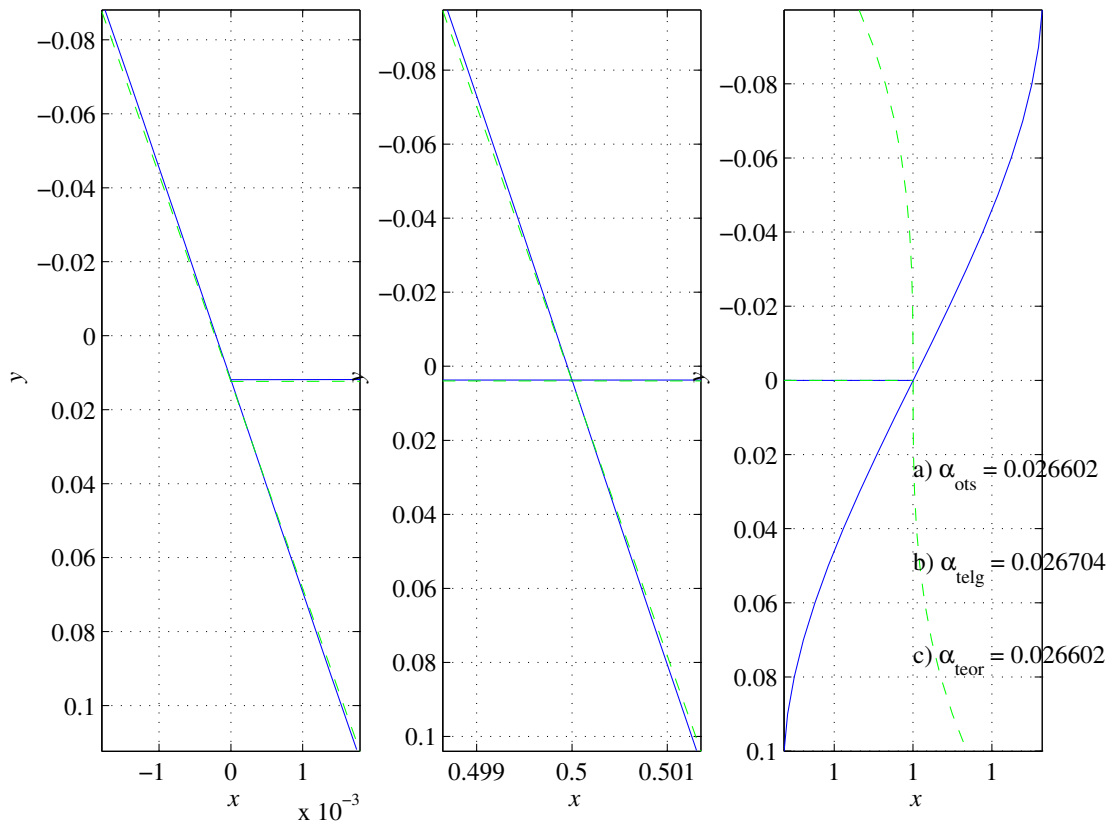


Joonis 5.6: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — roheline kriipsjoon.

Järgnevatel joonistel tähistavad α_{telg} ja α_{ots} vastavalt kõverdunud telje ja otspinna numbriliselt leitud tõusunurka kraadides punktis A .

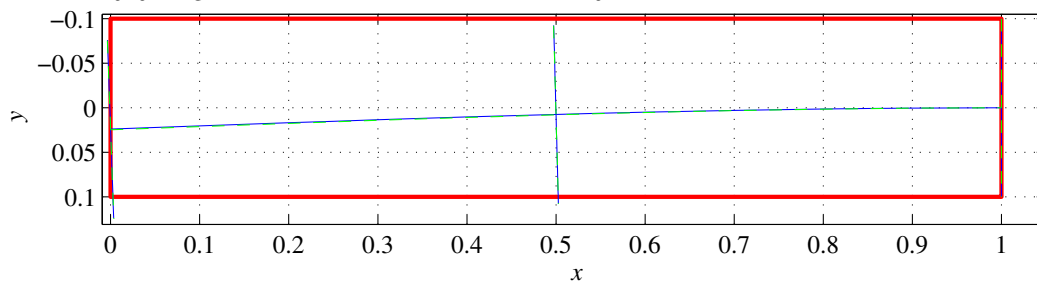
Nurk α_{teor} : $\tan \alpha_{teor} = 3P/(4cbG)$ vastab rajatingimuste a) korral kõverdunud otspinna tõusule ja rajatingimuste b) korral kõverdunud telje tõusule punktis A (võrdle joon. 5.5).

Tala telje ja lõigete $x = [0; 0,5l; l]$ deformeerunud kuju. ($b = 0.1\text{m}$; $2c = 0.2\text{m}$; $l = 1\text{m}$; $P = 500\text{ kN}$)



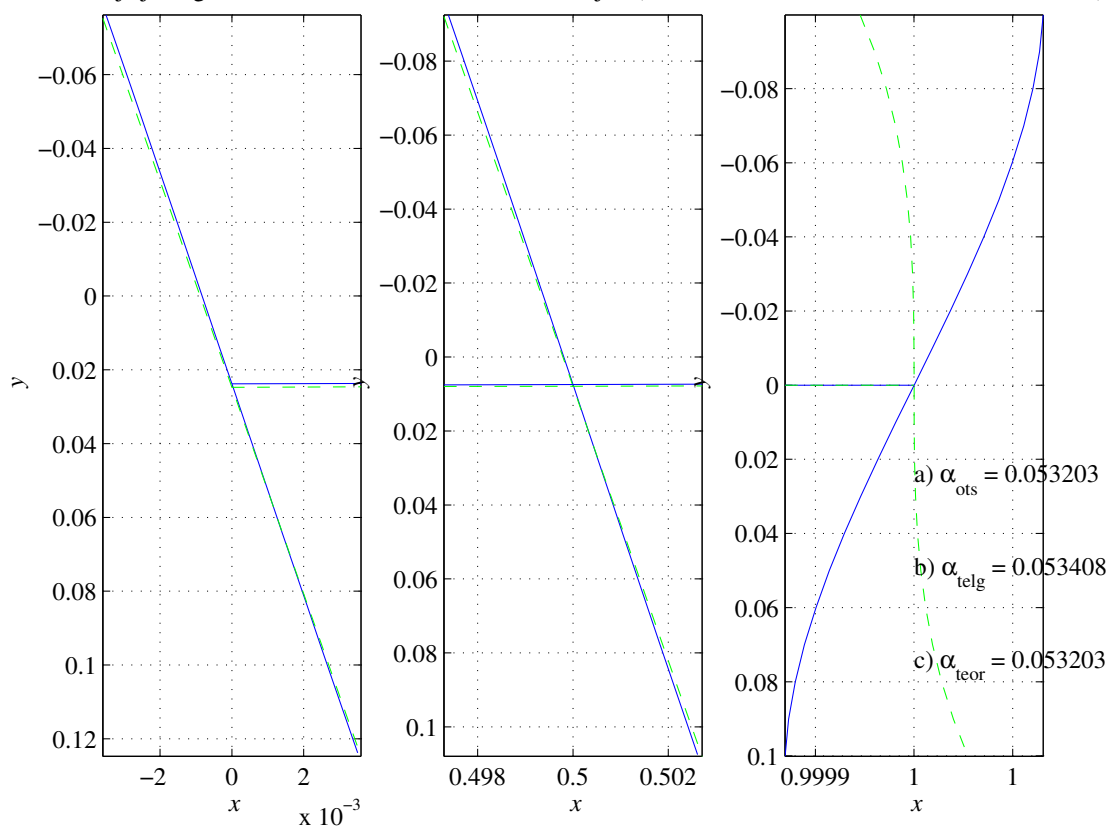
Joonis 5.7: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — roheline kriipsjoon.

Tala telje ja lõigete $x = [0; 0,5l; l]$ deformeerunud kuju. ($b = 0.1\text{m}$; $2c = 0.2\text{m}$; $l = 1\text{m}$; $P = 1000\text{ kN}$)



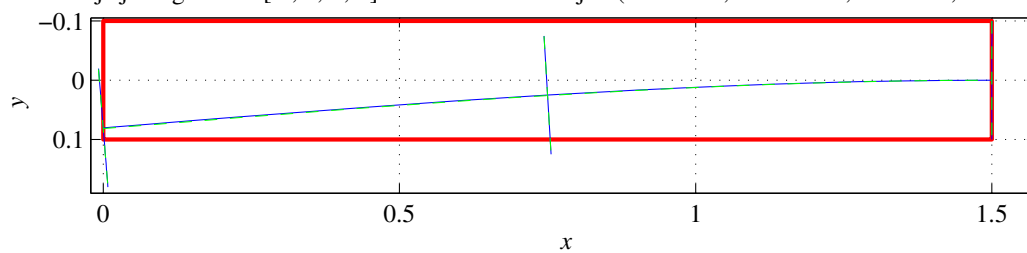
Joonis 5.8: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — roheline kriipsjoon.

Tala telje ja lõigete $x = [0; 0,5l; l]$ deformeerunud kuju. ($b = 0.1\text{m}$; $2c = 0.2\text{m}$; $l = 1\text{m}$; $P = 1000\text{ kN}$)



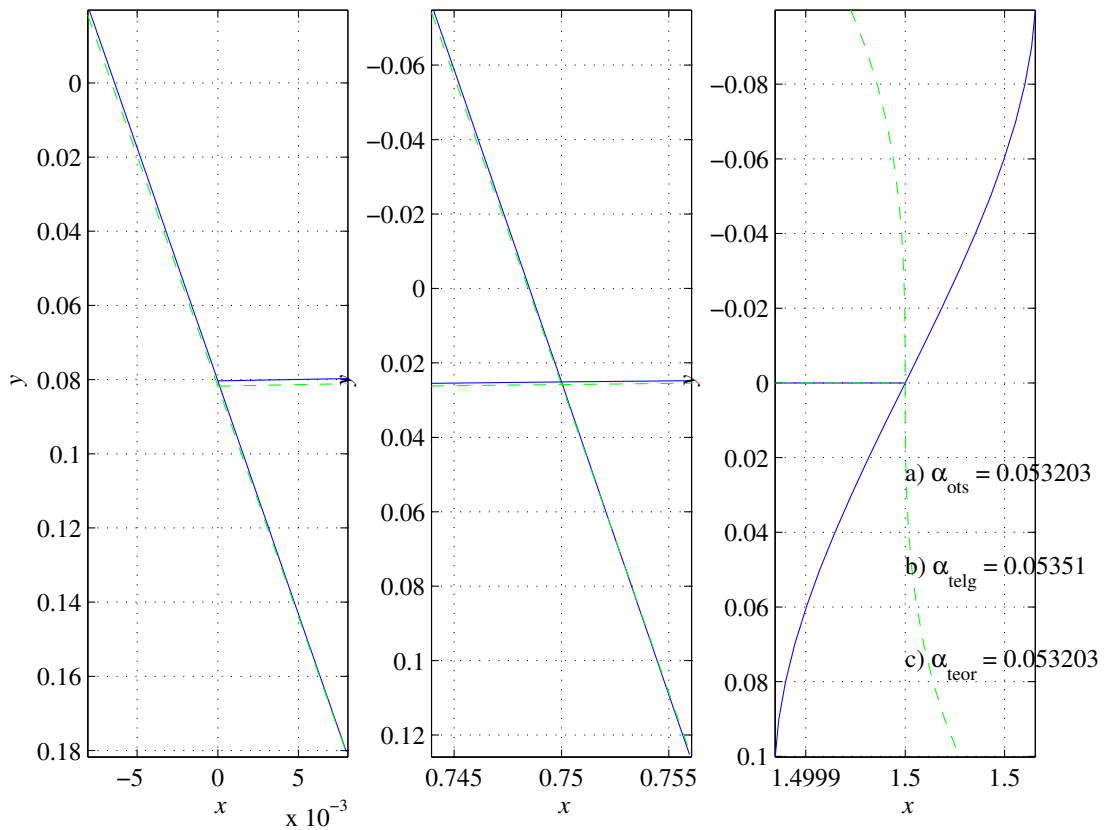
Joonis 5.9: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — roheline kriipsjoon.

Tala telje ja lõigete $x = [0; 0,5l; l]$ deformeerunud kuju. ($b = 0.1\text{m}$; $2c = 0.2\text{m}$; $l = 1.5\text{m}$; $P = 1000\text{ kN}$)



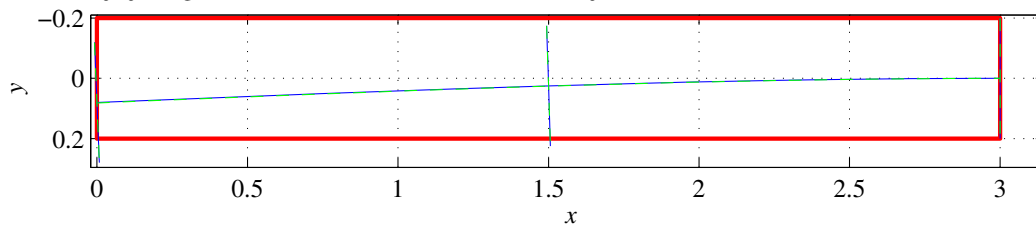
Joonis 5.10: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — roheline kriipsjoon.

Tala telje ja lõigete $x = [0; 0,5l; l]$ deformeerunud kuju. ($b = 0.1\text{m}$; $2c = 0.2\text{m}$; $l = 1.5\text{m}$; $P = 1000\text{ kN}$)

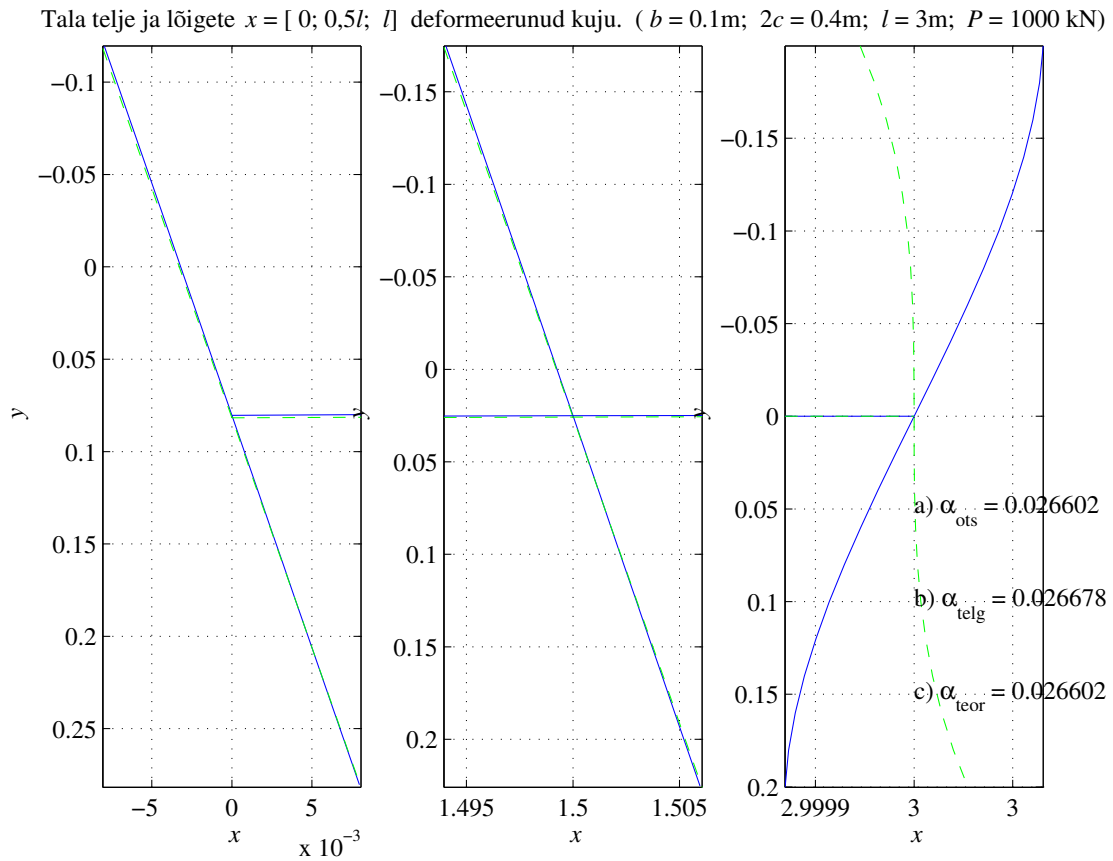


Joonis 5.11: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — roheline kriipsjoon.

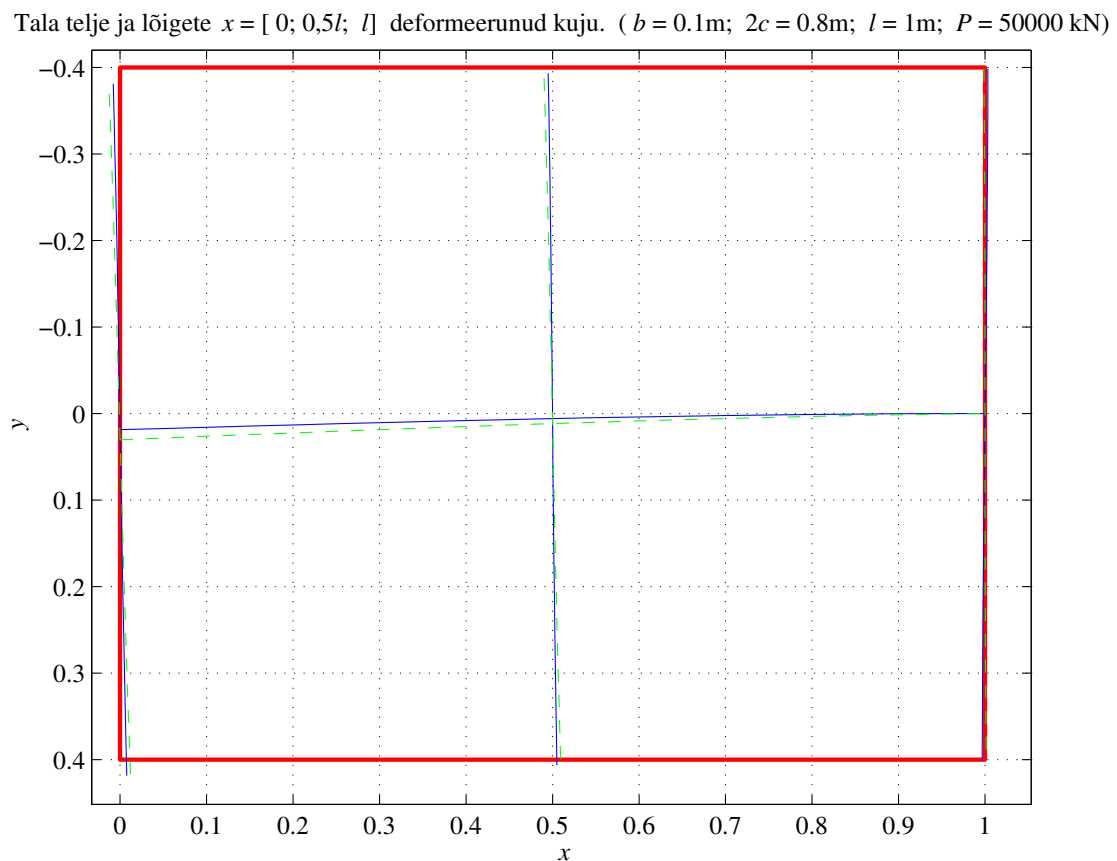
Tala telje ja lõigete $x = [0; 0,5l; l]$ deformeerunud kuju. ($b = 0.1\text{m}$; $2c = 0.4\text{m}$; $l = 3\text{m}$; $P = 1000\text{ kN}$)



Joonis 5.12: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — roheline kriipsjoon.

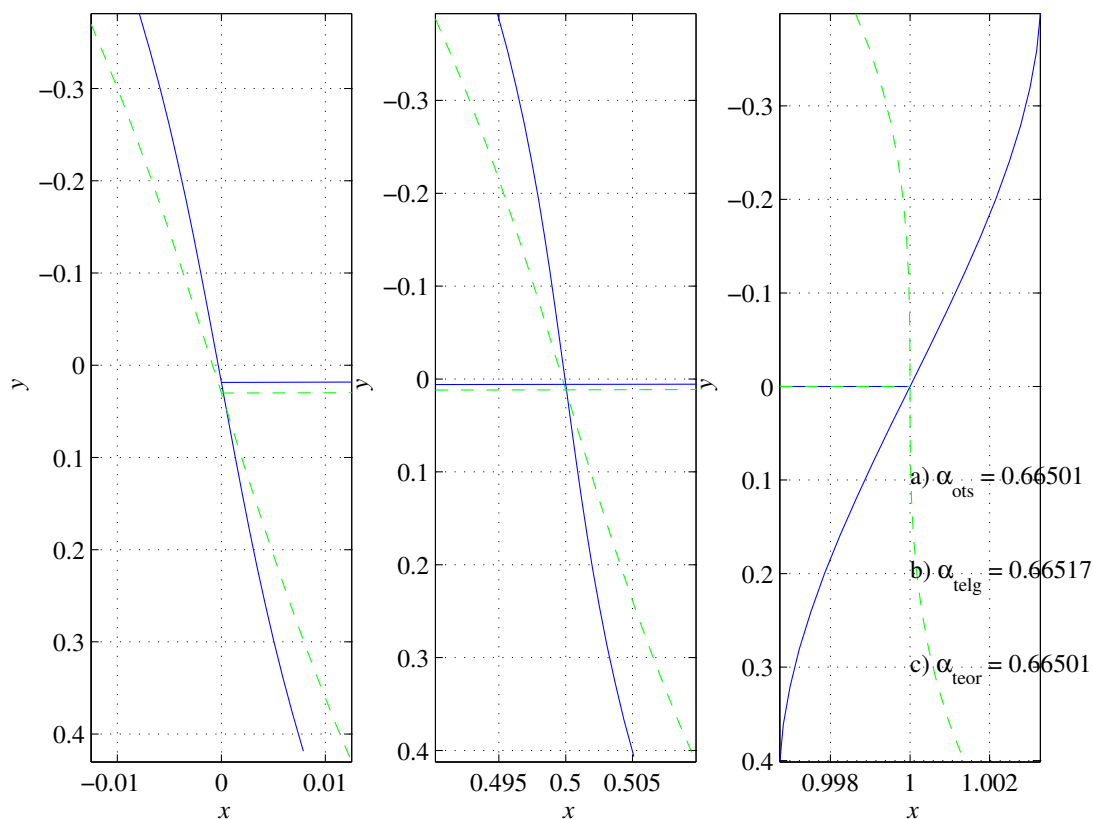


Joonis 5.13: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — roheline kriipsjoon.



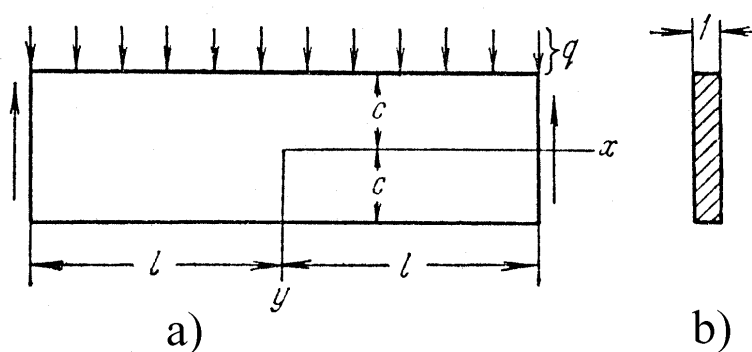
Joonis 5.14: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — roheline kriipsjoon.

Tala telje ja lõigete $x = [0; 0,5l; l]$ deformeerunud kuju. ($b = 0.1\text{m}$; $2c = 0.8\text{m}$; $l = 1\text{m}$; $P = 50000\text{ kN}$)



Joonis 5.15: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — roheline kriipsjoon.

5.7 Ühtlaselt koormatud tala paine



Joonis 5.16: Ühtlaselt koormatud kitsa ristkülikulise ristlõikega tala (tala pikkus $2l$, kõrgus $2c$, paksus 1).

Vaatleme kitsa ristkülikulise ristlõikega tala (joonis 5.16). Tala on otstes vabalt toetatud ja talle mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega q .

Rajatingimused: a) külgpindadel $y = \pm c$

$$\tau_{xy}|_{y=\pm c} = 0, \quad \sigma_y|_{y=+c} = 0, \quad \sigma_y|_{y=-c} = -q; \quad (5.59)$$

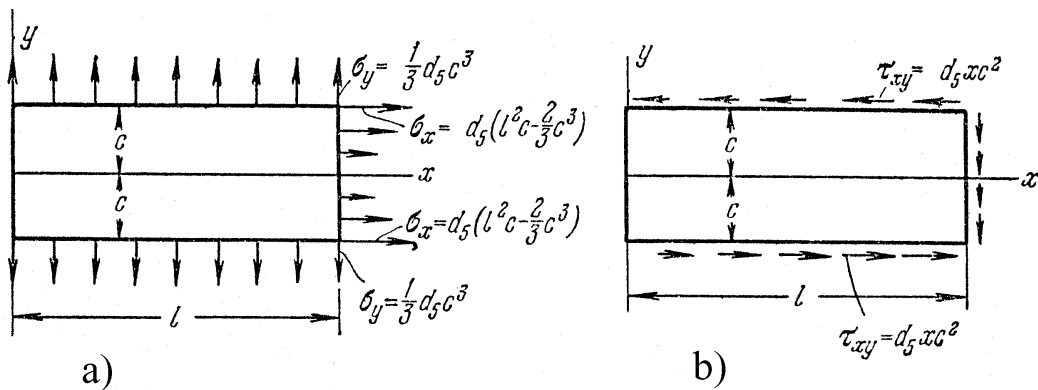
b) otpindadel $x = \pm l$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{-c}^c \tau_{xy}|_{x=\pm l} dy = \mp ql, & \text{põikjõud tala otstes,} \\ \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=\pm l} dy = 0, & \text{pikijõud tala otstes,} \\ \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=\pm l} y dy = 0, & \text{paindemoment tala otstes.} \end{array} \right. \quad (5.60)$$

Rajatingimusi (5.59) ja (5.60) saab rahuldada kui kombineerida alajaotuses 5.5 leitud lahendeid.

Lähtume lahendist (5.34) (lk. 155), millele vastavad rajatingimused on kujutatud joonisel 5.17 Et vabaneda tõmbepingetest küljel $y = c$ ja nihkepingetest külgedel $y = \pm c$ lisame kehale tõmbe σ_y lahendist (5.21) ja pinged $\sigma_y = b_3 y$ ning $\tau_{xy} = -b_3 x$ lahendist (5.23). Kokku saame seega

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = d_5(x^2 y - \frac{2}{3} y^3), \quad \sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3 + b_3 y + a_2, \\ \tau_{xy} = -d_5 x y^2 - b_3 x. \end{array} \right. \quad (5.61)$$



Joonis 5.17: Viiendat järku polünoomile vastavad rajatingimused $d_5 \neq 0$ ja $a_5 = b_5 = c_5 = e_5 = f_5 = 0$ puhul.

Rajatingimustest (5.59) saame

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3q}{4c}, \quad d_5 = -\frac{3q}{4c^3}. \quad (5.62)$$

Arvestades, et $I = I_z = 2c^3/3$ saame valemitest (5.61) ja (5.62)

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{q}{2I}(x^2y - \frac{2}{3}y^3), & \sigma_y = -\frac{q}{2I}(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3), \\ \tau_{xy} = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x. \end{cases} \quad (5.63)$$

Leitud pingekomponendid rahuldavad lisaks rajatingimustele (5.59) ka (5.60)₁₋₂. Et oleks rahuldatud ka (5.60)₃ lisame puhtale paindele vastavad pinged $\sigma_x = d_3y$ ja $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ lahendist (5.23). Rajatingimusest (5.60)₃ leiame

$$d_3 = \frac{3q}{4c} \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right). \quad (5.64)$$

Seega kokku avaldub normaalpinge kujul

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} (l^2 - x^2) y + \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y \right). \quad (5.65)$$

Avaldise (5.65) esimene liige vastab elementaarsele paindeteooriale ning teist saab vaadelda kui parandusliiget ja ta on väike võrreldes esimesega. «Pa- ★ joo- randusliige» on põhjustatud sellest, et elementaarteooria puhul eeldatakse, ^{nis}

et $\sigma_y \equiv 0$, kuid (5.63) põhjal pole see nii. Avaldisega (5.65) esitatud pinged annavad otspindadel nulliga võrduva peavektori ja peamomendi. Lahend on täpne vaid juhul kui otspindadel $x = \pm l$ mõjuks pindjõud

$$t_x = \pm \frac{3q}{4c^3} \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y \right). \quad (5.66)$$

Saint-Venaint'i printsiibi põhjal loetakse lahend täpseks punktides, mis on otstest $x = \pm l$ kaugemal kui tala kõrgus, st. $2c$, ka $t_x = 0$ puhul.

Tala punktide siirded u ja v leitakse analoogselt alajaotusele 5.6. Nüüd eeldatakse, et punktis $x = y = 0$ on horisontaalsed siirded võrdsed nulliga ja vertikaalsed siirded võrdsed läbipaindega δ .

Kokku saame, et

$$\begin{cases} u = \frac{q}{2EI} \left[\left(l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \nu x \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right], \\ v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + \nu \left[(l^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\} - \\ - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right] + \delta. \end{cases} \quad (5.67)$$

Kuna (5.67)₁ põhjal siirded tala keskjoonel

$$u|_{y=0} = \frac{\nu q x}{2E}, \quad (5.68)$$

siis ei osutu keskjoon neutraalseks jooneks. Tala keskjoone läbipaine

$$v|_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right]. \quad (5.69)$$

Kuna tala otsad on vabalt toetatud, siis $v|_{x=\pm l} = 0$ ja

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{q l^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (5.70)$$

Avaldises (5.70) nurksulgude ees olev kordaja esitab elementaarteooriale vastavat läbipainet (eeldades, et tala ristlõiked jäävad deformatsioonil tasapinnalisteks). Teine liige nurksulgudes esitab parandust, st. arvestab põikjõu mõju läbipaindele. Diferentseerides (5.69) kaks korda saame keskjoone kõverust iseloomustava avaldise

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (5.71)$$

Ka selles avaldises vastab esimene liige elementaarteooria valemile ning on proportsionaalne paindemomendiga $q(l^2 - x^2)/2$.

Kui soovitakse arvesse võtta ka omakaalu, tuleb lisada pinge

$$\sigma_y = \rho g(c - y), \quad (5.72)$$

mis annab tala ülemisel pinnal $y = -c$ pingeks $\sigma_y = 2\rho g(c)$ ja alumisel pinnal $y = c$ vastavalt $\sigma_y = 0$.