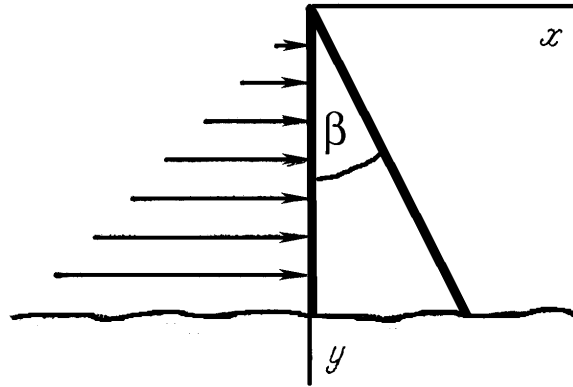


5.8 Hüdrostaatiliselt koormatud tugiseina arvutus.

Vaatleme kolmurkse ristlõikega tugiseina, millele mõjub hüdrostaatiline surve (joon 5.18). Olgu vedeliku tihedus ρ , tugiseina kaldenurk β ja seina materjali erikaal γ . Seega on seinale mõjuvateks välisjõududeks vedelikust põhjustatud hüdrostaatiline surve $p = \rho gy$ ja mahujõud $Y = \gamma$ (seina erikaal). Hülgame



Joonis 5.18: Hüdrostaatiliselt koormatud kolmurkse ristlõikega tugisein.

seina ja vundamendi vahelised mõjud, st., vaatleme $0 \leq y < \infty$. Sellistel

eeldustel on tegu tasapinnalise ülesandega ja rajatingimused

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m. \end{cases}$$

Vertikaalsel küljel $x = 0$ ja pinnanormaali suunakoosinused $l = -1$ ning $m = 0$. Kuna sellele seinale mõjub hüdrostaatiline surve p , siis vastavalt rajatingimustele

$$\begin{cases} \rho gy = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{yx} 0, \\ 0 = \tau_{xy} \cdot (-1) + \sigma_y 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -\rho gy, \\ \tau_{xy} = 0. \end{cases} \quad (5.73)$$

Kaldküljel $x = y \tan \beta$, $l = \cos \beta$, $m = -\cos(90^\circ - \beta) = -\sin \beta$. Kuna kaldkülgl on koormusest vaba, siis saavad rajatingimused kuju

$$\begin{cases} 0 = \sigma_x \cos \beta + \tau_{yx} (-\sin \beta), \\ 0 = \tau_{xy} \cos \beta + \sigma_y (-\sin \beta), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \tau_{yx} \tan \beta, \\ \tau_{xy} = \sigma_y \tan \beta. \end{cases} \quad (5.74)$$

Lahendi leidmisel lähtume kuuppolünoomist (5.22)

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} x y^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3.$$

Vastavalt valemitele (5.15) avalduvad pingekomponendid kujul

$$\sigma_x = c_3x + d_3y; \quad \sigma_y = a_3x + b_3y; \quad \tau_{yx} = -b_3x - c_3y - \gamma x. \quad (5.75)$$

Alternatiivsete valemite (5.16) kaudu aga kujul

$$\sigma_x = c_3x + d_3y; \quad \sigma_y = a_3x + b_3y - \gamma y; \quad \tau_{yx} = -b_3x - c_3y. \quad (5.76)$$

Järgnevalt näeme, et mõlemal juhul saame pärast rajatingimuste (5.73) ja (5.74) rahuldamist sama tulemuse.

Lähtume esiteks valemest (5.75). Rajatingimused vertikaalküljel (5.73) annavad

$$d_3 = -\rho g \quad \text{ja} \quad c_3 = 0. \quad (5.77)$$

Kaldküljel $x = y \tan \beta$ ja rajatingimused (5.74) saavad kuju

$$\begin{cases} 2c_3 \tan \beta + b_3 \tan^2 \beta + d_3 + \gamma \tan^2 \beta = 0 \\ a_3 \tan^2 \beta + 2b_3 \tan \beta + c_3 + \gamma \tan \beta = 0 \end{cases} \quad (5.78)$$

Arvestades (5.77) saame viimastest avaldada

$$a_3 = \frac{\gamma}{\tan \beta} - \frac{2\rho g}{\tan^3 \beta}, \quad b_3 = \frac{\rho g}{\tan^2 \beta} - \gamma. \quad (5.79)$$

Sellel ongi neli tundmatut konstanti määratud ning pingete avaldised (5.75) saavad kuju

$$\sigma_x = -\rho g y; \quad \sigma_y = (\gamma - 2A) \frac{x}{\tan \beta} + (A - \gamma) y; \quad \tau_{yx} = -Ax, \quad (5.80)$$

kus konstant

$$A = \frac{\rho g}{\tan^2 \beta}. \quad (5.81)$$

Kui teha sama protseduur läbi alternatiivsete pingevaldiste (5.76) jaoks, siis saame rajatingimustest (5.73) tulemuseks avaldised (5.77). Rajatingimused kaldküljel annavad aga valemest (5.79) erineva tulemuse konstandi b_3 jaoks

$$a_3 = \frac{\gamma}{\tan \beta} - \frac{2\rho g}{\tan^3 \beta}, \quad b_3 = \frac{\rho g}{\tan^2 \beta}. \quad (5.82)$$

Pannes aga avaldistega (5.77) ja (5.82) esitatud konstantide a_3, \dots, d_3 väärtused pingete avaldistesse (5.76) saame sama tulemuse, mis eelmisel juhul. Seega võime kokkuvõttes öelda, et vaadeldava ülesande korral on pinged tugiseinas leitavad valemite (5.80) abil.

Valemi (5.80)₂ põhjal vertikaalküljel $\sigma_y = (A - \gamma) y$. Seega selleks, et vältida tõmbepingeid ($\sigma_y > 0$) peab $A < \gamma$, kust saame kaldenurga jaoks kriitilise

väärtuse

$$\beta^* = \arctan \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}. \quad (5.83)$$

Kui $\beta > \beta^*$, siis on vertikaalkülg surutud. Võttes vee tiheduseks $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ja sein materjaliks betooni erikaaluga $\gamma = 2400 \text{ g N/m}^3$ saame $\beta^* = \arctan \sqrt{1000/2410} = 32,8^\circ$. Erikaalu $\gamma = 2000 \text{ g N/m}^3$ korral saame aga $\beta^* = 35,2^\circ$.

Vaatleme nüüd tugiseina lõiget $y = y_0$. On selge, et selles lõikes $0 \leq x \leq y_0 \tan \beta$. Vastavalt valemile (5.80) on normaalpinge $\sigma_x = -\rho g y_0$, st. konstantne. Teine normaalpinge, st. σ_y , muutub aga väärtusest $\sigma_y|_{x=0} = (A-\gamma)y_0$ väärtuseni $\sigma_y|_{x=x_0} = -Ay_0$. Nihkepinge $\tau_{xy}|_{x=0} = 0 \leq \tau_{xy} \leq \tau_{xy}|_{x=x_0} = -Ay_0 \tan \beta$.

Tugevusõpetuse kursuse raames saadud valemid, nn. 0-järku lahend, erineb saadust oluliselt pingete σ_x ja τ_{xy} osas, kusjuures σ_y langeb kokku:

$$\sigma_x^0 = 0; \quad \sigma_y = \sigma_y^0 \quad \tau_{xy}^0 = -\frac{3\rho g}{\tan^3 \beta} \left(x \tan \beta - \frac{x^2}{y} \right). \quad (5.84)$$

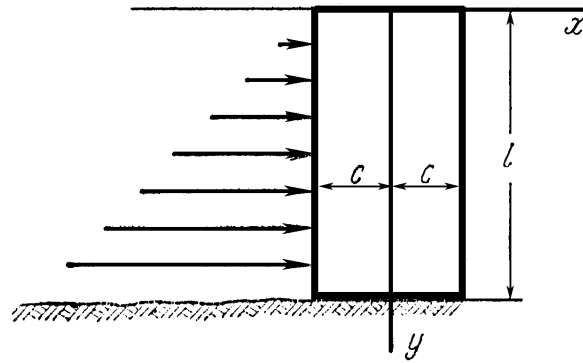
Nihkepinge avaldise puhul on 0-järku teoorias lähtutud samadest eeldustest,

mis talade paindel ja saadud paraboolne jaotus.

Märkused:

- Vaadeldava ülesande lahendusele ei anna polünoomi järgu tõstmine mitte mingeid lisaliikmeid — kõik kõrgemat järku liikmed peavad vaadeldavate rajatingimuste korral olema nullid.
- Käesoleva lahendi puhul pole arvestatud vundamendi mõju — tugiseina alumisel osal on lubatud vabalt deformeeruda. Tegelikult sõltub aga suuremate y väärtuste korral vertikaalne deformatsioon vundamendi jäikusest.
- Kui me sooviksime arvestada ka rajatingimusi tugiseina alumisel osal (seina ja vundamendi kinnituskohas), siis muutuks ülesanne tunduvalt keerukamaks ja teda poleks võimalik lahendada polünoomides.
- Võttes kasutusele kuuendat järku polünoomid, saab leida lahendi ristkülikulise tugiseina (vertikaalse konsooli) jaoks. Seda vaadeldakse järgmises alajaotuses.

5.9 Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool



Joonis 5.19: Vertikaalsele konsoolile mõjuv hüdrostaatiline surve.

Kui üldistada alajaotuses 5.5 esitatud lahendusmeetodikat ja vaadelda 6. järku polünoomi, siis saame leida pingejaotuse hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalse konsooli jaoks:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{\rho g y}{2} + \rho g y \left(\frac{x^3}{4c^3} - \frac{3x}{4c} \right), & \sigma_y = \frac{\rho g y^3 x}{4c^3} + \frac{\rho g}{4c^3} \left(-2yx^3 + \frac{6}{5}c^2 yx \right), \\ \tau_{xy} = \frac{3\rho g y^2}{8c^3}(c^2 - x^2) - \frac{\rho g}{8c^3}(c^4 - x^4) + \frac{\rho g}{4c^3} \frac{3}{5}c^2(c^2 - x^2). \end{cases} \quad (5.85)$$

Siin tähistab ρ vedeliku tihedust (kg/m^3) ja seega on koormuse intensiivsus sügavusel y võrdne $\rho g y$, põikjõud $\rho g y^2/2$ ja paindemoment $\rho g y^3/6$. σ_y ja τ_{xy} avaldiste esimesed liikmed vastavad jällegi elementaarteooriale.

Konsooli vabal otsal $y = 0$ on leitud lahendi põhjal normaalpinged nullid. Nihkepinged

$$\tau_{xy} = \frac{\rho g}{8c^3}(c^4 - x^4) + \frac{\rho g}{4c^3} \frac{3}{5}c^2(c^2 - x^2) \quad (5.86)$$

pole nullid, kuid on väikesed üle kogu pinna ning nende peavektor on ligikaudu null. See võimaldab lugeda väliskoormuse kohal $y = 0$ nulliks.

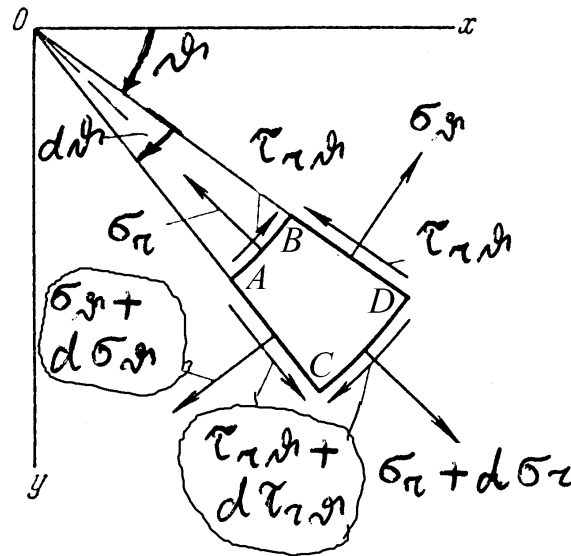
Kui tahetakse arvesse võtta ka konsooli materjali omakaal, siis tuleb σ_y avaldisse lisada liige $-\gamma y$, kus γ on konsooli materjali erikaal.

Vaadeldav lahend pärineb Timoshenko ja Goodier õpikust¹ ning tegelikult pole ka siin arvesse võetud vundamendi mõju.

¹S.P. Timoshenko, J.N. Goodier. Theory of Elasticity. McGraw-Hill, 1970. Venekeelne tõlge: Teoria uprugosti, Mir, Moskva, 1975.

5.10 Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides

5.10.1 Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon



Joonis 5.20: Väikese elemendi $ABCD$ tasakaal.

DRK-s esitatud tasakaaluvõrrandite analoog saadakse kui vaadeldakse elemendi $ABCD$ tasakaalu ja projekteeritakse tema külgedel mõjuvad sum-

5.10.1. Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon

maarsed jõud ja mahujõud ϑ ja r sihile. Minnes üle piirile $d\vartheta \rightarrow 0$ ja $dr \rightarrow 0$ saame

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + f_r = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{r} + f_\vartheta = 0. \end{cases} \quad (5.87)$$

Siin tähistavad f_r ja f_ϑ mahujõudude projektsioone radiaal ja tangentsiaal suunale (r ja ϑ kasvamise suunale).

Ka siin saab mahujõudude puudumisel sisse tuua Airy' pingefunktsiooni $\varphi = \varphi(\vartheta, r)$, nii et

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}, & \sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\vartheta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right). \end{cases} \quad (5.88)$$

Nüüd Laplace'i operaator

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \quad (5.89)$$

ja biharmooniline võrrand

$$\nabla^4 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (5.90)$$

Kui pingekomponendid ja seega ka φ sõltuvad vaid koordinaadist r , siis saab võrrandi (5.90) üldlahendi esitada kujul

$$\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D. \quad (5.91)$$

5.10.2 Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides

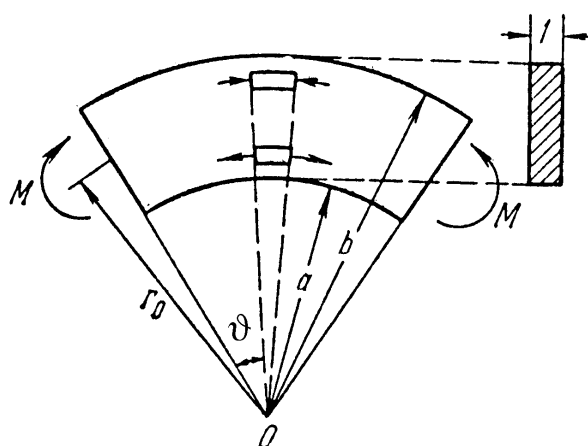
$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \\ \gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{cases} \quad (5.92)$$

Siin mõistetakse suurusid u ja v kui radiaalset ja tangentsiaalset siirdekomponeenti. Hooke'i seaduse kuju jääb endiseks:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta), \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E}(\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r), \quad \gamma_{r\vartheta} = \frac{\tau_{r\vartheta}}{G}. \quad (5.93)$$

Siirete määramine toimub analoogiliselt DRK-ga.

5.11 Kõvera tala paine



Joonis 5.21: Kõvera tala paine.

Näitena vaatleme kõvera tala puhast painet, st. vaatleme tala, mis paindub kõverustasapinnas otstesse rakendatud momentide M mõjul. Sel juhul jääb paindemoment konstantseks kogu varda pikkuse ulatuses, järelikult sõltub pinge vaid radiaalkoordinaadist r . Seega saab kasutada lahendit (5.91).

Rajatingimused:

$$\begin{cases} \sigma_r = 0, & r = a, r = b, \\ \int_a^b \sigma_\vartheta dr = 0, & \int_a^b \sigma_\vartheta r dr = -M \\ \tau_{r\vartheta} = 0, & \text{kõigil rajapindadel.} \end{cases} \quad (5.94)$$

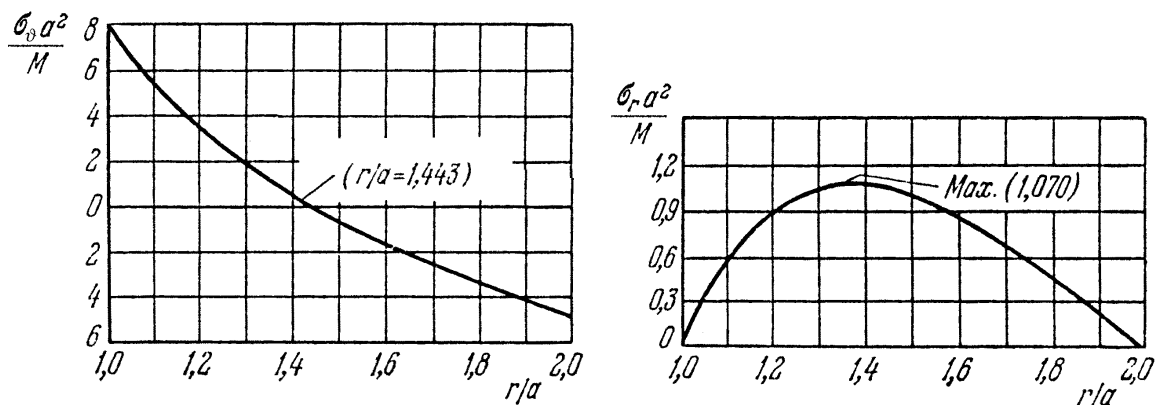
Pärast rajatingimuste (5.94) rahuldumist ja tähistuse

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \ln^2 \frac{b}{a} \quad (5.95)$$

sissetoomist saame

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right), \\ \sigma_\vartheta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right), \\ \tau_{r\vartheta} = 0. \end{cases} \quad (5.96)$$

Lahend on täpne vaid siis kui pingeaotus otspindadel vastab avaldisele (5.96)₂. Muil juhtudel tuleb rakendada Saint-Venanti printsiipi.



Joonis 5.22: Pingete jaotus kõvera tala painel.

Joonisel 5.22 on esitatud suurused $\sigma_\vartheta a^2/M$ ja $\sigma_r a^2/M$ sõltuvana suhtest r/a juhul kui $b/a = 2$. Järeldused: 1) $\sigma_r > 0$ iga r puhul vaadeldavas piirkonnas; 2) neutraalne telg vastab $r/a = 1,443$ ja $\max \sigma_\vartheta > |\min \sigma_\vartheta|$; 3) σ_r maksimum ei asu neutraalsel teljel.

5.12 Pöörlev ketas

Teiseks näiteks polaarkoordinaatide puhul on pöörleva ketta ülesanne. Vaatleme pöörlevat ketast, mis pöörleb jääva nurkkiirusega ω . Ketta paksuse loeme raadiusega võrreldes väikeseks. Ainsaks mahujõuks (mida arvesse võtame) on inertsjõud, st. $f_r = \rho\omega^2 r$ ja $f_\vartheta = 0$. Antud juhul on tegu nn. polaarsümmeetrilise ülesandega, kus σ_r ja σ_ϑ sõltuvad vaid koordinaadist r ja seega valemi (5.88) põhjal $\tau_{r\vartheta} = 0$. Teine tasakaaluvõrrandeist (5.87) on antud juhul automaatselt rahuldatud ja esimesele saab anda kuju

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\vartheta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \quad (5.97)$$

Kuna ka ε_r ja ε_ϑ on vaid r funktsioonid, siis (5.92) põhjal

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r}. \quad (5.98)$$

Hooke'i seadusest (5.93)

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r - \nu\varepsilon_\vartheta), \quad \sigma_\vartheta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\vartheta - \nu\varepsilon_r). \quad (5.99)$$

Asendades nüüd deformatsioonikomponendid (5.98) Hooke'i seadusse (5.99) ning viimase omakorda tasakaaluvõrrandisse (5.97) saame diferentsiaalvõrrandi siirdekomponendi u määramiseks:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho\omega^2 r^3. \quad (5.100)$$

Selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend avaldub kujul

$$u = \frac{1}{E} \left[(1-\nu)Cr - (1+\nu)C_1 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8} \rho\omega^2 r^3 \right]. \quad (5.101)$$

Vastavad pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 r^2, \\ \sigma_\vartheta = C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2. \end{cases} \quad (5.102)$$

Konstandid C ja C_1 määratakse rajatingimustest.

Täisketta (ilma auguta keskel) puhul vastab $r = 0$ siire $u = 0$, seega $C_1 = 0$. Ketta serval $r = b$ jõudude puudumisel $\sigma_r = 0$, seega

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 b^2. \quad (5.103)$$

Seega pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 - r^2) \\ \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2b^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2r^2 \end{cases} \quad (5.104)$$

Plaadi keskel on neil pingetel maksimaalne väärtus

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2b^2. \quad (5.105)$$

Kui ketta keskel on ava raadiusega a , siis konstandid C ja C_1 määratakse rajatingimustest $\sigma_r|_{r=a} = \sigma_r|_{r=b} = 0$ —

$$C = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(a^2 + b^2), \quad C_1 = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2a^2b^2. \quad (5.106)$$

Pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2 \right), \\ \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2 \right). \end{cases} \quad (5.107)$$

Radiaalpinge on nüüd maksimaalne kohal $r = \sqrt{ab}$ ja tangentsiaalpinge sisesisel serval

$$\begin{cases} \max \sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b-a)^2, \\ \max \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{4}\rho\omega^2 \left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu}a^2 \right). \end{cases} \quad (5.108)$$

Kui $a \rightarrow 0$, siis $\max \sigma_\vartheta$ läheneb väärtusele, mis on kaks korda suurem kui avaldisega (5.105) esitatud väärtus. Seega kui teha täisketta tsentrisse väike ava, siis suureneb tangentsiaalpinge plaadi tsentris kaks korda.