

5.13 Radiaalne pingus.

Küllaltki tihti esineb ülesandeid, kus igas keha punktis on nullist erinev vaid radiaalne pinge σ_r . Sellist pingust nimetatakse *radiaalseks pinguseks*.

Antud juhul saab esitada pinge $\sigma_r(r, \vartheta)$ kahe funktsiooni korrutisena:

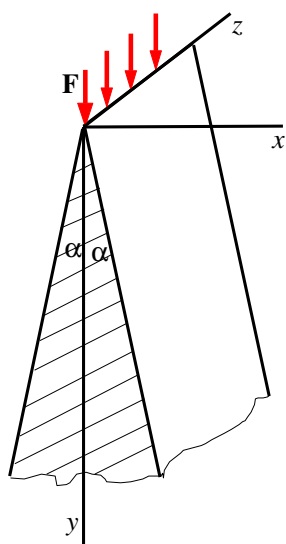
$$\sigma_r(r, \vartheta) = \varphi(r)\psi(\vartheta). \quad (5.109)$$

Pannes viimase tasakaalu- ja pidevusvõrrandesse ning integreerides, saame radiaalse pinguse jaoks pingekomponentide avaldised

$$\sigma_r(r, \vartheta) = -\frac{k}{r} \cos(\vartheta - \vartheta_0), \quad \sigma_\vartheta = \tau_{r\vartheta} = 0, \quad (5.110)$$

kus integreerimiskonstandid k ja ϑ_0 määratakse rajatingimustest.

5.14 Kiilu surve.



Joonis 5.23: Sümmeertiline kiil ja tema sümmeetriatasandis mõjuv jõud.

Joonis 5.24: Sümmeertilisele kiilule mõjuv jõud, radiaalne pinge, polaar ja ristkoordinaadid. **Joonis loengus!**

Vaatleme lõpmata pikka sümmeetrilist kiilu (joonis 5.23), mille sümmeetriatasandis mõjub joonkoormus \mathbf{F} . Kiilu tipunurga tähistame 2α .

Analoogselt tugiseina arvutusega, hülgame rajatingimused kiilu alaservas ja vaatleme $0 \leq y \leq \infty$.

Võtame kasutusele polaarkoordinaadid r ja ϑ (joonis 5.24). Sellisel juhul on tegu radiaalse pingusega ja pingekomponendid on esitatavad kujul (5.110). Konstantide k ja ϑ_0 määramiseks tuleb kõik joonisel 5.24 kujutatud jõud (ja pinged) projekteerida koordinaatide r ja ϑ (või x ja y sihile). Kuna välisjõud on vaadeldaval juhul vertikaalne (ja mõjub sümmeetriatasandis), siis on konstant $\vartheta_0 = 0$. Konstandi k määramiseks projekteeritakse \mathbf{F} ja σ_r y -teljele:

$$F - \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r \cos \vartheta r dr = 0, \quad (5.111)$$

kust arvestades (5.110) saame

$$F - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{k}{r} \cos^2 \vartheta r dr = 0, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha}. \quad (5.112)$$

Kokku saame seega lahendi kujul:

$$\sigma_r = -\frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \vartheta}{r}, \quad \sigma_\vartheta = \tau_{r\vartheta} = 0. \quad (5.113)$$

Kuna valemite (5.110) tuletamisel kasutati nii tasakaalu kui pidevuse võrrandeid, siis rahuldab ka vaadeldava ülesande lahend (5.113) nii tasakaalu kui pidevuse võrrandeid.

Praktiliste probleemide korral (vt. näiteks järgmist alajaotust) on siiski otsustav kasutada koordinaate x ja y . Üleminekuks on järgmised valemid:

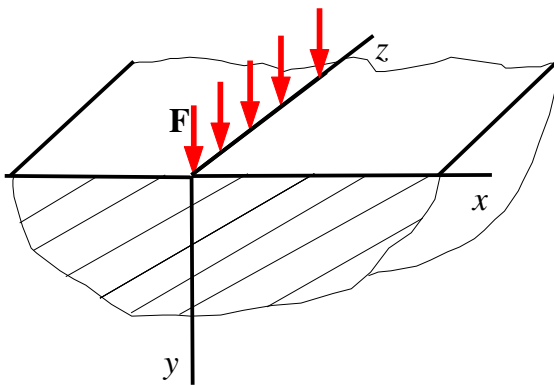
$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_r l^2 + \sigma_\vartheta m^2 + 2\tau_{r\vartheta} l m, \\ \sigma_y = \sigma_r l_1^2 + \sigma_\vartheta m_1^2 + 2\tau_{r\vartheta} l_1 m_1, \\ \tau_{xy} = \sigma_r l l_1 + \sigma_\vartheta m m_1 + \tau_{r\vartheta} (l m_1 + l_1 m), \end{cases} \quad (5.114)$$

$$\begin{cases} l = \cos(r, x) = \sin \vartheta, \\ m = \cos(\vartheta, x) = \cos \vartheta, \\ l_1 = \cos(r, y) = \cos \vartheta, \\ m_1 = \cos(\vartheta, y) = -\sin \vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (5.115)$$

Kokku saame kolm koordinaatidele x ja y vastavat pingekomponenti

$$\sigma_x = -\frac{kx^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{ky^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{kxy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (5.116)$$

5.15 Koondatud jõu mõju pooltasandile



Joonis 5.25: Elastsele pooltasandile mõjuv koondatud jõud.

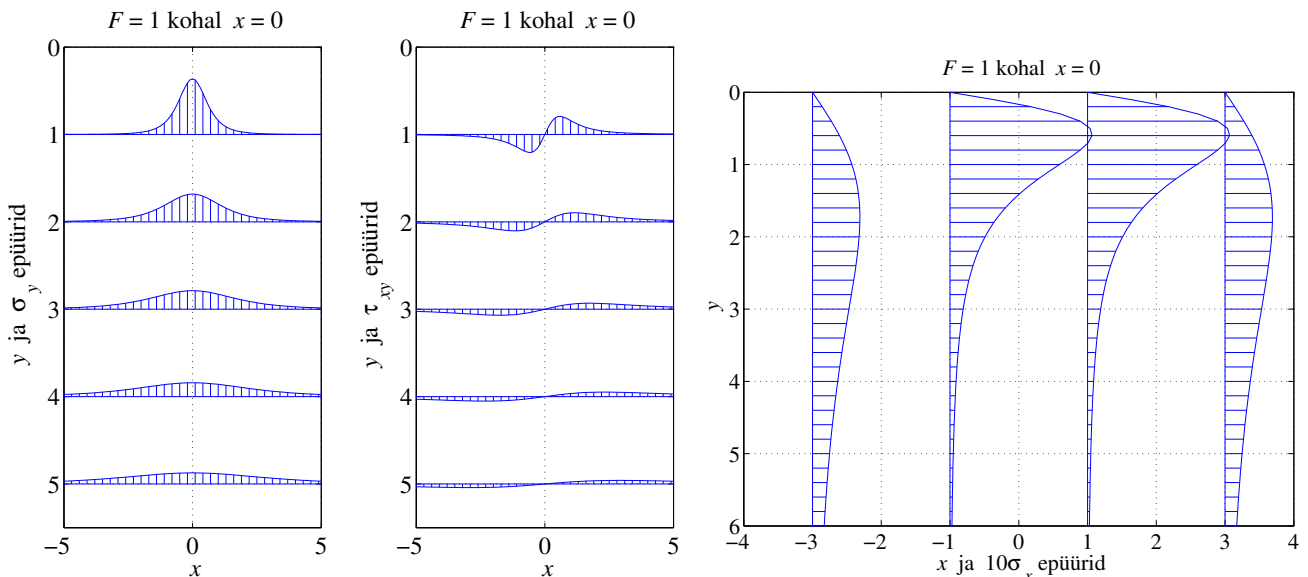
Vaatleme elastset keskkonda, mis on piiratud koordinaattasandiga (x, z) ja millele mõjub piki z telge rakendatud jõud \mathbf{F} . Selline ülesanne on tuntud *Flamant' ülesandena* ja ta kujutab endast eelmises alajaotuses vaadeldud kiilu ülesande erijuhtu, kus nurk $\alpha = \pi/2$. Järelikult konstant $k = 2F/\pi$ ja pingekomponendid polaarkoordinaatides

$$\sigma_r = -\frac{2F \cos \vartheta}{\pi r}, \quad \sigma_\vartheta = \tau_{r\vartheta} = 0 \quad (5.117)$$

ning ristkoordinaatides

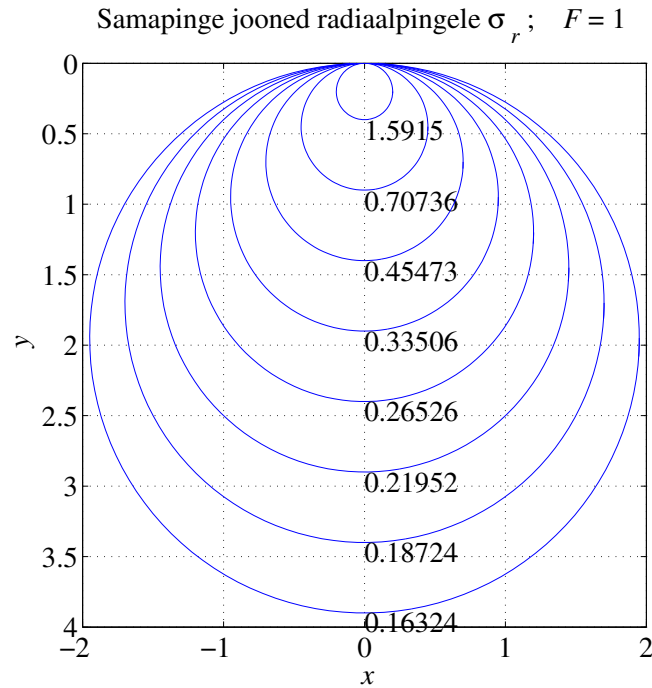
$$\sigma_x = -\frac{2Fx^2y}{\pi(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2Fy^3}{\pi(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2Fxy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2}. \quad (5.118)$$

On selge, et vaadeldavas piirkonnas on normaalpinged negatiivsed iga x ja



Joonis 5.26: Normaapingete σ_y , σ_x ja nihkepinge τ_{xy} epüürid koordinaatide x ja y fikseeritud väärtuste korral.

y korral, nihkepinge τ_{xy} aga muudab jõu rakenduspunkti kohal oma märki: negatiivsete x korral on $\tau_{xy} > 0$ ja positiivsete x korral on $\tau_{xy} < 0$. Joonisel 5.26 on esitatud normaalpinge σ_y ja nihkepinge τ_{xy} epüürid koordinaadi y fikseeritud väärtustel $y_0 = 1, 2, \dots, 5$ ning normaalpinge σ_x epüürid koordi-

Joonis 5.27: Samapinge jooned radiaalpinge σ_r jaoks.

naadi x fikseeritud väärtustel $x_0 = -3, -1, 1, 3$. Fikseeritud y korral omab normaalpinge σ_y ekstremaalset väärtust kohal $x = 0$, ja nihkepinge τ_{xy} kohal $|x| = y_0/\sqrt{3}$. Analoogiliselt, fikseeritud x korral omab normaalpinge σ_y $\sqrt{}$

ekstremaalset väärtust kohal $y = x_0/\sqrt{3}$.

Joonisel 5.27 on esitatud radiaalpinge σ_r samapinge jooned — ringjoonel raadiusega r_0 on radiaalpinge $\sigma_r = -F/\pi r_0$. Kõik sellised ringjooned puutuvad x -telge jõu \mathbf{F} rakenduspunktis. Taolise graafilise radiaalpingte esituse andis esmakordselt Joseph Boussinesq ning seetõttu nimetatakse neid ringe *Boussinesqi ringideks*.

Valemeid (5.117) ja (5.118) võib kasutada selleks, et hinnata vundamendi-aluseid pingeid pinnases. Kuigi pinnas üldiselt ei käitu elastselt, on siiski leitud, et väikeste sisepingete korral on kõigil pinnastel rakendatav lineaarne elastsusteooria.

Saadud lahend on lihtsalt üldistatav suvalise joonkoormuse $p(x)$ jaoks, mis mõjub lõigul $[a, b]$. Kui koondatud jõud \mathbf{F} mõjub punktis $x = x_0$, siis saavad valemid (5.118) kuju

$$\sigma_x = -\frac{2F\xi^2 y}{\pi(\xi^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2Fy^3}{\pi(\xi^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2F\xi y^2}{\pi(\xi^2 + y^2)^2} \quad (5.119)$$

kus $\xi = x - x_0$. Saadud valemities tuleb nüüd asendada $F = p(\xi)d\xi$ ja integ-

reerida lõigul $[a, b]$. Juhul kui $p = \text{const.}$, saame

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2p}{\pi} \int_{x=a}^{x=b} \frac{\xi^2 y}{(\xi^2 + y^2)^2} d\xi = -\frac{p}{\pi} \left(\arctan \frac{\xi}{y} - \frac{y\xi}{\xi^2 + y^2} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ &= -\frac{p}{\pi} \left[\arctan \frac{(x-b)}{y} - \arctan \frac{(x-a)}{y} - \frac{y(x-b)}{(x-b)^2 + y^2} + \frac{y(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \right],\end{aligned}\quad (5.120)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= -\frac{2p}{\pi} \int_{x=a}^{x=b} \frac{2py^3}{(\xi^2 + y^2)^2} d\xi = -\frac{p}{\pi} \left(\arctan \frac{\xi}{y} + \frac{y\xi}{\xi^2 + y^2} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ &= -\frac{p}{\pi} \left[\arctan \frac{(x-b)}{y} - \arctan \frac{(x-a)}{y} + \frac{y(x-b)}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{y(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \right],\end{aligned}\quad (5.121)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= -\frac{2p}{\pi} \int_{x=a}^{x=b} \frac{\xi y^2}{(\xi^2 + y^2)^2} d\xi = \frac{p}{\pi} \frac{y^2}{\xi^2 + y^2} \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ &= \frac{p}{\pi} \left[\frac{y^2}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right].\end{aligned}\quad (5.122)$$

Saadud valemite (5.120)–(5.122) abil on võimalik hinnata pingeid vundamendialuses pinnases.

Jaan Metsaveere koostatud õppevahendis² on välja pakutud alternatiivne valem

$$\sigma_y^* = \frac{p}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}},\quad (5.123)$$

kus p on alusmüüri pikkusühikule mõjuv koormus, $2a$ vundamendi pikkus ja $-a \leq x \leq a$. See valem baseerub ideel määrata vundamendi ja pinnase vaheline rõhk, mis põhjustab ühtlase vertikaalsiirde kogu vundamendi ulatuses. Viimane valem põhjal paeks vundamendi servades $x = \pm a$ tekkima lõpmata suured pinged. Tegelikult selline olukord ei realiseeru — juba suhteliselt väikeste pingete juures tekkivad $x = \pm a$ ümbruses plastsed deformatsioonid ning tegelik pingeaotus on tunduvalt ühtlasem.

²J. Metsaveer, Plaatide arvutus ja tasandülesanne, Tallinn, 1987