Peatükk 6

Õhukeste plaatide paine

6.1 Plaatide paindeteooria põhimõisted ja hüpoteesid

Plaat on prismaatiline või silindriline keha, mille kõrgus on väike võrreldes teiste dimensioonidega.[1] Harilikult nimetame seda kõrgust *plaadi paksuseks* ja tähistame h.

Pinda, mis jagab plaadi paksuse kaheks võrdseks osaks, nimetatakse plaadi *keskpinnaks.*

Koordinaatteljed valime nii, et x ja y teljed on kesktasandil ning z telg on suunatud alla (joonis loengus). Plaadi pikkuse tähistame a ja laiuse b.

Plaadile mõjuva koormuse saab alati lahutada kaheks komponendiks.

- Plaadi keskpinnaga ristuv koormus ehk põikkoormus
  - Plaadi paine
- Plaadi keskpinna sihis mõjuv koormus
  - Stabiilsus — kriitiline koormus — mõlkumine

[1] Tihti defineeritakse plaat kui kooriku erijuht. *Koorik* on konstruktsioonielement, mille üks mõõde on teistega võrreldes väike. *Plaat* on koorik, mille kõverus on null, st. mida ümbritsevatest pindadest kaks on paralleelsed tasandid.

Plaatide liigitus.

Paksuse järgi.

- Paksus võib olla nii konstantne kui muutuv.
- Õhukesed ja paksud. Õhukeseks[2] loetakse plaati, mille lühema külje pikkuse b on vähemalt viis korda suurem kui paksus h, st., $b/h \geq 5$.

Materjali omaduste järgi.

- isotroopsed plaadid — metallplaadid
- anisotroopsed plaadid
  - ortotroopsed plaadid — vineer, ristsarrusega raudbetoonplaat (nõrgalt ortotroopne)

[2] R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967

Painde iseloomu järgi.

- *Jäigad plaadid.* Kui plaadi maksimaalne läbipaine on võrreldes plaadi paksusega väike, siis võtavad enamuse väliskoormusest vastu paindemomendid ja põikjõud. Selliseid plaate nimetatakse jäikadeks. Metsaveere[3] põhjal on väike läbipaine 10% paksusest, Eegi ja Poveruse[4] põhjal aga 1/3.
- *Membraanid.* Kui läbipainded ületavad mitmekordselt (Eek & Poverus: 5 korda) plaadi paksuse, siis võtavad enamuse koormusest vastu plaadi kesktasandis tekkivad pikijõud — nn. aheljõud. Selliseid plaate nimetatakse membraanideks.
- *Painduvad plaadid.* Plaate, mis pole ei jäigad ega membraanid nimetatakse painduvateks.

Jäikade plaatide puhul hüljatakse ahelpinged, membraanide puhul paindepinged. Painduvate plaatide korral tuleb aga arvesse võtta mõlemad.

[3] J. Metsaveer, Plaatide arvutus ja tasandülesanne, Tallinn, 1987

[4] R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967

Kuna maksimaalne läbipaine sõltub mõjuvast koormusest, siis võib sama plaat töötada nii jäigana, painduvana kui membraanina.

Käesolevas kursuses vaatleme vaid õhukesi ühtlase paksusega isotroopseid jäiku plaate. Sellise plaadi töö koormuse vastuvõtmisel on paljuski sarnane tala tööle. Samas aga on sisejõudude ja toereaktsioonide leidmisel olulisi erinevusi.

Õhukeste jäikade plaatide paindeteoorias on kasutusel terve rida lihtsustavaid hüpoteese, mis on sarnased tugevusõpetuses kasutatavatele. Samas ei käsitleta plaate tugevusõpetuse vaid hoopis elastsusõpetuse raames ülesannete keerukuse tõttu.

Hüpoteesid

1. Plaadi keskpind ei pikene ega lühene vaid ainult paindub (kõverdub).
   - See viitab jäiga plaadi definitsioonile.
   - Kesktasandi punktide siirded on vaid z telje sihis, plaadi pinna sihis on siirded nullid.

2. Sirged, mis enne paindumist olid keskpinnaga risti, jäävad ka peale paindumist keskpinnaga ristuvateks sirgeteks.
   - Analoogia talade juures kasutatava ristlõigete tasandilisuse hüpoteesiga.
3. Plaadi mõtteliste kihtide vahelised kaugused paksuse sihis paindumisel ei muutu.
   - Plaadi keskpinna siire $w = w(x, y)$.
4. Plaadi paksuse sihilised normaalpinged hüljatakse väiksuse tõttu, st. $\sigma_z = 0$.
   - Kuna plaat on õhuke, siis ei mõjuta see lihtsustus oluliselt lahendit.
5. Koormus mõjub plaadi pinnaga risti ja on esitatud ruumjõuna:

$$Z(x, y, z) = \frac{3}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(x, y). \tag{6.1}$$

- Selline koormussedus annab välispinnale $z = \pm 0,5h$ nullise koormuse, plaadi keskpinna ühiku kohta aga summaarse koormuse

$$\int_{-h/2}^{h/2} Z(x, y, z)dz = \ldots = p(x, y). \tag{6.2}$$

- Tavaliselt vaadeldaksegi plaadi keskpinnal mõjuvat koormust kujul $p(x, y)$.

6.2 Plaadi läbipainde ja plaadi punktide siirete ning deformatsioonide vahelised seosed

Plaadi kesktasandi punktide vertikaalsiiret $w(x, y)$ nimetatakse *läbipaindeks.*

Esimese kolme hüpoteesi põhjal on võimalik avaldada plaadi suvalise punkti siirdekomponendid u ja v läbipainde $w(x, y)$ kaudu.

Vaatleme plaadi keskpinna normaali punktide A ja B liikumist paindel (joonis loengus!) ja leiame siirdekomponentide u ja w vahelise seose.

- Vastavalt tehtud hüpoteesidele saab keskpinna punkt A liikuda vaid vertikaalselt. Keskpinna normaal peab aga jääma ka peale deformatsiooni risti kesktasandiga, seejuures $AB = A'B' = z$.
- Plaadi keskpind punktis A pöördub nurga α võrra. Sama nurga võrra pöördub ka sirge AB.
- Seega punkti B siire x telje sihis $u = -z \sin \alpha$.
- Kuna nurk α on väike, siis

$$\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{6.3}$$

Analoogiliselt saame siduda ka siirdekomponendid v ja w. Kokkuvõttes oleme saanud valemid

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{ja} \qquad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{6.4}$$

Cauchy seoste (3.6) ja valemite (6.4) põhjal

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{6.5}$$

6.3 Plaadi elastse pinna võrrand

Lähtume tasakaalu diferentsiaalvõrranditest (2.6)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

- Diferentseerime esimest tasakaaluvõrrandit x järgi, teist y järgi ja kolmandat z järgi.

- Arvestades nihkepingete paarsusseadust saame ellimineerida τ_{yz} ja τ_{xz}.
- Arvestades et $\sigma_z = X = Y = 0$ ja Z on antud avaldisega (6.1) saame lõpuks võrrandi

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = -\frac{zp(x,y)}{i}, \tag{6.6}$$

kus suurus

$$i = \frac{h^3}{12} \tag{6.7}$$

kujutab endast plaadi ristlõike inertsimomenti pikkusühiku kohta, st., inertsimomendi intensiivsust. Nüüd rakendame Hooke'i seadust kujul

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \tag{6.8}$$

koos seostega (6.5) ning saame pingete ja läbipainete vahelised seosed

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ \sigma_y = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ \tau_{xy} = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]. \end{cases} \tag{6.9}$$

Pannes viimased pingeavaldised võrrandisse (6.6) saamegi plaadi elastse pinna võrrandi

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}. \tag{6.10}$$

Suurust

$$D = \frac{Ei}{1-\nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{6.11}$$

nimetatakse *silindriliseks paindejäikuseks*. Suurust $E/(1-\nu^2)$ võib siinjuures nimetada *plaadi taandatud elastsusmooduliks.* Võrrand (6.10) on jällegi *biharmooniline võrrand.*

Plaadis mõjuvate pingete leidmiseks tuleb seega kõigepealt lahendada biharmooniline võrrand (6.10). Tulemusena saame plaadi läbipainde avaldise $w(x,y)$. Seejärel saame seoste (6.9) abil leida pinged σ_x, σ_y ja τ_{xy}. Nihkepingete τ_{yz} ja τ_{xz} määramiseks tuleb kasutada kahte esimest tasakaaluvõrrandit, kust saab avaldada osatuletised $\partial\tau_{xz}/\partial z$ ja $\partial\tau_{yz}/\partial z$. Peale integreerimist z järgi rajatingimustel $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ plaadi pindadel $z = \pm 0,5z$ saame

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\dfrac{E\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{2(1-\nu^2)}\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right), \\ \\ \tau_{yz} = -\dfrac{E\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{2(1-\nu^2)}\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right). \end{cases} \tag{6.12}$$

6.4 Sisejõud

Talade korral mõisteti sisejõudusid kogu tala laiuse ulatuses, st, sisejõuks nimetati mingis ristlõikes mõjuvat summaarset jõudu või momenti. Plaatide korral on kasutuses teistsugune lähenemine. Siin nimetatakse sisejõuks hoopis sisejõu intensiivsust. Teisisõnu, painde- ja väändemomentide ning põikjõu asemel vaadeldakse vastavaid suurusi pikkusühiku kohta.

Taladest erinev on ka paindemomentide ja põikjõu tähistus. Plaatide puhul on kombeks tähistada pinge σ_x poolt põhjustatud paindemomenti M_x ja σ_y poolt põhjustatut M_y. Pingest τ_{xz} ja τ_{yz} põhjustatud põikjõudusid tähistatakse vastavalt Q_x ja Q_y. Seega viitab plaatide korral paindemomendi ja põikjõu tähises olev indeks vaadeldava ristlõike normaali sihile. Väändemomendid $T_{xy} = T_{yx}$ on põhjustatud nihkepingetest $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (joonis loengus).

Painde- ja väändemomendid. Momentide arvutamine käib tavapärasel moel ning arvestades avaldisi (6.9) saame painde- ja väändemomendid esitada läbipainde w kaudu:

$$\begin{cases} M_x = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_x dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_y dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ T_{xy} = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{xy} dz = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases} \tag{6.13}$$

Põikjõudude jaoks saame avaldised

$$\begin{cases} Q_x = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right), \\ Q_y = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right). \end{cases} \tag{6.14}$$

Märgireeglid kattuvad talade juures kasutatavatega. Positiivne paindemoment põhjustab positiivsete kihtide ($z > 0$) tõmmet. Positiivne põikjõud mõjub positiivsel pinnal z telje positiivses suunas.

Vastupidised seosed (joonis loengus):

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{M_x}{i} z, \qquad \sigma_y = \dfrac{M_y}{i} z, \qquad \tau_{xy} = \dfrac{T_{xy}}{i} z, \\ \\ \tau_{xz} = \dfrac{3Q_x}{2h} \left(1 - 4\dfrac{z^2}{h^2}\right), \qquad \tau_{yz} = \dfrac{3Q_y}{2h} \left(1 - 4\dfrac{z^2}{h^2}\right) \end{cases} \tag{6.15}$$

On selge, et paindepinged σ_x ja σ_y ning nihkepinge (väändepinge) τ_{xy} muutuvad ristlõikes lineaarse seaduse põhjal ning omavad ekstreemseid väärtusi kohal $z = \pm 0,5h$. Nihkepinged τ_{xz} ja τ_{yz} muutuvad aga ruutparaboolse seduse järgi omades maksimumi kohal $z = 0$ (joonis loengus).

6.4.1 Toereaktsioonid

Talade korral on reaktsioonjõud arvuliselt võrdsed põikjõuga toe kõrval. Plaatide puhul on olukord aga pisut komplitseeritum, sest reaktsioonjõud R_x (mõjub x telje sihilise normaaliga pinnal) ja R_y peavad tasakaalustama ka

plaadis tekkinud väändemomendi mõju ja näiteks reaktsioonjõud

$$R_x = Q_x + Q'_x, \tag{6.16}$$

kus Q'_x on väändemomendi poolt tekitatud nn. täiendav põikjõud. Selgituseks vaatleme kahte kõrvutist võrdse laiusega dy elementaarristkülikut ristlõikes, mille normaal on x telje sihiline (joonis loengus). Parempoolsel ristkülikul mõjub summaarne väändemoment $T_{xy}dy$ ja vasakpoolsel $(T_{xy} + (\partial T_{xy}/\partial y)dy)dy$. Asendame need väändemomendid jõupaaridega $(F_x, -F_x)$ ja $(F'_x, -F'_x)$, kus $F_x = T_{xy}$ ja $F'_x = T_{xy} + (\partial T_{xy}/\partial y)dy$. On selge, et kahe elementaarristküliku ühisel serval on nii tekkinud täiendav põikjõud $dF = F'_x - F_x = (\partial T_{xy}/\partial y)dy$. Selline täiendav põikjõud tekib igas elementaarristkülikus laiusega dy. Tähistame selle jõu intensiivsuse $Q'_x = dF/dy = \partial T_{xy}/\partial y$. Korrates sama protseduuri y telje sihilise normaaliga ristlõike jaoks saame täiendava põikjõu intensiivsusega $Q'_y = dF/dx = \partial T_{xy}/\partial x$. Reaktsioonjõud on seega

$$\begin{cases} R_x = Q_x + Q'_x = Q_x + \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial y} = -D\left[\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right], \\ R_y = Q_y + Q'_y = Q_y + \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial x} = -D\left[\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]. \end{cases} \tag{6.17}$$

Selliselt sisse toodud jõupaarid annavad aga lisaks mööda külgi jaotunud reakstioonjõule (reakstioonjõu intensiivsusele) veel täiendavad koondatud reaktsioonjõud

$$R_o = T_{xy} + T_{yx} = 2T_{xy} \tag{6.18}$$

plaadi nurkadesse. Vastavate reaktsioonjõudude positiivsed suunad on näidatud joonisel (mis esitatakse loengus). Nende koondatud reaktsioonide sissetoomise vajadus tuleneb faktist, et plaadi nurgapunktides puuduvad vaadeldud elementaarristkülikutel tasakaalustavad naaberristkülikud.

6.5 Ääretingimused

Biharmoonilise võrrandi lahendamiseks on vaja teada vajalikul hulgal raja- ehk serva- ehk ääretingimusi. Kuna võrrandi järk on mõlema koordinaadi (x ja y) järgi neli, siis on vaja mõlema koordinaadi järgi ka neli ääretingimust. Teisisõnu, iga plaadi serva jaoks kaks tingimust. Füüsikaliselt peavad need tingimused vastama plaadi serva kinnitusviisile. Vaatleme järgnevalt nelja juhtu (joonised loengus).

1. Jäigalt kinnitatud serv ehk kinnisserv. Sellise kinnitusviisi korral ei saa plaadi serv omandada deformatsiooni käigus ei pöördeid ega siirdeid ja ääretingimused on esitatavad kujul

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{6.19}$$

2. Vabalt toetatud serv või liigendiga kinnitatud serv. Antud juhul ei saa plaadi servapunktid siirdeid, kui pöörded on lubatud. Selliselt toetatud plaadi serv ei võta vastu momente ja ääretingimused saavad kuju

$$w = 0, \qquad M_x = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad M_y = 0. \tag{6.20}$$

Avaldise (6.13) põhjal $M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$. Kuna mööda sirget serva tuletis $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ (sirge teine tuletis on alati null), siis saavad ääretingimused kuju (kasutades M_y jaoks analoogset lähenemist)

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{6.21}$$

Siin valem $(6.21)_2$ vastab tingimusele $M_x = 0$ ja $(6.21)_3$ vastab tingimusele $M_y = 0$.

3. Vaba serv. Sellise serva punktid võivad saada nii siirdeid kui pöördeid. Arvestades ääretingimuste füüsikalist sisu peavad nii paindemoment kui reaktsioonjõud olema vabas servas nullid.

$$R_x = 0 \quad \text{ning} \quad M_x = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad R_y = 0 \quad \text{ning} \quad M_y = 0. \tag{6.22}$$

Arvestades reaktsioonjõudude ja paindemomentide avaldisi saame viimase esitada kujul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \text{ja/või} \\ \dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \tag{6.23}$$

Kuna algne sirge vaba serv ei pruugi deformeerudes jääda sirgeks, siis siin enam täiendavaid lihtsustusi teha pole võimalik.

4. Sümmeetriatelg. Kui plaat ja koormus omavad ühist sümmeetriatelge ja toetusviis on samuti sümmeetriline, siis on ka läbipaine w sümmeetriline. Sel juhul piisab kui lahendada plaadi võrrandi vaid ühel pool sümmeetriatelge. Sümmeetriatelge ennast aga vaadelda kui tinglikku (virtuaalset) serva, kus rajatingimused juhul kui sümmeetriateljeks on x ja/või y telg avalduvad kujul

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad Q_x = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad Q_y = 0. \tag{6.24}$$

Arvestades põikjõu avaldisi saame viimastele kuju

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0. \tag{6.25}$$