

Peatükk 3

Deformatsioon

3.1. Siire ja deformatsioon

80

3.1 Siire ja deformatsioon

3.1.1 Cauchy seosed

Vaatleme deformeeruva keha meelevaldset punkti A . Algolekus on tema koordinaadid x, y, z . Välisjõudude toimel liigub ta asendisse A' koordinaatidega x', y', z' . Vektorit $\overline{AA'}$ nimetatakse punkti A *siirdeks ehk siirdevektoriks*.¹

Eristame kahte liiki siirded:

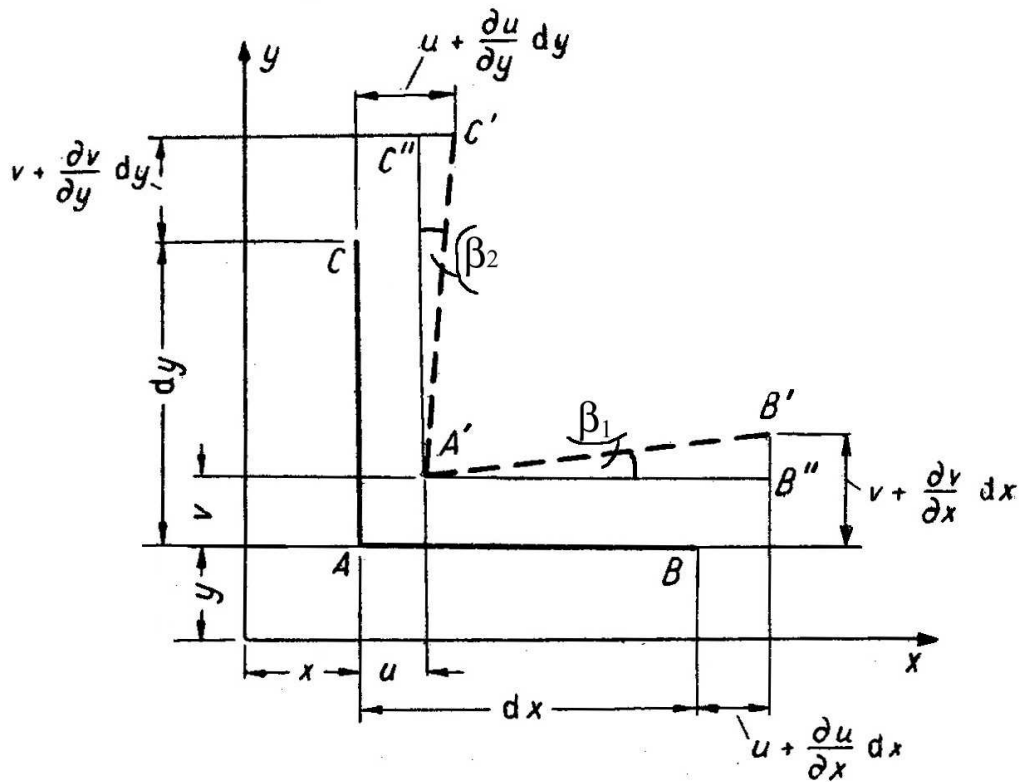
- keha kui terviku siirded (toimuvad ilma deformatsioonideta) — jäiga keha mehaanika²
- siirded, mis on seotud keha deformatsiooniga — käesolevas kursuses vaadeldakse vaid selliseid siirdeid.

Siirdevektori koordinaattelgede x, y, z sihilisi komponente tähistatakse u, v, w , st.,

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z. \quad (3.1)$$

¹Siirde sünonüüm on paigutis.

²Mitmed pideva keskkonna mehaanika õpikud nimetavad selliseid siirdeid *jäigaks deformatsiooniks*.



Joonis 3.1: Normaali- ja nihkedeformatsioon.

Kui keha deformeerub, siis peavad erinevate punktide siirded olema erinevad, st.,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (3.2)$$

Vaatleme lõpmata väikese risttahuka kahe serva käitumist x, y tasandil (joon. 3.1). Enne deformatsiooni:

- $AB = dx \parallel x$ ja $AC = dy \parallel y$;
- Punktide koordinaadid: $A : (x, y)$; $B : (x + dx, y)$; $C : (x, y + dy)$.

Peale deformatsiooni: $A \rightarrow A'$; $B \rightarrow B'$ ja $C \rightarrow C'$. Vastavad siirded:

- Punkt A : u ja v ;
- Punkt B : $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ja $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$;
- Punkt C : $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ ja $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$;

Kuna linearses elastsusteoorias on kõik muutused väikesed, siis on väikesed ka servade AB ja AC pöördenurgad, st., $\cos \beta \sim 1$, $\sin \beta \sim \beta$ ja $\tan \beta \sim \beta$.

Seetõttu lõikude AB ja AC suhtelised pikenedemised (koordinaatide x ja y sihilised normaaldeformatsioonid)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{A'B'' - AB}{AB} = \frac{(dx - u + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} \approx \frac{A'C'' - AC}{AC} = \frac{(dy - v + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) - dy}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

ja pöörded

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 \approx \tan \beta_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(1 + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=\varepsilon_x \ll 1}) dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \beta_2 \approx \tan \beta_2 = \frac{C'C''}{A'C''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \dots = \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Nihe ehk nihkedeformatsioon on defineeritud kui algse täisnurga muutus, st. nihe xy tasandil

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Analoogiliselt saab leida suhtelised pikenedemised ja nihked teistel koordinaattasanditel. Kokku saame kuus seost deformatsioonikomponentide $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ ja siirdekompontentide u, v, w vahel:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Saadud seoseid nimetatakse tihti *Cauchy võrranditeks* või *Cauchy seosteks*.

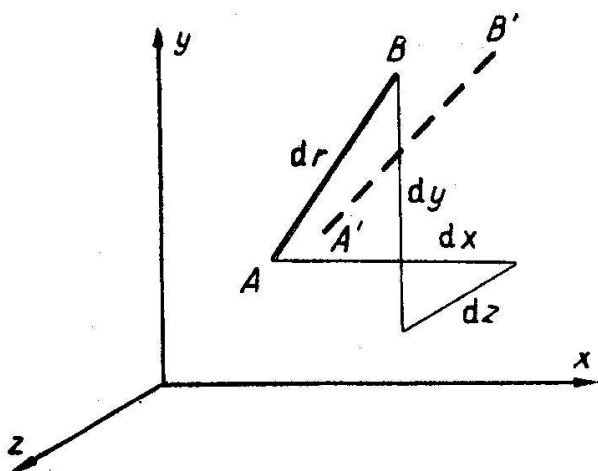
Märgireeglid:

- pikenedemisele vastav normaaldeformatsioon on positiivne;
- koordinaattelgede positiivsete suundade vahelisele täisnurga vähenemisele vastav nihe on positiivne.

Järeldus: Positiivsed pinged põhjustavad positiivseid deformatsioone.

3.1.2 Orienteeritud lõigu pikenedemine

Vaatleme kahte lõpmata lähedast punkti A ja B , kusjuures vektor $\overline{AB} = d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Siinjuures on vektori $d\mathbf{r}$ suunakoosinused l, m ja n .



Joonis 3.2: Lõigu AB deformatsioon

Vastava joonelemendi AB suhteline pikenemine (deformatsioon)

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB}. \quad (3.7)$$

Siin

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dr, \\ A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial r} dr\right)^2} = \dots \\ = dr \sqrt{1 + 2 \left(l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}\right)}. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Kombineerides kahte viimast avaldist ning hinnates liikmete suurusjärke saame

$$\varepsilon_r = l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3.9)$$

Teisendades osatuletised r järgi osatuletisteks koordinaatide x, y, z järgi, saame³

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + lm \gamma_{xy} + mn \gamma_{yz} + ln \gamma_{xz}. \quad (3.10)$$

³Detailset tuletuskäiku vt. R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967lk. 279–282.

Rakendus tensomeetrias. Olgu vaja määrata xy tasandi meelevaldses punktis suhtelised pikenemised ε_x ja ε_y ning nihe γ_{xy} . Kuna antud juhul on $n = 0$, siis saame valemile (3.10) kuju

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + lm \gamma_{xy}. \quad (3.11)$$

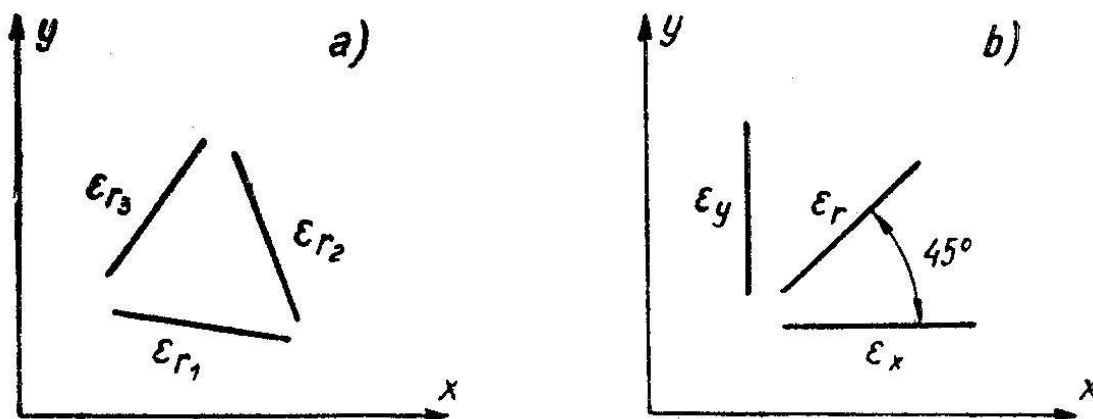
Kaks lahendust:

1. Vaadeldava punkti ümbrusse asetatakse kolm suvaliselt orienteeritud tensomeetrit (joon. 3.3). Tensomeetrite lugemid esitavad valemi (3.11) vasakut poolt kolme erineva orientatsiooniga lõigu jaoks. Kuna tensomeetrite orientatsioon on teada (s.o. määratud sihikoosinustega l, m, n) saadakse kolmest lugemist kolm võrrandit otsitavate suuruste $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ja γ_{xy} määramiseks.
2. Kui orienteerida kaks tensomeetrit telgede x ja y sihis, siis saame deformatsioonid ε_x ja ε_y otse tensomeetrite lugemitest, γ_{xy} aga avaldame võrrandist (3.11)

$$\gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_r - l^2 \varepsilon_x - m^2 \varepsilon_y}{lm}. \quad (3.12)$$

Üldjuhul on kolmas tensomeeter koordinaattelgede suhtes 45° nurga all. Seega $l = m = \sqrt{2}/2$ ja

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_r - \varepsilon_x - \varepsilon_y. \quad (3.13)$$



Joonis 3.3: Tensomeetria näide.

3.2 Deformatsioonitensor

Suhtelistest pikenemistest ja nihetest saab moodustada deformatsioonitensori

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Erinevalt pingetensorist on siin nihete kordajaks 0,5. Ilma selliste kordajateta ei alluks pingetensor tensorarvutuste reeglitele.

Analoogiliselt pingetensoriga saab ka deformatsioonitensorile leida peaväärtused ja peasuunad (ehk peavektorid) ning invariandid — tuleb lihtsalt rakendada analoogilisi valemeid ja arvutuseeskirju.

3.3 Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus

Üldjuhul keha ruumala (maht) muutub deformatsiooni käigus. Vaatleme lõpmata väikest risttahukat, mille ruumala enne deformatsiooni oli $dV = dx dy dz$. Serva AB pikkus enne deformatsiooni (vt. joon. 3.1) on dx ja peale deformatsiooni $dx_1 = dx(1 + \varepsilon_x)$. Analoogiliselt $dy \rightarrow dy_1 = dy(1 + \varepsilon_y)$ ja $dz \rightarrow dz_1 = dz(1 + \varepsilon_z)$.

Keha ruumala peale deformatsiooni leiame lähtudes eeldusest, et suhtelised pikened ja nihked on väikesed. Pärast mõningaid teisendusi, mille käigus hüljatakse ka teist ja kolmandat järku väikesed liikmed, saame deformeerunud elementaarristküliku mahuks $dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ ning suhteliseks mahumuutuseks

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.15)$$

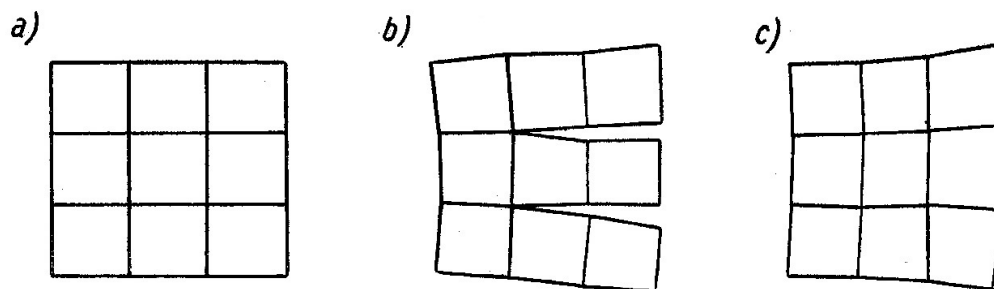
3.4 Pidevustingimused

Cauchy võrrandid (3.6) seovad kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ kolme siirdekomponendiga u, v, w .

- Kui on antud kolm siirdekomponenti u, v, w , siis võrrandite (3.6) abil on võimalik üheselt määrata kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.
- Kui on antud kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$, siis pole võrrandite (3.6) abil võimalik kolme siirdekomponenti u, v, w üheselt määrata. Ühese lahendi saamiseks tuleb sisse tuua kuut deformatsioonikomponenti siduvad lisatingimused (lisavõrrandid). Neid lisatingimusi nimetatakse *pidevustingimusteks*.⁴

⁴Pidevustingimusi nimetatakse ka pidevusvõrranditeks või sobivustingimusteks. Ingl. k. *compatibility conditions*.

Alternatiivne põhjendus pidevustingimuste sissetoomiseks.



Joonis 3.4: Pidevustingimused

Oletame, et vaadeldav keha on algolekus lõigatud väikesteks kuupideks (joon. 3.4 a). Kui iga kuupi on seejärel eraldi deformeeritud, siis on nende uuesti ühendamine selliselt, et tekkiks pidev keha üldjuhul võimatu (joon. 3.4 b). Selleks, et peale deformatsiooni oleks meil endiselt tegu pideva kehaga (joon. 3.4 c), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama teatud tingimusi, mida eestikeelses kirjanduses nimetatakse tavaliselt *pidevustingimusteks*.

Pidevusvõrrandite tuletamine. Diferentseerime võrrandit (3.6)₁ kaks korda koordinaadi y järgi ja võrrandit (3.6)₂ kaks korda koordinaadi x järgi ning liidame saadud tulemused.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\gamma_{xy}} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.16)$$

Kombineerides võrrandeid (3.6)₁₋₃ saame veel kaks analoogilist pidevusvõrrandit.

Neist aga ei piisa. Selleks, et saada veel kolm võrrandit, leiame võrrandeist (3.6)₄₋₆ osatuletised «puuduva koordinaadi» järgi, liidame (3.6)₄₋₅ ja lahutame saadud summast (3.6)₆. Seejärel võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \quad (3.17)$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks pidevusvõrrandit. Seega oleme kokku saanud kuus pidevusvõrrandit (tuntud ka *Saint-Venant'i pidevusvõrrandite-na*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Saadud kuuel võrrandil on väga selge füüsikaline sisu.

1. Esimesed kolm: kui on antud normaaldeformatsioonid (suhtelised pikened) kolmes ristivas sihis, siis nende sihtidega määratud tasan-dites ei saa nihkedeformatsiooni meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega (3.18)₁₋₃.
2. Viimsed kolm: kui on antud nihkedeformatsioonid kolmes ristivas tasa-pinnas, siis ei saa normaaldeformatsioone meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega (3.18)₄₋₆.

3.5 Üldistatud Hooke'i seadus

3.5.1 Deformatsioonide avaldamine pingete kaudu

Klassikaline elastsusteooria: pingete ja deformatsioonide vahelised seosed on lineaarsed. *Üldistatud Hooke'i seadus*: deformatsioonitensori komponendid on lineaarsed funktsioonid pingetensori komponentidest, st.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{xy} + C_{15}\tau_{yz} + C_{16}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{xy} + C_{25}\tau_{yz} + C_{26}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z = C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}\tau_{xy} + C_{35}\tau_{yz} + C_{36}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}\tau_{xy} + C_{45}\tau_{yz} + C_{46}\tau_{zx} \\ \gamma_{yz} = C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}\tau_{xy} + C_{55}\tau_{yz} + C_{56}\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} = C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}\tau_{xy} + C_{65}\tau_{yz} + C_{66}\tau_{zx} \end{cases} \quad (3.19)$$

Viimased avaldised sisaldavad 36 *elastsuskonstanti* — seda on palju!

- Kuna oleme eeldanud, et keha on ideaalselt elastne, st. peale koormuse kõrvaldamist taastub algne kuju, siis peab kehtima võrdus $C_{ij} = C_{ji}$,

mis vähendab konstantide arvu 15 võrra.

- Kui eeldada lisaks et materjal on isotroopne, siis jääb järele vaid kaks sõltumatut elastsuskonstanti, mis on kasutuses ka tugevusõpetuses ja mis on määratavad väga lihtsate eksperimentide abil.

– Tõmme–surve (x -telje sihis).

* Elastsuskonstant ehk Youngi moodul E : $\varepsilon_x = \sigma_x/E$

* Poissoni koefitsent ν : $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$

– Nihe (xy tasandis).

* Nihkeelastsusmoodul G : $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$, kus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.20)$$

Anisotroopse keha puhul on elastsuskonstantide arv loomulikult suurem. Nn. ortotroopse materjali, näiteks vineer, (omadused ei muutu telgede pööramisel $n \cdot 180^\circ$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ võrra, kuid muutuvad iga teise nurga korral) puhul on vaja 9 elastsuskonstanti.

Vaatleme lõpmata väikest isotroopset risttahukat, milles mõjuvad vaid normaalpinged $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Pinge $\sigma_x > 0$ põhjustab pikenemist x -telje sihis ja lühenemist y - ja z -telje sihis. Analoogiline toime on normaalpingetel $\sigma_y > 0$ ja $\sigma_z > 0$. Seega summaarne suhteline pikenemine x -telje sihis

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (3.21)$$

Nihkepingete ja nihkedeformatsioonide vahelised seosed on määratud Hooke'i seadusega iga koordinaattasandi jaoks sõltumatult, s.t., τ_{xy} põhjustab vaid nihet γ_{xy} , jne. (vrd. normaaldeformatsioonidega). Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad *üldistatud Hooke'i seadust* isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (3.22)$$

3.5.2 Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu

Hooke'i seadus ruumdeformatsiooni jaoks. Vastavalt üldistatud Hooke'i seadusele (3.22)

$$\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{=\theta} = (1 - 2\nu) \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{=I_1} / E \quad (3.23)$$

Seega

$$\theta = (1 - 2\nu) I_1 / E. \quad (3.24)$$

Tuues sisse ruumpaisumismooduli K ja keskmise pinget σ_0 , vastavalt

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3}, \quad (3.25)$$

saame lineaarse seose keskmise pinget ja ruumdeformatsiooni vahel kujul

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (3.26)$$

Pingekomponentide avaldamine deformatsioonikomponentide kaudu. Liidame ja lahutame avaldise (3.22)₁ paremale poolele suuruse $\frac{1}{E}\nu\sigma_x$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_x - \nu I_1]. \quad (3.27)$$

Avaldades (3.24)-st invariandi $I_1 = E\theta/(1 - 2\nu)$, saame

$$\varepsilon_x = \frac{(1 + \nu)\sigma_x}{E} - \frac{\nu\theta}{(1 - 2\nu)}, \quad \text{kust} \quad \sigma_x = \frac{E\nu\theta}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{1 + \nu} \quad (3.28)$$

Tuues sisse *Lamé koefitsiendid*

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad (3.29)$$

saame viimasest $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$. Leides analoogilised avaldised σ_y ja σ_z jaoks ning avaldades seostest (3.22) nihkepinged, olemegi saanud *Hooke'i seaduse alternatiivse kuju*

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Kasutades viimaseid valemeid leiame seose pingetensori ja deformatsioonitensori esimese invariandi vahel

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{=I_1} = 3\lambda\theta + 2\mu \underbrace{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}_{\theta}, \quad \text{kust} \quad I_1 = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (3.31)$$

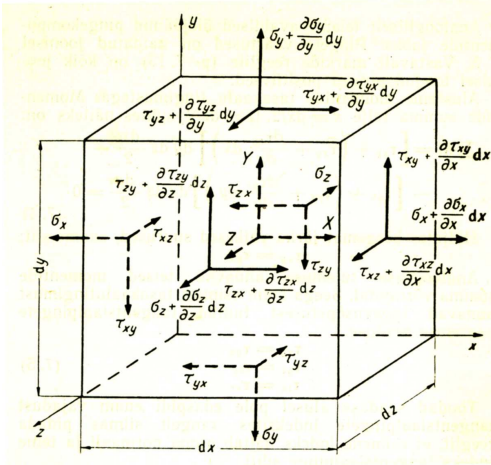
Kui tähistada keskmist pikenemist punktis

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\theta}{3}, \quad (3.32)$$

siis saame analoogilise seose keskmise pinge ja keskmise deformatsiooni vahel

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0. \quad (3.33)$$

3.6 Elastisusjõu töö ja deformatsiooni potentsiaalne energia



Vaatleme lõpmata väikest risttahukat (joon. 2.4). Arvestame klassikalise elastusteooria eeldusi ja hüpoteese:

- ideaalselt elastne materjal;
- superpositsiooni printsiip;
- deformatsioonid on väikesed

ning leiame *pingete poolt keha deformeerimisel tehtava töö*.

- Vaatleme tahke, mis on risti x teljega. Eeldame, et normaalpingete toimel suureneb tahkude vaheline kaugus $d\varepsilon_x dx$ võrra.
 - Vastav elastisusjõu elementaartöö (hüljates kõrgemat järku väikesed suurused): $\sigma_x dydz d\varepsilon_x dx$.

- Vaatleme tahke, mis on risti x teljega ja tahke, mis on risti y teljega. Eeldame, et nihkepingete toimel muutub nurk x ja y telje vahel väikese suuruse $d\gamma_{xy}$ võrra.
 - Vastav elastisusjõu elementaartöö (hüljates kõrgemat järku väikesed suurused): $\tau_{xy} dydz d\gamma_{xy} dx$.
- Analoogiliselt saab leida pingetele σ_y , σ_z , τ_{yz} ja τ_{xz} vastavad tööd.

Rakendame superpositsiooni printsiipi ja saame summaarse elementaartöö

$$dA^* = (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}) dx dy dz. \quad (3.34)$$

Jagades viimase elementaarruumalaga $dV = dx dy dz$, saame elementaartöö tiheduse $dA = dA^*/dV$. Kuna eelduse põhjal on materjal ideaalselt elastne, siis on tehtud töö tõttu suurendatud elementaarristahuka potentsiaalset energiat $dW^* = dA^*$ võrra.

Edaspidi vaatleme seega suurust dW , st. potentsiaalse energia juurdekasvu ühikruumala kohta:

$$dW = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}. \quad (3.35)$$

Asendame saadud avaldisse pinged σ_x, \dots üldistatud Hooke'i seadusest (3.30) ja saame

$$\begin{aligned} dW &= (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x) d\varepsilon_x + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y) d\varepsilon_y + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z) d\varepsilon_z + \\ &\quad + \mu\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \mu\gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \mu\gamma_{zx} d\gamma_{zx} = \\ &= \lambda\theta d\theta + 2\mu(\varepsilon_x d\varepsilon_x + \varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z) + \\ &\quad + \mu(\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \gamma_{zx} d\gamma_{zx}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Viimast avaldist integreerides leiame potentsiaalse energia tiheduse sõltuvana deformatsioonidest

$$W = \frac{1}{2} [\lambda\theta^2 + 2\mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (3.37)$$

Kuna Lamé koefitsiendid (3.29) on positiivsed, siis peab ka potentsiaalne energia olema positiivne (või null) igas ideaalselt elastse keha punktis.

Kasutades taas Hooke'i seadust kujul (3.30) saame *Clapeyroni valemi*

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (3.38)$$

Viimasest saab omakorda avaldada W läbi pingete ja elastsuskonstantide E ja ν kui kasutada Hooke'i seadust kujul (3.22)

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + 2(1 + \nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (3.39)$$

Kuna W on potentsiaalne energia, siis peab avaldis (3.35) olema funktsiooni W täisdiferentsiaal, mis omakorda tähendab, et

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, & \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, & \sigma_z = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}, \\ \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, & \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Viimased avaldised on tuntud *Castigliano valemite*na. Ülaltoodu kontrolliks leiame avaldistest (3.37)

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = \sigma_x, \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = \mu\gamma_{xy} = \tau_{xy}, \dots \end{cases} \quad (3.41)$$

Et leida kehas salvestunud summaarne potentsiaalne energia \mathcal{W} tuleb potentsiaalse energia tihedust integreerida üle kogu keha ruumala V , st.

$$\mathcal{W} = \int_V W dV = \int \int \int_V W dx dy dz. \quad (3.42)$$

Rakendes Clapeyroni valemit avaldub summaarne potentsiaalne energia kujul

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.43)$$