

## 6.6 Ühtlaselt koormatud plaatide lihtsamad paindeülesanded

### 6.6.1 Silindriline paine

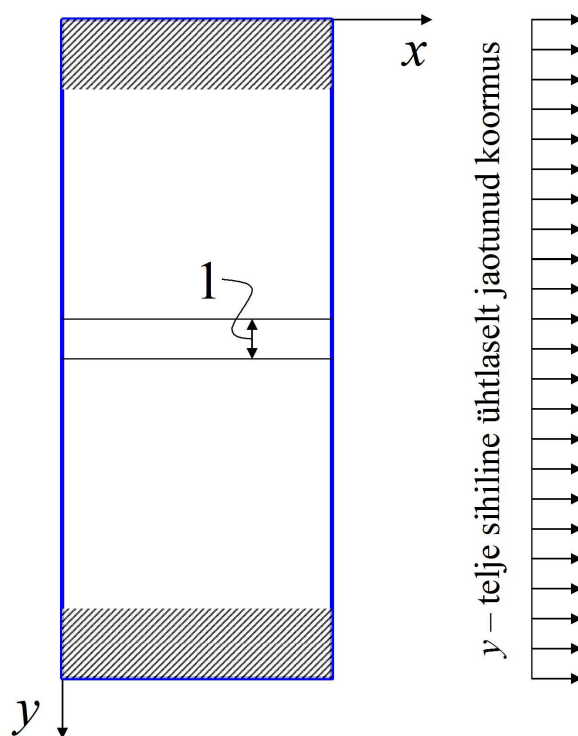
Kui ristkülikuline plaat on «pika ristküliku» kujuline ja koormus on pikkade külgede sihis konstantne, siis plaadi keskosa elastne pind (lühikestest külgedest eemal) on silindrilise kujuga. Teisisõnu, plaadi keskosas siirded  $w = w(x)$ . Sellist plaadi deformatsiooni nimetatakse *silindriliseks paindeks*.

Olgu plaat välja venitatud  $y$  telje sihis ja koormus ühtlaselt jaotunud üle kogu plaadi pinna, st.,  $p(x, y) = p = \text{const.}$  (joon. 6.6). Plaadi elastse pinna võrrand (6.10) saab sel juhul kuju

$$D \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = p. \quad (6.26)$$

See võrrand on väga sarnane tugevusõpetusest tuntud tala elastse joone võrrandiga

$$EI \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = p. \quad (6.27)$$



Joonis 6.6: Pikk ristkülikuline plaat.

Läbipainete võrdlemiseks tuleb võrrelda plaadi paindejäikust  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  ühikulise laiusega tala<sup>5</sup> paindejäikusega  $EI = Eh^3/12$ . Kuna plaadi paindejäikus on tala omast suurem, siis on plaadi läbipaine tala omast väiksem.

Sisejõud määratakse seostest (6.13) ja (6.14). Kuna  $w = w(x)$ , siis ka paindemomendid ja põikjõud on vaid koordinaadi  $x$  funktsioonid.

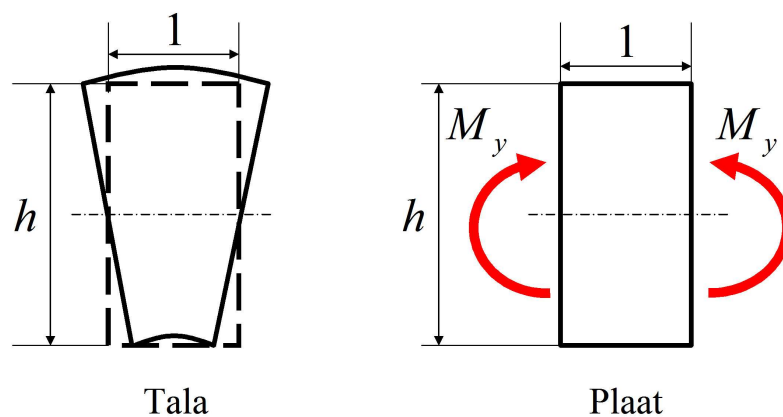
$$M_x = -D \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}, \quad M_y = -\nu D \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = \nu M_x. \quad (6.28)$$

Võrreldes taladega tekivad seega plaadis ka paindemomendid  $M_y$ . Talas neid ei teki kuna tala ristlõiked saavad vabalt deformeeruda (joon. 6.7). On ilmselge, et paindemomendid  $M_y$  põhjustavad pingeid  $\sigma_y$ , mida tuleb arvesse võtta näiteks raudbetoonplaatide sarrustamisel: plaat tuleb kindlasti sarrustada ka pikisuunas.

---

<sup>5</sup>Plaadi koormus on antud pinna ühiku kohta, talal aga pikkusühiku kohta

---



Joonis 6.7: Paindemomendid  $M_y$ .

### 6.6.2 Ühtlaselt koormatud jäigalt kinnitatud elliptiline plaat

See on üks vähestest plaadi painde ülesannetest, millele on võimalik leida analüütiline (täpne) lahend.

Vaatleme elliptilist plaati (joon. 6.8), millele koordinaatteljed  $x$  ja  $y$  on sümmeetriatelgedeks. Sellisel juhul saame elliptilise plaadi kontuuri võrrandile kuju

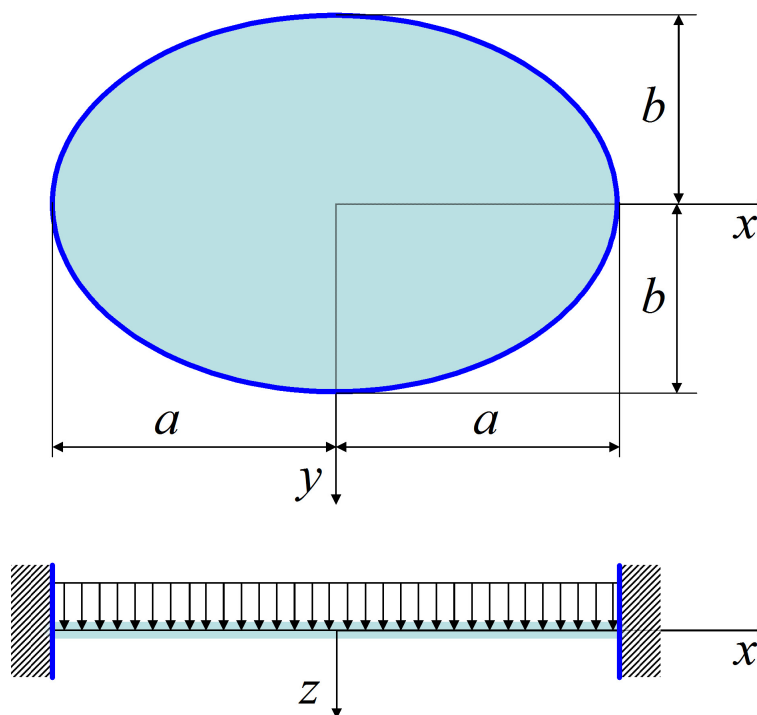
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6.29)$$

Näitame, et plaadi elastse pinna (keskpinna vertikaalsiirete) avaldis kujul

$$w = w_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2, \quad (6.30)$$

kus  $w_0$  on plaadi läbipaine koordinaatide alguses, rahuldab plaadi elastse pinna (diferentsiaal)võrrandit (6.10)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}$$



Joonis 6.8: Elliptiline plaat.

ja ääritingimusi jäigalt kinnitatud servas (6.19)

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (6.31)$$

kus  $n$  on plaadi kontuuri normaal. On ilmselge, et plaadi kontuuril on esime-  
ne neist rahuldatud. Kuna plaadi kontuuril tuletised  $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y =$   
 $0$ , siis on tuletised suvalises suunas, kaasa arvatud normaal  $n$ , nullid ja  
ääretingimused (6.31) rahuldatud.

Nüüd leiame avaldisest (6.30) vajalikud osatuletised, paneme need elastse  
pinna võrrandisse (6.10) ja avaldame läbipande plaadi keskel —

$$w_0 = \frac{p}{D \left( \frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (6.32)$$

Seega saab plaadi elastse pinna avaldis (6.30) kuju

$$w = \frac{p}{D} \frac{\left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2}{\left( \frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (6.33)$$

Kuna avaldis (6.33) rahuldab nii elastse pinna võrrandit kui ääretingimusi,  
siis on ta vaadeldava ülesande täpseks lahendiks.

Edasi on võimalik leida paindemomentide avaldised, kasutades valemeid  
(6.13)

$$\left\{ \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{pa^2}{6 + 4\frac{a^2}{b^2} + 6\frac{a^4}{b^4}} \left[ \left( 1 - 3\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + \nu \frac{a^2}{b^2} \left( 1 - 3\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} \right) \right], \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{pb^2}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}} \left[ \left( 1 - 3\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} \right) + \nu \frac{b^2}{a^2} \left( 1 - 3\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right]. \end{aligned} \right. \quad (6.34)$$

Plaadi keskel, kus  $x = y = 0$  saavad paindemomendid seega väärtuse

$$M_x = \frac{pa^2 \left( 1 + \nu \frac{a^2}{b^2} \right)}{6 + 4\frac{a^2}{b^2} + 6\frac{a^4}{b^4}}, \quad M_y = \frac{pb^2 \left( 1 + \nu \frac{b^2}{a^2} \right)}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}}. \quad (6.35)$$

Vaadeldava kinnitusviisi tõttu on plaadi servas paindemomendid nullist erinevad. Eeldusel, et  $a > b$  saame maksimaalse momendi plaadi servas kohal  $x = 0, y = \pm b$ :

$$\max M_k = -\frac{2pb^2}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}}. \quad (6.36)$$

Erijuhul  $a = b = r$  saame ellipsist ringi, st., elliptilise plaadi asemel vaatleme ringikujulist plaati ehk ümarplaati, mille korral momendid plaadi keskel ja servas saavad väärtuse

$$M_0 = \frac{pr^2}{16}(1 + \nu), \quad M_k = -\frac{pr^2}{8}. \quad (6.37)$$

Et saada maksimaalset paindepinget plaadi ristlõikes, st.,  $\sigma(\pm h/2)$  tuleb saadud momendiavaldised jagada vastupanumomendiga  $W = h^2/3$ .

## 6.7 Elastse pinna võrrandi lahendamine ristkülikulise plaadi korral

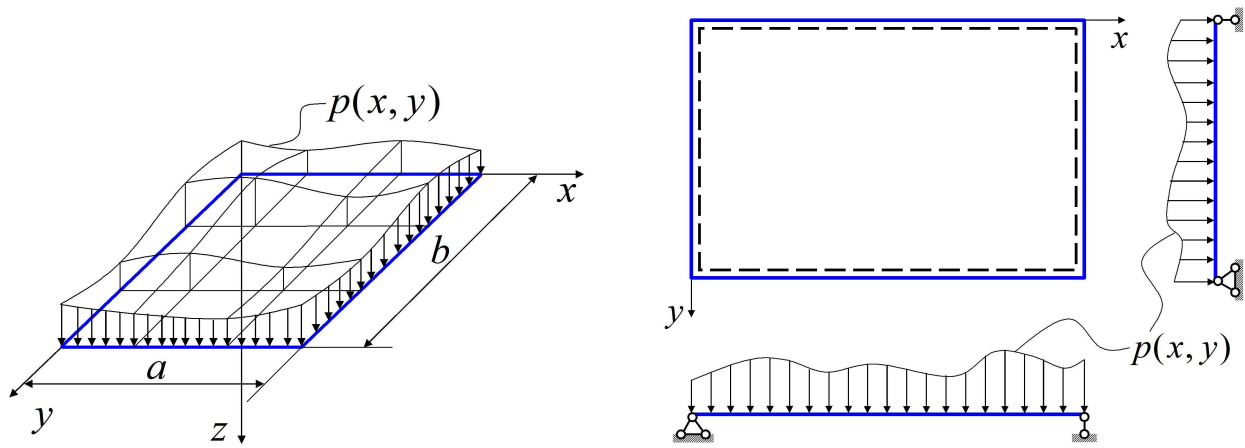
Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tuleb üldjuhul kasutada liigikaudseid meetodeid. Selliseid meetodeid on välja töötatud suhteliselt palju. järgmistes peatükkides vaatleme neist mõningaid.

### 6.7.1 Navier' meetod — lahendus kahekordsetes trigonomeetrilistes ridades

Vaatleme kõikidest servadest vabalt toetatud ristkülikplaati, mis on koormatud meelevaldse ristkoormusega  $p(x, y)$ . Vabalt toetatud plaadi elastset pinda saab kirjeldada kahekordse trigonomeetrilise rea abil:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.38)$$

Selle rea iga liige rahuldab ääretingimusi (6.21)



Joonis 6.9: Vabalt toetatud ristkülikuplaat.

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ja/või} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (6.39)$$

seega ka kogu rea puhul on ääritingimused rahuldatud.

Plaadile rakendatud koormus arendatakse Fourier ritta, st.

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.40)$$

Tegurid  $B_{mn}$  leitakse matemaatilisest analüüsist tuntud valemite abil

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (6.41)$$

Järgmise sammuna tuleb siire  $w$  ja koormus  $p$  asendada plaadi elastse pinna võrrandisse (6.10):

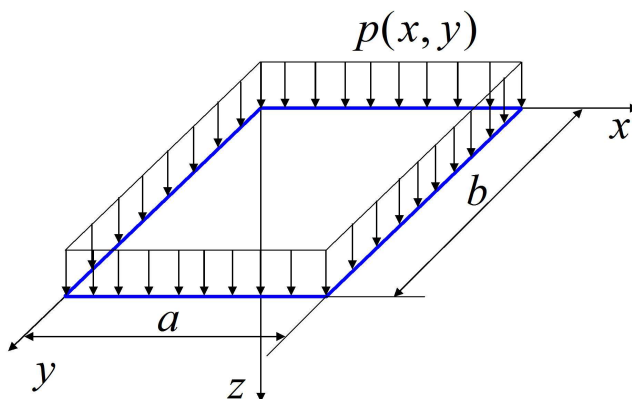
$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Kuna viimane võrrand peab kehtima iga  $m$  ja  $n$  korral, siis

$$C_{mn} = \frac{B_{mn}}{\pi^4 D [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}. \quad (6.43)$$

Kokku oleme saanud plaadi elastse pinna jaoks avaldise

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.44)$$



Joonis 6.10: Ühtlaselt koormatud ristkülikplaat.

**Ühtlaselt jaotatud koormuse juht.** Elastse pinna avaldise (6.44) rakedamise näitena vaatleme ühtlaselt koormatud plaati. Sellisel juhul kordajad

$$B_{mn} = \frac{4p}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (6.45)$$

Kuna integraal

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \begin{cases} 2a/m\pi, & \text{kui } m = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{kui } m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (6.46)$$

siis

$$B_{mn} = \frac{4p}{ab} \frac{2a}{m\pi} \frac{2b}{n\pi} = \frac{16p}{\pi^2 mn}, \quad m, n, = 1, 3, 5, \dots \quad (6.47)$$

Elastse pinna avaldis saab antud juhul kuju

$$w(x, y) = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.48)$$

Kui tähistada plaadi külgede pikkuste suhe  $b/a = \beta$ , siis saame viimasele anda kasutamiseks mugavama kuju

$$w(x, y) = \frac{16pa^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn [m^2 + (n/\beta)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.49)$$

Sisejõudude leidmiseks tuleb viimasest avaldisest võtta piisaval arvul osatu-

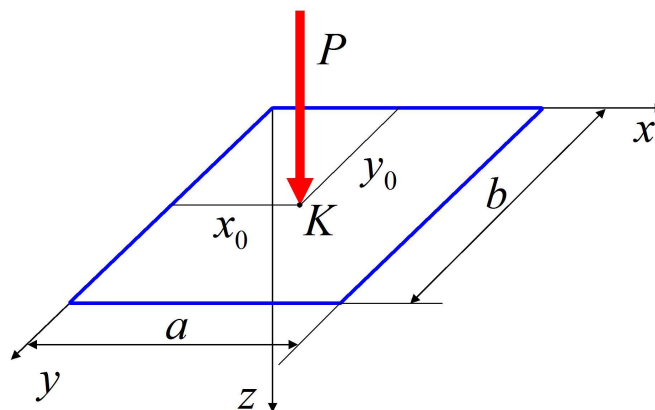
letisi ning kasutada valemeid (6.13) ja (6.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = \frac{16pa^4}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{m^2 + \nu(n/\beta)^2}{mn [m^2 + (n/\beta)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ M_y = \frac{16pa^4}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\nu m^2 + (n/\beta)^2}{mn [m^2 + (n/\beta)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ T_{xy} = -\frac{16(1-\nu)pa^2}{\pi^4\beta} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{[m^2 + (n/\beta)^2]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ Q_x = \frac{16pa}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n [m^2 + (n/\beta)^2]} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ Q_y = \frac{16pa^4}{\pi^3\beta} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m [m^2 + (n/\beta)^2]} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{array} \right. \quad (6.50)$$

Kui on vaja leida toereaktsioonid, siis tuleb kasutada valemeid (6.17) ja (6.18). Et välja selgitada, mitu liiget ülaltoodud trigonomeetrilistes ridades tuleb võtta, tuleb uurida ridade koonduvust. Selgub, et kõige kiiremini

koondub läbipainde avaldis (6.49). Pisut aeglasemalt koonduvad momentide avaldised ja veelgi aeglasemalt põikjõu ja toeraektsioonide avaldised.

**Koondatud jõu juht.** Olgu koondatud jõud  $P$  rakendatud plaadi punktis



Joonis 6.11: Koondatud jõuga koormatud ristkülikplaat.

$K$  koordinaatidega  $x_0, y_0$ . Valemite tuletamiseks eeldame, et see jõud on jaotunud lõpmata väikesele pinnale  $dx dy$  punkti  $K$  ümbruses:

$$p(x, y) = \frac{P}{dx dy}. \quad (6.51)$$



Tegurite  $B_{mn}$  leitakse valemi (6.41) abil. Siin esineva kahekordse integraali arvutamisel tuleb arvestada, et see integraal on null kõikjal peale punkti  $K$ , kus ta omab väärtust

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}. \quad (6.52)$$

Kasutades nüüd valemit (6.44) saame avaldise

$$w(x, y) = \frac{4P}{Dab\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.53)$$

Teades läbipainet, saame leida sise- ja reaktsioonjõud kasutades vastavaid avaldisi (6.13), (6.14), (6.17) ja (6.18).

Kuna rida (6.53) koondub aeglasemalt kui rida (6.49) ning tema abil saadud sise- ja reaktsioonjõude esitavad read aeglasemalt kui ühtlaselt jaotatud koormusele vastavad read, siis tuleb koondatud jõudude puhul olla ettevaatlik. Teisisõnu, aktsepteeritava tulemuse saamiseks tuleb siin valida tunduvalt pikemad read kui ühtlaselt jaotatud koormuse korral.

**NÄIDE.** Vaatleme ruutplaati, st. suhe  $b/a = \beta = 1$ , millel Poissoni tegur  $\nu = 0,3$ . Leiame plaadi läbipainde ja sisejõud ning toereaktsioonid mõnedes iseloomulikes punktides piirdudes vaid trigonomeetriliste ridade nelja esimese liikmega, st.,  $m, n = 1, 3$ .

*Läbipaine plaadi keskel*, st. punktis  $x = 0,5a$  ja  $y = 0,5b = 0,5a$ .

Vaja on leida järgmised suurused:

- $\sin(m\pi x/a), \dots$
- $1/\{mn [m^2 + (n/\beta)^2]^2\}$ ,  $m, n = 1, 3$
- $w$  avaldis arvestades, et  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ .

Tulemusena saame

$$w = 0,0443pa^4/Eh^3. \quad (6.54)$$

*Paindemomendid plaadi keskel.* Analoogiline protseduur annab tulemuseks

$$M_x = M_y = 0,0470pa^2. \quad (6.55)$$

Väändemoment plaadi nurgas  $x = y = 0$  avaldub kujul

$$T_{xy} = -0,0315pa^2, \quad (6.56)$$

ning põikjõud ja toereaktsioon külje  $x = 0$  keskel

$$Q_x = 0,28pa; \quad R_x = 0,36pa. \quad (6.57)$$

- Positiivsed paindemomendid viitavad sellele, et plaadi alumine pool on tõmmatud.
- Vastavalt valemile (6.18) põhjustab väändemoment plaadi nurkades nn. täiendava koondatud reaktsioonjõu  $R_o = 2T_{xy} = -0,0630pa^2$ . Kuna nurgas  $x = y = 0$  on  $R_o$  positiivne suund üles (vt. vastavat joonist), siis antud juhul on  $R_o$  suunatud alla. See omakorda tähendab seda, et plaadi nurk püüab üles tõusta.
- Küljel  $x = 0$  (välisnormaal on suunatud  $x$ -telje negatiivses suunas) on positiivsed  $Q_x$  ja  $R_x$  suunatud üles, st.  $z$  telje negatiivses suunas.

**Tabelite kasutamisest.** Samasugused arvutused saab läbi viia ka ühest erinevate  $\beta$  väärtuste jaoks ja suuremate liikmete arvuga ridade jaoks. Tulemused erinevad eeltoodud näitest vaid kordajate väärtuste poolest. Seega saab plaatide arvutamisel kasutatavatele valemitele (mis esitavad läbipaindeid, sissejõudusid jne.) anda järgmise kuju:

*läbipaine ja paindemomendid plaadi keskel*

$$w = k_1 \frac{pa^4}{Eh^3}; \quad M_x = k_2 pa^2; \quad M_y = k_3 pa^2; \quad (6.58)$$

*põikjõud ja toereaktsioonid lühema külje keskel*

$$Q_y = k_4 qa; \quad R_y = k_6 qa; \quad (6.59)$$

*põikjõud ja toereaktsioonid pikema külje keskel*

$$Q_x = k_5 qa; \quad R_x = k_7 qa; \quad (6.60)$$

*koondatud reaktsioonjõud plaadi nurkades*

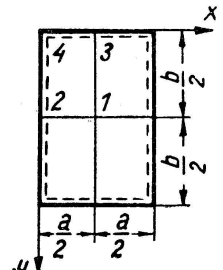
$$R_o = k_8 qab. \quad (6.61)$$

Kuna Poissoni teguri fikseeritud väärtuse (näiteks  $\nu = 0,3$ ) korral sõltuvad konstantide  $k_1, \dots, k_8$  väärtused vaid suhtest  $\beta$ , siis on mõistlik koondada need konstantide väärtused tabelisse, eeldades seejuures, et  $b > a$ .

Äsjavaadeldud näite korral on konstantidel tabeli 6.1 põhjal järgmised väärtused:  $k_1 = 0,0443$ ,  $k_2 = 0,0479$ ,  $k_3 = 0,0479$ ,  $k_4 = 0,338$ ,  $k_5 = 0,338$ ,  $k_6 = 0,420$ ,  $k_7 = 0,420$  ja  $k_8 = 0,065$ . Seega on näha, et läbipainde ja paindemomentide leidmisel piisabki vaid neljast esimesest rea liikmest (viga jääb alla 2%), kuid näiteks põikjõu korral oleks vaja rohkem liikmeid.

Taolised tabelid on koostatud ka teiste kinnitustingimuste ja koormusskeemide jaoks. Vastavalt ääritingimustele on seejuures kasutatud ka Navier meetodist erinevaid meetodeid. Järgnevalt on esitatud kuus tabelit, mille põhjal on võimalik arvutada läbipaindeid, sise- ja reaktsioonjõudusid ühtlasele koormusele allutatud ristkülikulise plaadi jaoks. Tabelid pärinevad õpikust «R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967».

Vabalt toetatud servadega plaat



$$\omega^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad Q_x^{(2)} = k_4 qa$$

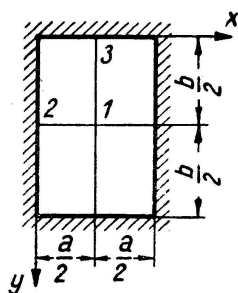
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2 \quad Q_y^{(3)} = k_5 qa$$

$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2 \quad R_x^{(2)} = k_6 qa$$

$$P_R = k_8 qab \quad R_y^{(3)} = k_7 qa$$

$b/a$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,0530	0,0554	0,0493	0,360	0,347	0,440	0,440	0,070
1,2	0,0616	0,0627	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453	0,074
1,3	0,0697	0,0694	0,0503	0,397	0,357	0,468	0,464	0,079
1,4	0,0770	0,0755	0,0502	0,411	0,361	0,478	0,471	0,083
1,5	0,0843	0,0812	0,0498	0,424	0,363	0,486	0,480	0,085
1,6	0,0906	0,0862	0,0492	0,435	0,365	0,491	0,485	0,086
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488	0,088
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491	0,090
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494	0,091
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496	0,092
3,0	0,1336	0,1189	0,0406	0,493	0,372	0,505	0,498	0,093
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500	0,094
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500	0,095
$\infty$	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500	0,095

Tabel 6.1: NB! Tabeli  $q$  on meil  $p$  ja tabeli  $P_R$  on meil  $R_0$ .



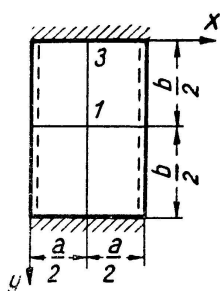
$$\begin{aligned}
 w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} & Q_x^{(2)} &= k_6 qa \\
 M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 & Q_y^{(3)} &= k_7 qa \\
 M_y^{(1)} &= k_3 qa^2 & R_x^{(2)} &= k_8 qa \\
 M_x^{(2)} &= -k_4 qa^2 & R_y^{(3)} &= k_9 qa \\
 M_y^{(3)} &= -k_5 qa^2 & &
 \end{aligned}$$

Jäigalt kinnitatud servadega plaat

$b/a$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$
1,0	0,0138	0,0231	0,0231	0,0513	0,0513	0,452	0,452	0,440	0,440
1,1	0,0165	0,0264	0,0231	0,0581	0,0538	0,448	0,412	0,473	0,450
1,2	0,0191	0,0299	0,0228	0,0639	0,0554	0,471	0,381	0,493	0,457
1,3	0,0210	0,0327	0,0222	0,0687	0,0563	0,491	0,352	0,505	0,462
1,4	0,0227	0,0349	0,0212	0,0726	0,0568	0,505	0,327	0,510	0,464
1,5	0,0241	0,0368	0,0203	0,0757	0,0570	0,517	0,305	0,515	0,465
1,6	0,0251	0,0381	0,0193	0,0780	0,0571	—	—	—	—
1,7	0,0260	0,0392	0,0182	0,0799	0,0571	—	—	—	—
1,8	0,0267	0,0401	0,0174	0,0812	0,0571	—	—	—	—
1,9	0,0272	0,0407	0,0165	0,0822	0,0571	—	—	—	—
2,0	0,0276	0,0412	0,0158	0,0829	0,0571	—	—	—	—
$\infty$	0,0284	0,0417	0,0125	0,0833	0,0571	—	—	0,500	0,465

Tabel 6.2: NB! Tabeli  $q$  on meil  $p$ .

Kahel vastasserval vabalt toetatud, kahel jäigalt kinnitatud plaat

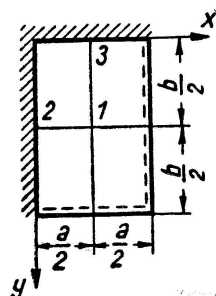


$$\begin{aligned}
 \text{Kui } a \geq b: & & \text{Kui } a \leq b: & \\
 w^{(1)} &= k_1 \frac{qb^4}{Eh^3} & w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \\
 M_x^{(1)} &= k_2 qb^2 & M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 \\
 M_y^{(1)} &= k_3 qb^2 & M_y^{(1)} &= k_3 qa^2 \\
 M_y^{(3)} &= -k_4 qb^2 & M_y^{(3)} &= -k_4 qa^2
 \end{aligned}$$

$b/a$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
0	0,0284	0,0125	0,0417	0,0833
1/2	0,0284	0,0142	0,0420	0,0842
1/1,5	0,0270	0,0179	0,0406	0,0822
1/1,4	0,0262	0,0192	0,0399	0,0810
1/1,3	0,0255	0,0203	0,0388	0,0794
1/1,2	0,0243	0,0215	0,0375	0,0771
1/1,1	0,0228	0,0230	0,0355	0,0739
1	0,0214	0,0244	0,0332	0,0697
1,1	0,0276	0,0307	0,0371	0,0787
1,2	0,0349	0,0376	0,0400	0,0868
1,3	0,0425	0,0446	0,0426	0,0938
1,4	0,0504	0,0514	0,0448	0,0998
1,5	0,0582	0,0585	0,0460	0,1049
1,6	0,0658	0,0650	0,0469	0,1090
1,7	0,0730	0,0712	0,0475	0,1122
1,8	0,0799	0,0768	0,0477	0,1152
1,9	0,0863	0,0821	0,0476	0,1174
2	0,0987	0,0869	0,0474	0,1191
3	0,1276	0,1144	0,0419	0,1246
4	0,1383	0,1223	0,0390	0,1250
5	0,1412	0,1243	0,0379	0,1250
$\infty$	0,1422	0,1250	0,0375	0,1250

Tabel 6.3: NB! Tabeli  $q$  on meil  $p$ .

Kahel naaberserval vabalt toetatud,  
kahel jäigalt kinnitatud plaat



$$\omega^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$

$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$

$$M_x^{(2)} = -k_4 qa^2$$

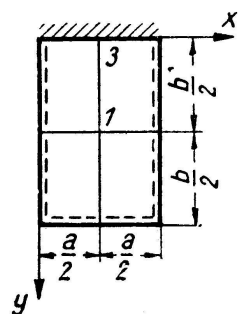
$$M_y^{(3)} = -k_5 qa^2$$

$b/a$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
1,0	0,0229	0,0304	0,0304	0,0678	0,0678
1,1	0,0276	0,0353	0,0311	0,0766	0,0709
1,2	0,0318	0,0397	0,0312	0,0845	0,0736
1,3	0,0353	0,0435	0,0308	0,0915	0,0754
1,4	0,0384	0,0469	0,0302	0,0975	0,0765
1,5	0,0415	0,0497	0,0293	0,1028	0,0772
1,6	0,0441	0,0521	0,0284	0,1068	0,0778
1,7	0,0463	0,0541	0,0274	0,1104	0,0782
1,8	0,0482	0,0557	0,0265	0,1134	0,0785
1,9	0,0497	0,0570	0,0256	0,1159	0,0786
2,0	0,0511	0,0582	0,0247	0,1180	0,0787
$\infty$	0,0560	0,0625	0,0188	0,1250	—

Märkus. Maksimaalne väljamoment on paindemomendist  $M_x^{(1)}$  9–16% suurem.

Tabel 6.4: NB! Tabeli  $q$  on meil  $p$ .

Ühel serval jäigalt kinnitatud,  
teistel vabalt toetatud plaat



$$\text{Kui } a \geq b: \quad \omega^{(1)} = k_1 \frac{qb^4}{Eh^3}$$

$$M_x^{(1)} = k_2 qb^2$$

$$M_y^{(1)} = k_3 qb^2$$

$$M_y^{(3)} = -k_4 qb^2$$

$$\text{Kui } a \leq b: \quad \omega^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$

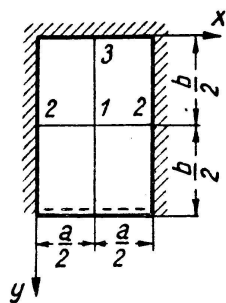
$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$

$$M_y^{(3)} = -k_4 qa^2$$

$b/a$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
0	0,0569	0,0188	0,0625	0,1250
0,5	0,0530	0,0235	0,0601	0,1210
0,6	0,0489	0,0268	0,0573	0,1156
0,7	0,0444	0,0297	0,0529	0,1086
0,8	0,0399	0,0315	0,0484	0,1009
0,9	0,0352	0,0331	0,0437	0,0922
1,0	0,0304	0,0339	0,0391	0,0840
1,1	0,0387	0,0411	0,0422	0,0916
1,2	0,0468	0,0484	0,0443	0,0983
1,3	0,0549	0,0557	0,0461	0,1040
1,4	0,0627	0,0625	0,0471	0,1084
1,5	0,0702	0,0691	0,0478	0,1121
1,6	0,0774	0,0750	0,0481	0,1148
1,7	0,0842	0,0806	0,0481	0,1172
1,8	0,0903	0,0855	0,0477	0,1189
1,9	0,0961	0,0901	0,0473	0,1204
2,0	0,1012	0,0942	0,0470	0,1216
$\infty$	0,1422	0,1250	0,0375	0,1250

Tabel 6.5: NB! Tabeli  $q$  on meil  $p$ .

Ühel serval vabalt toetatud,  
teistel jäigalt kinnitatud plaat



$$\text{Kui } a \geq b:$$

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qb^4}{Eh^3}$$

$$M_x^{(1)} = k_2 qb^2$$

$$M_y^{(1)} = k_3 qb^2$$

$$M_x^{(2)} = -k_4 qb^2$$

$$M_y^{(3)} = -k_5 qb^2$$

$$\text{Kui } a \leq b:$$

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$

$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$

$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$

$$M_x^{(2)} = -k_4 qa^2$$

$$M_y^{(3)} = -k_5 qa^2$$

$b/a$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
0	0,0569	0,0188	0,0625	—	0,1250
0,5	0,0491	0,0259	0,0558	0,0783	0,1140
0,6	0,0419	0,0290	0,0496	0,0773	0,1020
0,7	0,0346	0,0305	0,0428	0,0749	0,0907
0,8	0,0282	0,0306	0,0352	0,0708	0,0778
0,9	0,0223	0,0297	0,0294	0,0657	0,0658
1,0	0,0172	0,0278	0,0236	0,0600	0,0547
1,1	0,0197	0,0309	0,0230	0,0659	0,0566
1,2	0,0216	0,0336	0,0222	0,0705	0,0573
1,3	0,0230	0,0357	0,0211	0,0743	0,0574
1,4	0,0241	0,0374	0,0200	0,0770	0,0576
1,5	0,0251	0,0386	0,0190	0,0788	0,0569
1,6	0,0260	0,0397	0,0181	0,0803	0,0568
1,7	0,0266	0,0404	0,0172	0,0815	0,0567
1,8	0,0271	0,0410	0,0165	0,0825	0,0567
1,9	0,0274	0,0414	0,0158	0,0831	0,0566
2,0	0,0277	0,0417	0,0151	0,0833	0,0566
$\infty$	0,0284	0,0417	0,0125	0,0833	0,0566

Tabel 6.6: NB! Tabeli  $q$  on meil  $p$ .