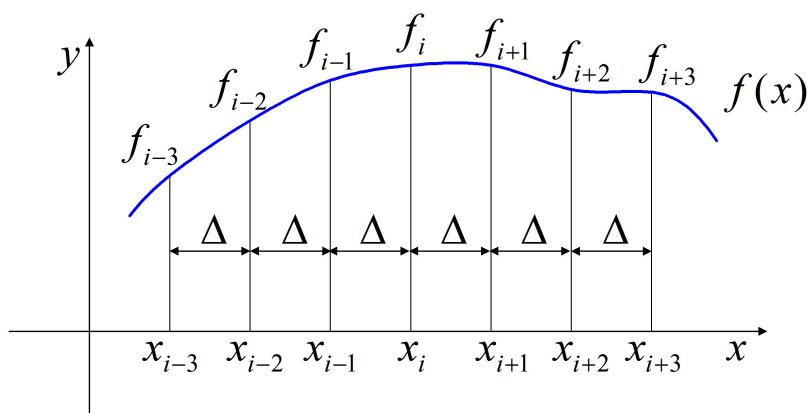


6.7.2 Võrgumeetod ehk lõplike vahede meetod

Võrgumeetod ehk lõplike vahede meetod on üks diferentsiaalvõrrandite numbrilise (arvulise) lahendamise meetoditest.



Joonis 6.12: Funktsioon $f(x)$ ja tema väärtused võrgusõlmedes $f(x_i) = f_i$.

Meetodi idee: tuletised leitakse nn. lõplike vahede abil.

- Vaatleme ühe muutuja funktsiooni $f(x)$ (vt. joonis 6.12)
- Jagame x telje osadeks võrdse sammuga $\Delta \equiv \Delta_x$ — saame 1D võrgu, mille i -ndas punktis $x = x_i$ ja $f(x_i) = f_i$.
- Tuletised punktis x_i leitakse valemite abil, mis põhinevad tuletise definitsioonil:

$$f'(x) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}, \quad f''(x) = [f'(x)]', \dots \quad (6.62)$$

-

$$f'(x_i) = f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta},$$

$$\begin{aligned} f''(x_i) = f''_i &= \frac{f'_{i+1} - f'_{i-1}}{2\Delta} = \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta^2} = \\ &= \frac{f'_{i+1/2} - f'_{i-1/2}}{\Delta} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta^2}, \end{aligned}$$

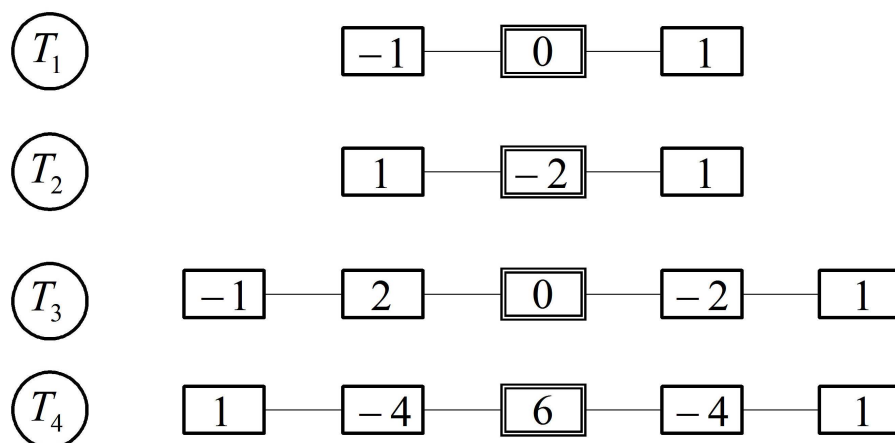
$$f'''(x_i) = f_i''' = \frac{f_{i+1}'' - f_{i-1}''}{2\Delta} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta^3},$$

$$\begin{aligned} f''''(x_i) = f_i'''' = f_i^{IV} &= \frac{f_{i+1}''' - f_{i-1}'''}{2\Delta} = \frac{f_{i+1}'' - 2f_i'' + f_{i-1}''}{\Delta^2} = \\ &= \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta^4}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

- Tihti esitatakse need ja nendega sarnased valemid nn. graafiliste operaatorite abil (vt. joonis 6.13), mis esitavad võrgu sõlmedes leitud funktsiooni väärtuste f_{i-2}, f_{i-1}, \dots kordajaid.
- Olles näiteks tähistanud i -ndale tuletisele vastava graafilise operaatori T_i , saame funktsiooni f tuletiste leidmiseks valemid

$$f_i' = \frac{T_1 f}{2\Delta}, \quad f_i'' = \frac{T_2 f}{\Delta^2}, \quad f_i''' = \frac{T_3 f}{2\Delta^3}, \quad f_i'''' = \frac{T_4 f}{\Delta^4}. \quad (6.64)$$

- Nimetatud graafilised operaatorid on kui trafaretid, millega liigutakse mööda võrku ja määratakse f_{i-2}, f_{i-1}, \dots kordajad i -ndas sõlmes.



Joonis 6.13: Graafilised operaatorid funktsiooni $f(x)$ tuletiste $f_i' \dots f_i''''$ numbriliseks leidmiseks.

Plaadi elastse pinna siirded, sisejõud ja toereaktsioonid on kahe muutuja, x ja y , funktsioonid. Seega on nende korral vaja numbriliselt määrata osatuletisi nii x kui y järgi. Vastavad valemid on analoogilised ühe muutuja funktsioonide juures kasutatutega. Nüüd tuleb vaid kasutada kahte indekset, näiteks punktis $x = x_i$ ja $y = y_k$ osatuletis

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{f_{i+1, k} - f_{i-1, k}}{2\Delta_x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{f_{i, k+1} - f_{i, k-1}}{2\Delta_y}, \quad (6.65)$$

kus Δ_x ja Δ_y on vastavalt võrgusammud x - ja y -teljel.

- Kuna vaatleme ristkülikplaate, siis pole vaja osadeks jagada kogu x ja y telge — piirdume vaid plaadi külgede pikkuste lõikudega (**joonis loengus**). Teisisõnu, vaatlema lõike $0 \leq x \leq a$ ja $0 \leq y \leq b$, mille jagame osadeks sammudega

$$\Delta_x = \frac{a}{m}, \quad \Delta_y = \frac{b}{n}, \quad (6.66)$$

- Vaatleme plaadi elastse pinna (diferentsiaal)võrrandit (6.10)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}$$

Tuues sisse tähistuse $W(x, y) = Dw(x, y)$, Saame viimasele kuju

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = p(x, y) \quad \text{ehk} \quad \nabla^2 (\nabla^2 W) = p. \quad (6.67)$$

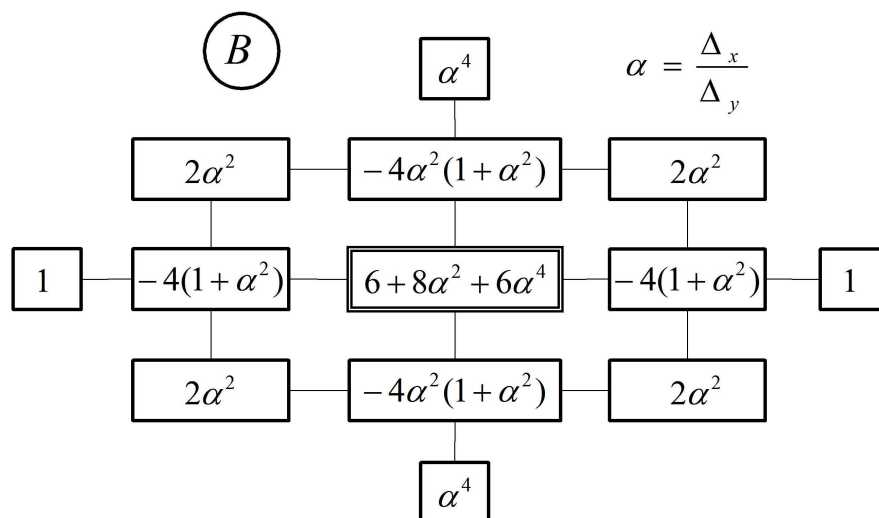
Viimeses võrrandis on vaja leida neljandat järku osatuletised x ja y järgi ning samuti neljandat järku segaosatuletis.

- Võrrandi (6.67) vasakut poolt saab kujutada graafilise operaatori B abil (vt. joonis 6.14). Selleks tuleb liita võrrandi liikmetele vastavad graafilised operaatorid ning tuua sisse tähistus ✓

$$\alpha = \frac{\Delta_x}{\Delta_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta_y} = \frac{\alpha}{\Delta_x}. \quad (6.68)$$

- Seejärel saab biharmooniline võrrand (6.67), st. plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand, kuju

$$BW = p\Delta_x^4. \quad (6.69)$$

Joonis 6.14: Biharmoonilise võrrandi graafiline operaator B .

- **Võrgupunktide liigitus.** Vastavalt valemitele (6.66) oleme katnud ristkülikplaadi võrguga kus on $(m + 1)(n + 1)$ punkti ehk sõlme (**joonis loengus**).
 - Võrgupunkte, mis asetsevad plaadi servadel nimetame *servapunktideks*.
 - Võrgupunkte, mis asetsevad servapunktidest seespool nimetame *avapunktideks*.
 - Kuna neljanda tuletise arvutamise valemis on vaja teada funktsiooni väärtusi kahes naaberreas või naaberveerus, siis tuleb sisse tuua nn. *välis- ehk lisapunktid*, mis asuvad väljaspool plaati. Funktsiooni väärtused neis punktides määratakse rajatingimustest. Tavaliselt on võimalik piirduda ühe rea välispunktidega.
 - Punktide arv plaadil on $(m + 1)(n + 1)$, neist $(m - 1)(n - 1)$ on avapunktid ja $(m + 1)(n + 1) - (m - 1)(n - 1) = 2(m + n)$ rajapunktid.

- **Plaadi paindeülesande lahendamiseks** tuleb lõplikes vahedes esitatud biharmooniline võrrand kujul (6.69) lahti kirjutada igas avapunktis.
 - Tulemusena saame võrrandisüsteemi, kus on avapunktide arvuga võrdne arv algebraalisi võrrandeid. Saadud süsteemi lahend annabki meile plaadi elastse pinna siirded (läbipainded) avapunktides.
 - Servapunktide siirded on esitatud rajatingimuste abil.
- Kui siirded on leitud, siis nende abil saame leida sisejõud vastavalt valemitele (6.13)

$$\begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \frac{\mathcal{M}_x W}{\Delta_x^2}, \\ M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = \frac{\mathcal{M}_y W}{\Delta_y^2}, \\ T_{xy} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = (1 - \nu) \alpha \frac{\mathcal{T}_{xy} W}{4 \Delta_x^2} \end{cases} \quad (6.70)$$

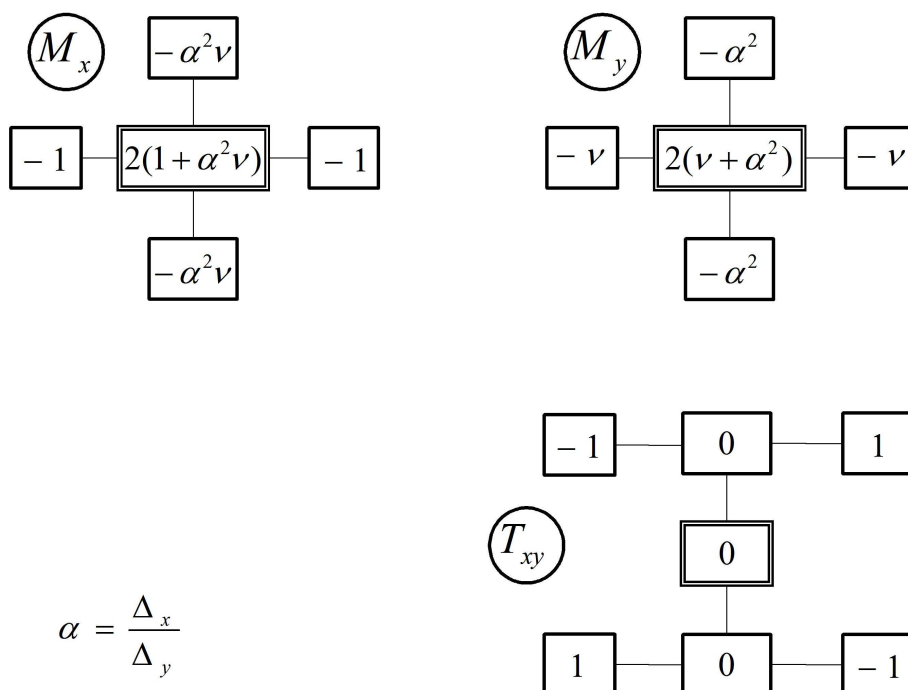
ja (6.14)

$$\begin{cases} Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{\mathcal{Q}_x W}{2 \Delta_x^3}, \\ Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) = \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right) = \alpha \frac{\mathcal{Q}_y W}{2 \Delta_x^3}. \end{cases} \quad (6.71)$$

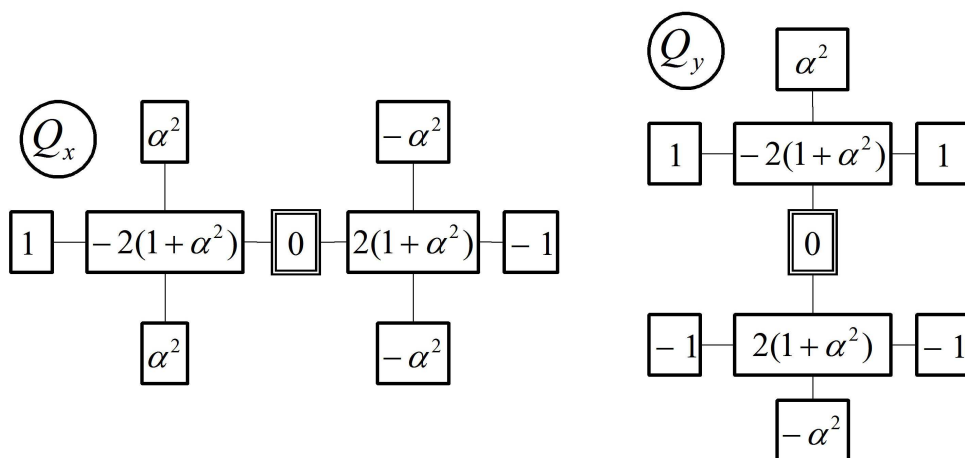
$\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{T}_{xy}, \mathcal{Q}_x$ ja \mathcal{Q}_y on graafilised operaatorid (vt. joon. 14.3 Metsaveer).

- Toereaktsioonide leidmise juures õnnestub plaadi elastse pinna võrrandi abil elimineerida nn. teise rea välispunktid. Kasutades graafilisi operaatoreid \mathcal{R}_x ja \mathcal{R}_y (vt. joon. 14.4 Metsaveer) saab vastavad avaldised esitada kujul

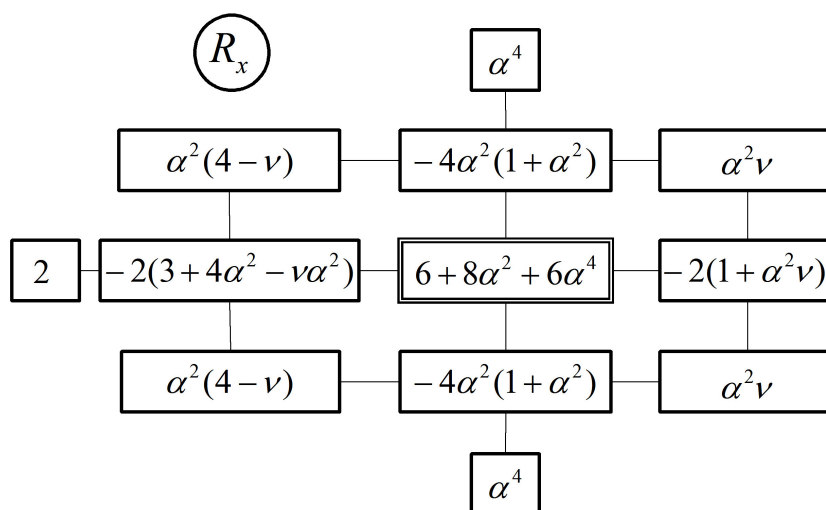
$$R_x = \frac{\mathcal{R}_x W}{2 \Delta_x^3} - \frac{p \Delta_x}{2}, \quad R_y = \frac{1}{\alpha} \frac{\mathcal{R}_y W}{2 \Delta_x^3} - \frac{p \Delta_x}{2}. \quad (6.72)$$



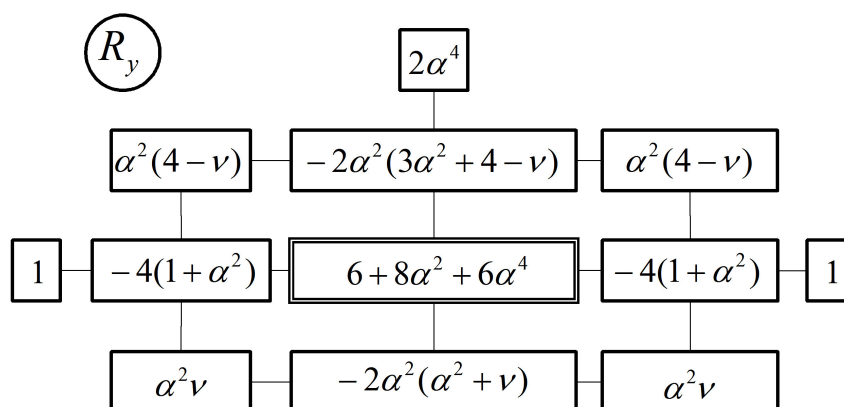
Joonis 6.15: Graafilised operaatorid painde- ja väändemomentide leidmiseks.



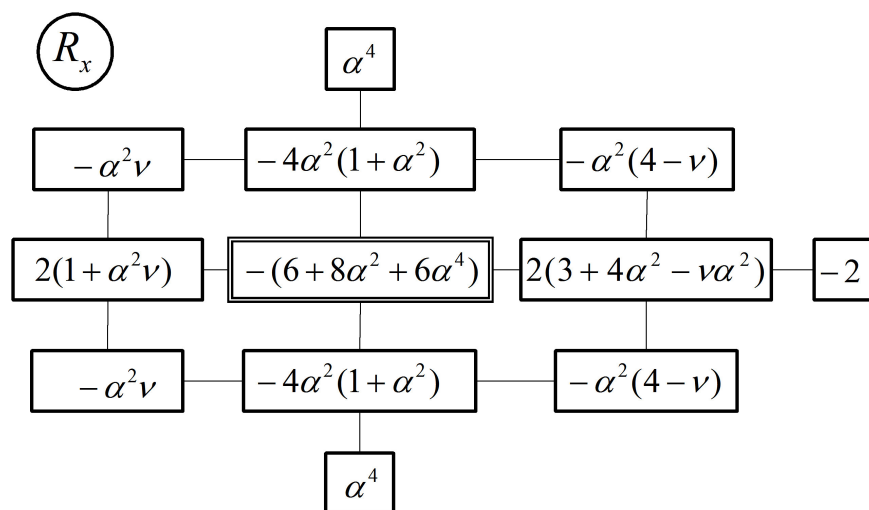
Joonis 6.16: Graafilised operaatorid põikjõudude leidmiseks.



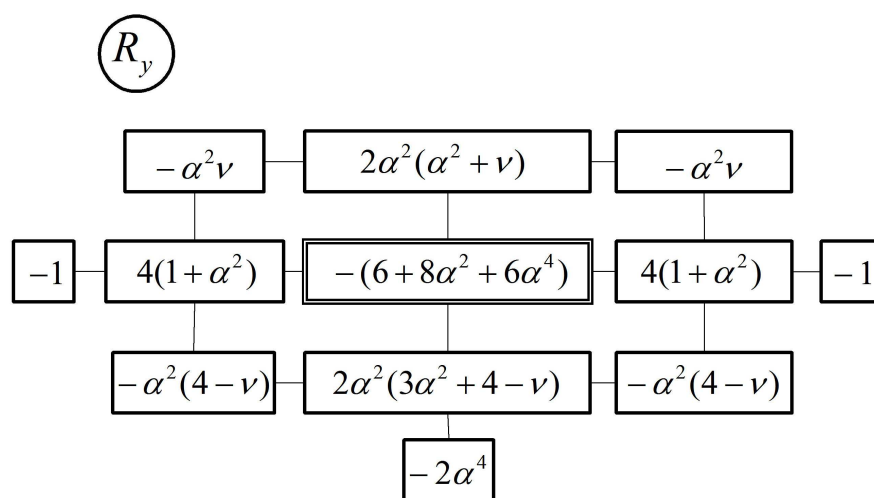
Joonis 6.17: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.



Joonis 6.18: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.



Joonis 6.19: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.



Joonis 6.20: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.

Ääritingimused.

- **Kinnisserv.** Servapunktides, mis on risti x -teljega

$$W_i = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i-1,k} = W_{i+1,k}. \quad (6.73)$$

Servapunktides, mis on risti y -teljega

$$W_i = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=y_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i,k-1} = W_{i,k+1}. \quad (6.74)$$

- **Vabalt toetatud serv.** Servapunktides, mis on risti x -teljega

$$W_i = 0, \quad (M_x)_{x=x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i-1,k} = -W_{i+1,k}. \quad (6.75)$$

Servapunktides, mis on risti y -teljega

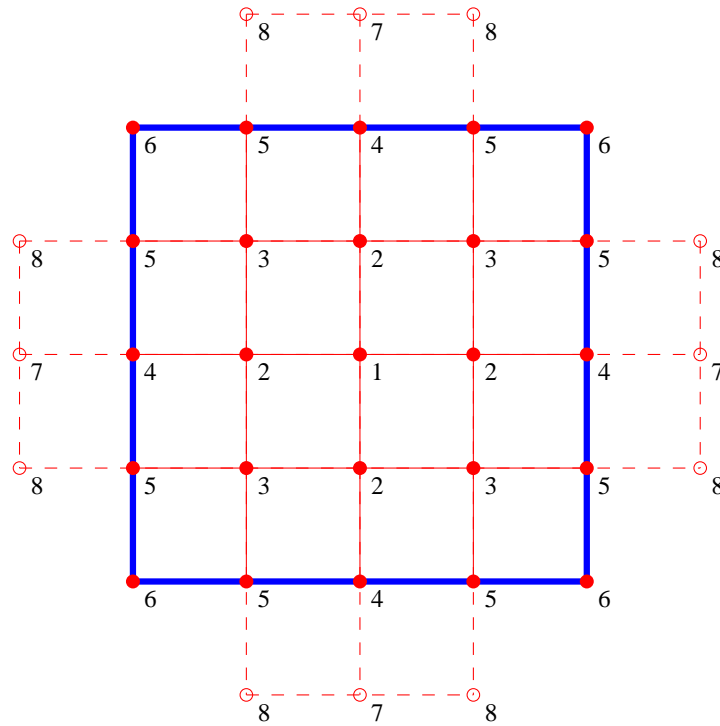
$$W_i = 0, \quad (M_y)_{y=y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i,k-1} = -W_{i,k+1}. \quad (6.76)$$

- **Vaba serv.** Siin on olukord tunduvalt keerulisem, sest $W \neq 0$ ja W väärtusi raja- ja välispunktides ei õnnestu avaldada avapunktide kaudu. Selle asemel lisatakse avapunktides lahti kirjutatud plaadi elastse pinna võrranditele lisavõrrandid, mis väljendavad vaba serva tingimusi paindemomendi, põikjõu ja/või toereaktsiooni jaoks.

Näide. Ruutplaadile servapikkusega a mõjub ühtlaselt jaotunud koormus inensiivsusega p_o .

Leida plaadi keskpinna siirded avapunktides ja paindemomentide väärtused plaadi keskel ning servade keskpunktis kahel juhul: 1) kui kõik plaadi servad on jäigalt kinnitatud; 2) kui kõik plaadi servad on vabalt toetatud.

Katame plaadi pinna võrguga, mille samm $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = a/4$ (joonis 6.21). Sümmeetria tõttu peame vaatlema vaid kolme sisepunkti ja kirjutama nende jaoks lahti biharmoonilise võrrandi, kasutades eeltoodud graafilist operaatorit B .



Joonis 6.21:

Kui rajatingimusi ei arvesta, on tulemuseks kolmest võrrandist koosnev kaheksa tundmatuga võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 + 4W_4 + 0W_5 + 0W_6 + 0W_7 + 0W_8 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 25W_2 - 16W_3 - 8W_4 + 6W_5 + 0W_6 + 1W_7 + 0W_8 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 22W_3 + 4W_4 - 16W_5 + 2W_6 + 0W_7 + 2W_8 = p_o\Delta^4. \end{cases} \quad (6.77)$$

Mõlema rajatingimuse korral on siirded servapunktides nullid, st. $W_4 = W_5 = W_6 = 0$ ja tundmatute arv väheneb kolme võrra.

Jäiga kinnituse korral saame lisaks tingimused $W_7 = W_2$ ja $W_8 = W_3$ ning võrrandisüsteem (6.77) saab kuju

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 26W_2 - 16W_3 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 24W_3 = p_o\Delta^4. \end{cases} \quad (6.78)$$

Selle lahend on

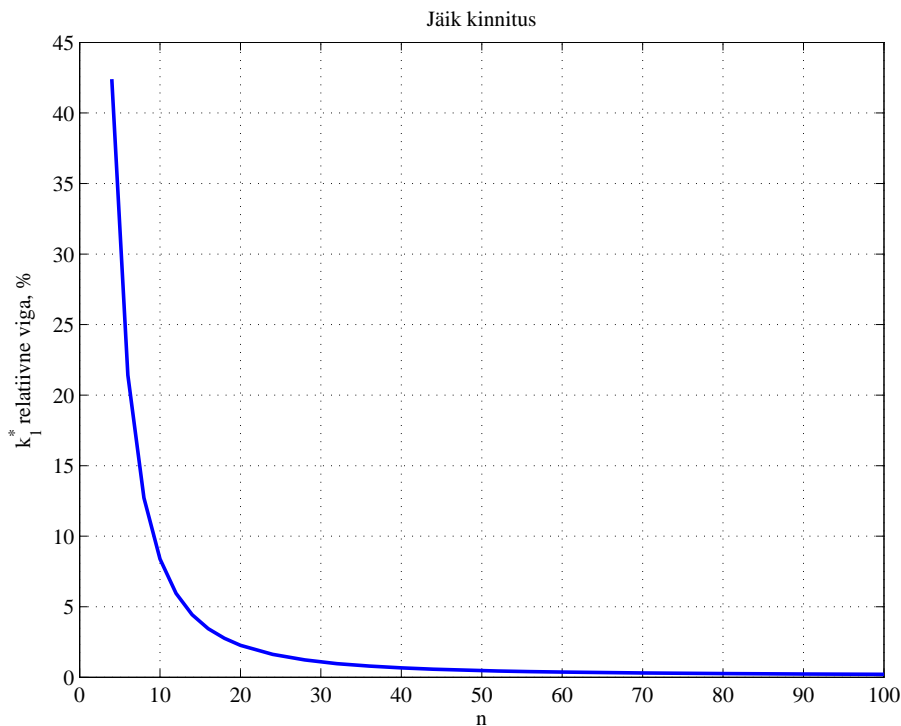
$$W_1 = 0,4607p_o\Delta^4, \quad W_2 = 0,3090p_o\Delta^4, \quad W_3 = 0,2093p_o\Delta^4. \quad (6.79)$$

Paindemomendid ($\nu = 0.3$)

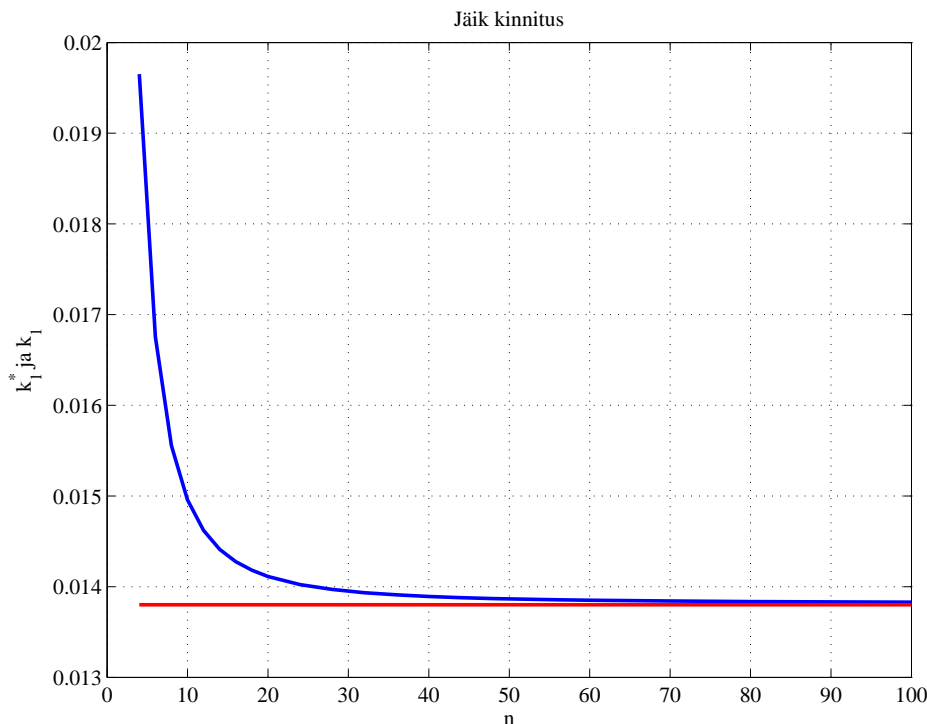
‡

$$\begin{cases} M_1 = (2,6W_1 - 2W_2 - 0,6W_2)/\Delta^2 = 0,3944p_o\Delta^2 = 0,0246p_oa^2 \\ M_4 = -2W_2/\Delta^2 = -0,6180p_o\Delta^2 = -0,0386p_oa^2 \end{cases} \quad (6.80)$$

Et võrrelda saadud siirde W_1 väärtust tabelites antud konstandiga k_1 tuleb W_1 jagada suurusega $n^4/[12(1-\nu^2)]$. Tulemuseks on $k_1^* = 0.0197$, mis erineb tabelist saadud väärtusest $k_1 = 0,0138$. Et saavutada suuremat kooskõla, tuleb suurendada võrgupunktide arvu. Näiteks $n = 12$ korral saame $k_1^* = 0.0146$ ja $n = 24$ korral saame $k_1^* = 0.0140$ (vt. joonist 6.22 kus on esitatud vastav relatiivne viga sõltuvana võrgupunktide arvust ja joonist 6.23 kus on esitatud k_1^* sõltuvana võrgupunktide arvust). Paindemomentide korral pole sellist ümberarvutamist vaja teha. Võrgupunktide arvule $n = 4$ vastavad $k_2^* = 0,0246$ ja $k_4^* = 0,0386$, tabelis $k_2 = 0,0231$ ja $k_4 = 0,0513$. Väärtusele $n = 12$ vastavad $k_2^* = 0,0232$ ja $k_4^* = 0,0495$ ning $n = 24$ vastavad $k_2^* = 0,0230$ ja $k_4^* = 0,0509$.



Joonis 6.22:



Joonis 6.23:

Vaba toetuse korral saame lisaks rajatingimused $W_7 = -W_2$ ja $W_8 = -W_3$ ning võrrandisüsteem (6.77) saab kuju

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 24W_2 - 16W_3 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 20W_3 = p_o\Delta^4. \end{cases} \quad (6.81)$$

Selle lahend on

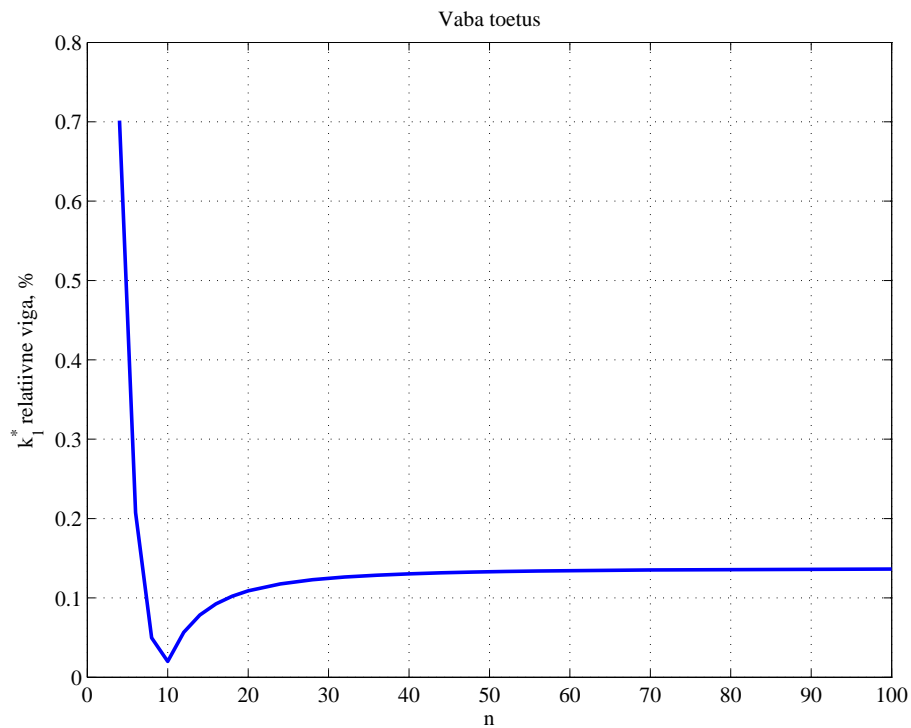
$$W_1 = 1,0313p_o\Delta^4, \quad W_2 = 0,7500p_o\Delta^4, \quad W_3 = 0,5469p_o\Delta^4. \quad (6.82)$$

Paindemomendid ($\nu = 0.3$)

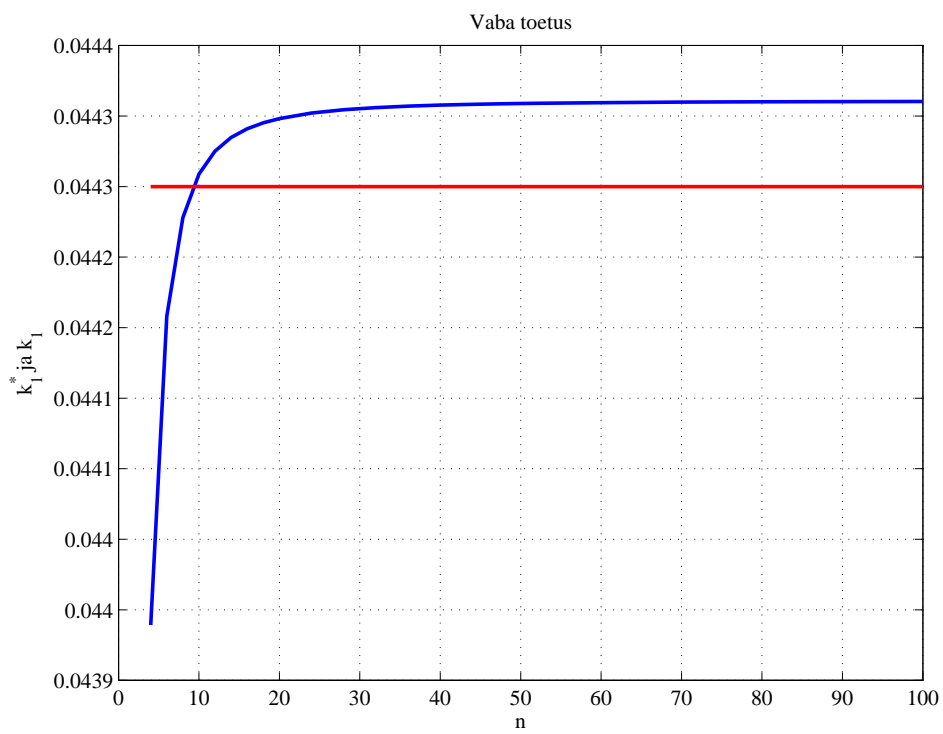
$$\begin{cases} M_1 = (2,6W_1 - 2W_2 - 0,6W_2)/\Delta^2 = 0,7312p_o\Delta^2 = 0,0457p_oa^2, \\ M_4 = -2W_2/\Delta^2 = 0. \end{cases} \quad (6.83)$$

Et võrrelda saadud siirde W_1 väärtust tabelites antud konstandiga k_1 tuleb W_1 jällegi jagada suurusega $n^4/[12(1-\nu^2)]$. Tulemuseks on $k_1^* = 0.0440$, mis erineb tabelist saadud väärtusest $k_1 = 0,0443$ tunduvalt vähem kui jäiga kinnituse lahend (vt. joonist 6.24 kus on esitatud vastav relatiivne viga sõltuvana

võrgupunktide arvu ja joonist 6.25 kus on esitatud k_1^* sõltuvana võrgupunktide arvust). Ka paindemomentide väärtused on antud juhul paremas kooskõlas tabelis antutega. Tabelis $k_2 = 0,0479$, ja $n = 4, 12, 24$ vastavad $k_2^* = 0,0457; 0,0476; 0,0478$.



Joonis 6.24:



Joonis 6.25: