

Peatükk 7

Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades

Mõningaid selliseid ülesandeid oleme juba eespool vaadelnud, vt. näiteks alajaotused 5.11 ja 5.12. Käesoleva peatüki kahes esimeses paragrahvis vaadeldakse telgsümmeetriliste ülesannete lahendamist Love'i pingefunktsiooni ja Legendre'i polünoomide abil vabalt toetatud ümarplaadi paindeülesande näitel. Saadud lahendid on lineaarse elastsusteooria mõttes täpsed lahend-

7.1. Üldvõrrandid

307

did, st. lahendamisel lähtutakse elastsusteooria põhivõrranditest. Sellisele lähenemisviisile «vastandub» nn. 0-järku teooria, mille korral lähtutakse tala elastse joone või plaadi elastse pinna võrranditest. Sellist lähenemist ümarplaadi paindeülesande lahendamisele vaatleme kolmandas paragrahvis.

7.1 Üldvõrrandid

Käesolevas alajaotuses leiavad käsitlemist ülesanded, kus ei esine vääned. Silindriliste koordinaatide (r, ϑ, z) puhul tähendab see seda, et vastavatest siirdekompontidest $v = 0$ ja komponendid u ja w ei sõltu koordinaadist ϑ . Seega ka pingekomponendid ei sõltu koordinaadist ϑ ja kaks neist $\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = 0$. Nullist erinevad deformatsioonikomponendid avalduvad kujul

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (7.1)$$

Tasakaaluvõrrandid saavad aga kuju

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + R = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

kus R ja Z on koordinaatide r ja z sihiliste mahujõudude intensiivsus (dimensioon N/m^3). Paljudel juhtudel on jällegi otstarbekas tuua sisse pingefunktsioon φ , siin nimetatakse teda aga Love'i pingefunktsiooniks. Tasakaaluvõrrandid on rahuldatud kui valida

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), & \sigma_\vartheta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], & \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{cases} \quad (7.3)$$

Siinjuures peab φ rahuldama biharmoonilist võrrandit

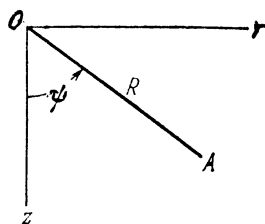
$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (7.4)$$

Antud juhul

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.5)$$

on Laplace'i operaator silindrilistes koordinaatides. Kuna antud juhul ei sõltu φ koordinaadist ϑ , siis langeb Laplace'i operaatoris (7.5) kolmas liige välja. Siirdekomponendid u ja w määratakse avaldistega

$$2Gu = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad v = 0, \quad 2Gw = 2(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (7.6)$$



Joonis 7.1: Sfäärilised koordinaadid.

Mõnel juhul on silindriliste koordinaatide asemel mõistlik kasutada sfäärilisi koordinaate, st., r ja z asemel kasutatakse koordinaate R ja ψ . Nüüd on

vaja (7.5)-s asendada osatuletised r ja z järgi. See üleminek on omakorda analoogne DRK x ja y ja polaarkoordinaatide r ja ϑ vahelisele seosele. Saame

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}. \end{cases} \quad (7.7)$$

Seega omab biharmooniline võrrand (7.4) silindriliste koordinaatide puhul kuju

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \varphi = 0 \quad (7.8)$$

ja sfääriliste puhul

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (7.9)$$

Võrrandi (7.9) lahend peab samal ajal rahuldama ka Laplace'i võrrandit, st,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0. \quad (7.10)$$

Viimase erilahendit võib otsida kujul

$$\varphi_n = R^n \Psi_n, \quad (7.11)$$

kus Ψ_n on vaid muutuja φ funktsioon. Kokku saame viimasest kahest hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} \right) + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad (7.12)$$

Kui tähistame $x = \cos \psi$ ja valime x uueks sõltumatuks muutujaks, siis saame (7.12)-st Legendre'i võrrandi

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} - 2x \frac{d\Psi_n}{dx} + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad (7.13)$$

Selle võrrandi lahendid on esitatavad Legendre'i polünoomide $P_n(x)$ kaudu:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x, & P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots, \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{cases} \quad (7.14)$$

Neid polünoome võib kasutada funktsioonidena Ψ_n avaldises (7.11) kusjuures igat neist võib veel korrutada konstandiga A_n . Kasutades valemeid

$$x = \cos \psi, \quad Rx = z \quad \text{ja} \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (7.15)$$

saab minna tagasi muutujatele r ja z . Seejuures saab võrrandi (7.9) lahend

kuju

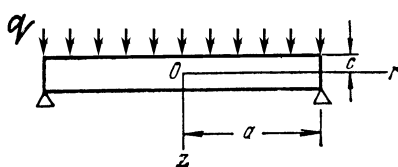
$$\begin{cases} \varphi_0 = A_0, & \varphi_1 = A_1 z, \\ \varphi_2 = A_2 \left[z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_3 = A_3 \left[z^3 - \frac{3}{5}z(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_4 = A_4 \left[z^4 - \frac{6}{7}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \varphi_5 = A_5 \left[z^5 - \frac{10}{9}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \dots \end{cases} \quad (7.16)$$

Toodud polünoomid on ka biharmoonilise võrrandi (7.4) lahendiks. Saab näidata, et kui $R^n \Psi_n$ osutub harmoonilise võrrandi (7.10) lahendiks, siis $R^{n+2} \Psi_n$ rahuldab biharmoonilist võrrandit (7.4) (kuid ei rahulda (7.10)) Kor-

rutades (7.16) $R^2 = r^2 + z^2$, saame uued lahendid

$$\begin{cases} \varphi_2 = B_2(r^2 + z^2), \\ \varphi_3 = B_3z(r^2 + z^2), \\ \varphi_4 = B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2), \\ \varphi_5 = B_5(2z^3 - 3r^2z)(r^2 + z^2), \\ \dots \end{cases} \quad (7.17)$$

7.2 Ümarplaadi paine



Joonis 7.2: Sümmeetriliselt jaotatud põikkoormusega koormatud ja servadest vabalt toetatud ümarplaat.

Vaatleme sümmeetriliselt koormatud ümarplaati (joonis 7.2). Valides avaldistest (7.16) ja (7.17) kolmandat järku polünoomid, saame pingefunktsiooni esitada kujul

$$\varphi = a_3(2z^3 - 3r^2z) + b_3(r^2z + z^3). \quad (7.18)$$

Avaldiste (7.3) põhjal saame seejärel pingekomponendid kujul

$$\begin{cases} \sigma_r = -6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \\ \sigma_\vartheta = -6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \\ \sigma_z = -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3, \\ \tau_{rz} = 0. \end{cases} \quad (7.19)$$

Seega osutuvad pingekomponendid kogu plaadi ulatuses konstantseteks. Valemities (7.19) olevate konstantide a_3 ja b_3 määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi σ_r ja σ_z jaoks. Kokkuvõttes: kolmandat järku polünoomide abil saab esitada lahendi, mis vastab olukorrale, kus plaadi pinnale on rakendatud telgsümmeetrilised konstantsed koormused.

Valides (7.16) ja (7.17) neljandat järku polünoomid, saame pingekomponentide jaoks avaldised

$$\begin{cases} \sigma_r = 96a_4z + 4b_4(14\nu - 1)z, \\ \sigma_z = -192a_4z + 4b_4(16 - 14\nu)z, \\ \tau_{rz} = 96a_4r - 2b_4(16 - 14\nu)r. \end{cases} \quad (7.20)$$

Kui võtta $96a_4 - 2b_4(16 - 14\nu) = 0$, saame

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{ja} \quad \sigma_r = 28(1 + \nu)b_4z, \quad (7.21)$$

mis esitab plaadi puhast painet juhul kui ta servadesse on rakendatud ühtlaselt jaotatud momendid.

Ühtlaselt jaotatud koormusele allutatud plaadi lahendi saamiseks lähtutakse kuuendat järku polünoomidest. Vastavatele pingetele (mida siin ei esita, kuid mis sisaldavad konstante a_6 ja b_6) lisatakse lahend (7.20) juhul $b_4 = 0$ ja z -telje sihiline ühtlane tõmme $\sigma_z = b$ lahendist (7.19). Seega tuleb rajatingimustest

$$\begin{cases} \sigma_z = 0, & z = c; & \sigma_z = -q, & z = -c; \\ \tau_{rz} = 0, & z = \pm c; \end{cases} \quad (7.22)$$

määrata neli konstanti a_6, b_6, a_4 ja b . Kokku saame

$$\begin{cases} \sigma_r = q \left[\frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3z}{8c} \right], \\ \sigma_z = q \left[-\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3z}{4c} - \frac{1}{2} \right], \\ \tau_{rz} = -\frac{3qr}{8c^3} (c^2 - z^2). \end{cases} \quad (7.23)$$

Valemite (7.23) puhul on huvitav see, et esitatav pingeaotus on analoogne pingete σ_y ja τ_{xy} jaotusega kitsa ristkülikulise tala puhul (võrdle valem (5.63) lk. 182). Tala valemite puhul tuleb arvestada, et sisse on toodud inertsimoment $I = 2c^3/3$. Radiaalsed pinged on esitatud paaritu funktsioonina koordinaadist z ja annavad servas ühtlaselt jaotatud paindemomendi. Et saada lahendit servast vabalt toetatud plaadi jaoks, lisame pingevaldistele (7.23) lahendi (7.21) ja määrame konstandi b_4 rajatingimusest

$$\int_{-c}^c \sigma_r z dz = 0, \quad r = a. \quad (7.24)$$

Seega saab vaba toetuse puhul radiaalse normaalpinge σ_r avaldis kuju

$$\sigma_r = q \left[\frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3(2 + \nu)}{8} \frac{z}{5c} + \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3} \right]. \quad (7.25)$$

Kui võtta $r = 0$, saame pinge σ_r , mis mõjub plaadi tsentris. Elementaarteooria puhul esitab pinget plaadi tsentris valem

$$\sigma_r = \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2 z}{c^3}, \quad (7.26)$$

s.o. (7.25) viimane liige. Kui plaadi paksus $2c$ on väike võrreldes raadiusega a , siis osutuvad ka «parandusliikmed» väikesteks.

Puhta painde lisamisega ja rajatingimuse (7.24) rakendamisega kõrvaldasime me küll paindemomendid vabas servas $r = a$, kuid ei vabanenud pingetest

$$\sigma_r|_{r=a} = q \left[\frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(2 + \nu)}{8} \frac{z}{5c} \right]. \quad (7.27)$$

Nende pingete peavektor ja peamoment plaadi servas on nullid, seega tuleb lahendi täpsuse ja «kehtivuse» hindamisel rakendada Saint-Venant'i printsiipi.

Kui kasutada kuuendast kõrgemat järku polünoome, saab leida lahendeid juhtude jaoks, kus $q = q(r)$. Teist liiki Legendre'i polünoome ($Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, \dots$) kasutades saab leida lahendeid rõngasplaadi jaoks. Kõik need lahendid kehtivad juhul kui läbipainded on väikesed võrreldes paksusega $2c$. Suurte läbipainete puhul tuleb arvestada plaadi kesk- tasandi pikenemisega.

7.3 Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand.

Paragrahvis 6.1 toodud plaatide paindeteooria hüpoteesid saavad telgsümmeetrilisel juhul kuju

$$\begin{cases} w(r, z) = w(r), & u(r, z) = -z \frac{dw(r)}{dr}, & \sigma_z = 0, \\ R(r, z) = 0, & Z(r, z) = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(r). \end{cases} \quad (7.28)$$

Seejärel saame tasakaaluvõrranditele (7.2) kuju

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \frac{\sigma_\vartheta}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(r). \end{cases} \quad (7.29)$$

Viimasest kahest võrrandist saab elimineerida pinge τ_{rz} :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_\vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\sigma_r)}{\partial r^2} = \frac{zp}{i}, \quad i = \frac{h^3}{12} \quad (7.30)$$

kus i on inertsimomendi intensiivsus. Elastse pinna diferentsiaalvõrrandi saamiseks tuleb nüüd deformatsioonid avaldada läbi siirete Chauch seoste abil ning seejärel pinged deformatsioonide kaudu üldistatud Hooke'i seaduse abil. Tulemuseks on neljandat järku diferentsiaalvõrrand

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p}{D}, \quad D = \frac{Ei}{1 - \nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (7.31)$$

Peale võrrandi (7.31) lahendamist saab leida normaalpinged

$$\begin{cases} \sigma_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \frac{z}{i} \\ \sigma_\vartheta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \frac{z}{i} \end{cases} \quad (7.32)$$

Nihkepinge τ_{rz} saame leida võrrandit (7.29)₁ integreerimisel z järgi:

$$\tau_{rz} = \int \left[\frac{\sigma_\vartheta}{r} - \frac{1}{r} (r\sigma_r) \right] dz = \dots, \quad (7.33)$$

kust peale rajatingimuste $\tau_{rz}|_{z=\pm h/2} = 0$ rahuldamist saame

$$\tau_{rz} = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (7.34)$$

Analoogiliselt valemitele (6.15) on pingete ja sisejõudude vahelised seosed kujul

$$\sigma_r = \frac{M_r z}{i}, \quad \sigma_\vartheta = \frac{M_\vartheta z}{i}, \quad \tau_{rz} = \frac{3Q_r}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad (7.35)$$

kust saame

$$\begin{cases} M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_\vartheta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \\ Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \end{cases} \quad (7.36)$$

Diferentsiaalvõrrandi (7.31) saab kirjutada lahendamiseks sobivamale kujule:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{D}. \quad (7.37)$$

Juhul kui $p(r) = p_o = \text{const}$ saame viimasest

$$w(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 + \frac{p_o r^4}{64D}. \quad (7.38)$$

Konstantide C_1, \dots, C_4 määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi $w(r)$,

$dw(r)/dr$, $M_r(r)$, $M_\vartheta(r)$ või $Q_r(r)$ jaoks. Vastavad avaldised omavad kuju

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw(r)}{dr} = 2C_1 r \ln r + C_1 r + 2C_2 r + \frac{C_3}{r} + \frac{p_o r^3}{16D}, \\ M_r(r) = -D \left[2C_1(1+\nu) \ln r + C_1(3+\nu) + 2C_2(1+\nu) - \frac{C_3(1-\nu)}{r^2} \right] - \\ \quad - (3+\nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ M_\vartheta(r) = -D \left[2C_1(1+\nu) \ln r + C_1(1+3\nu) + 2C_2(1+\nu) + \frac{C_3(1-\nu)}{r^2} \right] - \\ \quad - (1+3\nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ Q_r(r) = -\frac{4DC_1}{r} - \frac{p_o r}{2}. \end{array} \right. \quad (7.39)$$

Suurustest (7.38) ja (7.39) on välisserval teada tavaliselt kaks.

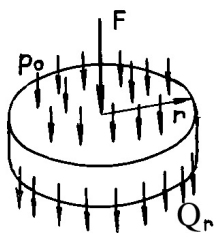
Rõngasplaadi puhul lisandub siseservas veel kaks tingimust, mis kokku võimaldavad määrata neli konstanti.

Ümar- ehk ringplaatide korral peab konstant $C_3 = 0$ — vastasel korral poleks siirded plaadi keskel lõplikud suurused, sest $\ln r \rightarrow -\infty$ kui $r \rightarrow 0$. Samas, $r^2 \ln r \rightarrow 0$, kui $r \rightarrow 0$. Konstandi C_1 määramiseks kasutame tingimust, et mööda suvalist kontsentrilist ringjoont mõjuv põikjõud peab tasakaalustama selle ringjoone sees mõjuva koormuse.

- *Ühtlane koormus p_o* . Eeldades nii p kui Q_r jaoks positiivsed suunad (vt. joonis), saame

$$2\pi r Q_r + \pi r^2 p_o = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{p_o r}{2}. \quad (7.40)$$

Seega (7.39)₃ põhjal peab $C_1 = 0$.



- *Tsentris mõjuv koondatud jõud F .* Nüüd

$$2\pi r Q_r + F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{F}{2\pi r}. \quad (7.41)$$

Võttes avaldises (7.39)₃ koormuse $p_o = 0$ saame

$$Q_r = -\frac{4DC_1}{r} = -\frac{F}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{F}{8D\pi}. \quad (7.42)$$

7.4 Näiteid ümar- ja rõngasplaatide paindeülesannetest.

7.4.1 Rajatingimused

- jäik kinnitus

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0; \quad (7.43)$$

- vaba toetus

$$w = 0, \quad M_r = 0; \quad (7.44)$$

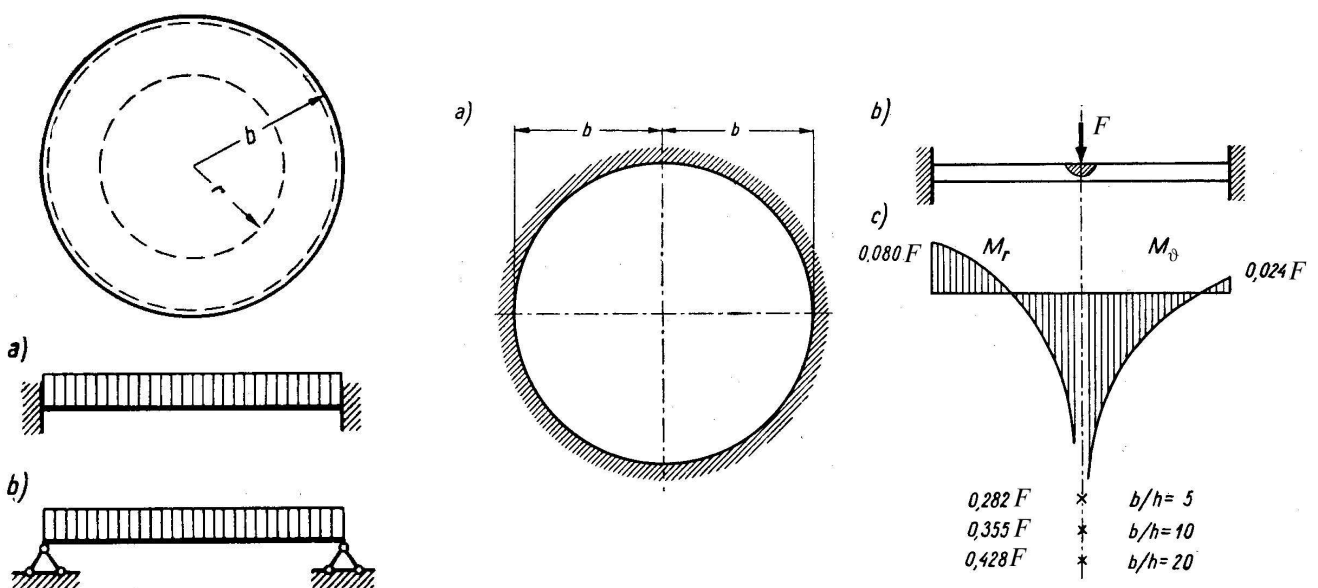
- vaba serv

$$M_r = 0, \quad Q_r = 0. \quad (7.45)$$

7.4.2 Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat (vt. joonis 7.3).

Konstandid $C_1 = C_3 = 0$ ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\left\{ \begin{array}{l} w(r) = C_2 r^2 + C_4 + \frac{p_o r^4}{64D} \\ \frac{dw(r)}{dr} = 2C_2 r + \frac{p_o r^3}{16D}, \\ M_r(r) = -2DC_2(1 + \nu) - (3 + \nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ M_\vartheta(r) = -2DC_2(1 + \nu) - (1 + 3\nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ Q_r(r) = -\frac{p_o r}{2}. \end{array} \right. \quad (7.46)$$



Joonis 7.3: Ühtlaselt koormatud ümarplaadi paine.

Joonis 7.4: Koondatud jõuga koormatud ümarplaadi paine.

a) Jäik kinnitus (vt. joonis 7.3 a))

Rajatingimused plaadi välisservas $r = b$ on antud kujul $w = 0$ ja $dw/dx = 0$. Kasutades viimaseid, saame määrata konstandid C_2 ja C_4 :

$$C_2 = -\frac{p_o b^2}{32D}; \quad C_4 = \frac{p_o b^4}{64D}. \quad (7.47)$$

Seega saavad siirete ja paindemomentide avaldised (7.46) lõpuks kuju

$$\begin{cases} w(r) = \frac{p_o}{64D} (b^2 - r^2)^2, \\ M_r(r) = \frac{p_o}{16} [b^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)], \\ M_\vartheta(r) = \frac{p_o}{16} [b^2(1 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \end{cases} \quad (7.48)$$

Vastavad ekstremaalsed väärtused

$$\begin{cases} r = 0 : & w = \frac{p_o}{64D} b^4, \quad M_r = M_\vartheta = \frac{p_o b^2}{16} (1 + \nu), \\ r = b : & M_r(r) = -\frac{p_o}{8} b^2, \quad M_\vartheta = -\frac{p_o \nu}{8} b^2. \end{cases} \quad (7.49)$$

b) Vaba toetus (vt. joonis 7.3 b))

Kasutades rajatingimusi plaadi välisservas $r = b$ kujul $w = 0$ ja $M_r = 0$ saame määrata konstandid

$$C_2 = -\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{p_o b^2}{32D}, \quad C_4 = \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{p_o b^4}{32D} - \frac{p_o b^4}{64D}. \quad (7.50)$$

Pannes need väärtused avaldistesse (7.46) saame

$$\begin{cases} w(r) = \frac{p_o (b^2 - r^2)}{64D} \left(b^2 \frac{5 + \nu}{1 + \nu} - r^2 \right), \\ M_r(r) = \frac{p_o (3 + \nu)}{16} (b^2 - r^2), \\ M_\vartheta(r) = \frac{p_o}{16} [b^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \end{cases} \quad (7.51)$$

Ekstremaalsed väärtused on plaadi keskel, st.,

$$r = 0 : \quad w = \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{p_o b^4}{64D}, \quad M_r = M_\vartheta = \frac{p_o (3 + \nu)}{16} b^2. \quad (7.52)$$

7.4.3 Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat (vt. joonis 7.4).

Konstandid $C_1 = F/(8D\pi)$ ning $C_3 = 0$ ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\left\{ \begin{array}{l} w(r) = \frac{F}{8D\pi} r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_4, \\ \frac{dw(r)}{dr} = \frac{F}{8D\pi} r (2 \ln r + 1) + 2C_2 r, \\ M_r(r) = -D \left\{ \frac{F}{8D\pi} [2(1 + \nu) \ln r + (3 + \nu)] + C_2(1 + \nu) \right\}, \\ M_\vartheta(r) = -D \left\{ \frac{F}{8D\pi} [2(1 + \nu) \ln r + (1 + 3\nu)] + C_2(1 + \nu) \right\}, \\ Q_r(r) = -\frac{F}{2\pi r}. \end{array} \right. \quad (7.53)$$

a) Jäik kinnitus (vt. joonis 7.4)

Konstandid C_2 ja C_4 määratakse rajatingimustest $w = 0$ ja $dw/dx = 0$ plaadi välisservas $r = b$. Tulemus on

$$C_2 = -\frac{F(2 \ln b + 1)}{16D\pi}, \quad C_4 = \frac{Fb^2}{16D\pi}. \quad (7.54)$$

Siirded ja paindemomendid (7.53) saavad seejärel kuju

$$\left\{ \begin{array}{l} w(r) = \frac{F}{16D\pi} \left(2r^2 \ln \frac{r}{b} - r^2 + b^2 \right), \\ M_r(r) = -\frac{F}{4\pi} \left[1 + (1 + \nu) \ln \frac{r}{b} \right], \\ M_\vartheta(r) = -\frac{F}{4\pi} \left[\nu + (1 + \nu) \ln \frac{r}{b} \right]. \end{array} \right. \quad (7.55)$$

Plaadi servas $r = b$ paindemomendid

$$M_r = -\frac{F}{4\pi}, \quad M_\vartheta = -\frac{F\nu}{4\pi}. \quad (7.56)$$

Läbipaine plaadi keskel on lõplik, st.

$$w = \frac{Fb^2}{16D\pi}, \quad \text{sest} \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \ln \frac{r}{b} = 0. \quad (7.57)$$

Paindemomendid ei oma aga keskel lõplikke väärtusi: kui $r \rightarrow 0$ siis $M_r \rightarrow \infty$ ja $M_\vartheta \rightarrow \infty$. Täpsemad arvutused koormuse rakenduspunkti ümbruses (3–4 plaadi paksust) paksude plaatide teooria põhjal näitavad, et pinged ületavad voolavuspiiri vaid plaadi surutud osas — koormuse rakenduspunkti ümbruses tekib lokaalne voolamine. Plaadi tõmmatud kihtides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{F}{h^2}(1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right) \quad (7.58)$$

ning neile saab vastavusse seada nn. fiktiivsed paindemomendid

$$M_r = M_\vartheta = \frac{F}{6}(1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right). \quad (7.59)$$

Vt. joonis 7.4, kus on toodud paindemomentide epüürid juhul $\nu = 0,3$. Riskikestega on tähistatud fiktiivsete paindemomentide väärtused kolme erineva raadiuse–paksuse suhte b/h jaoks. Kokkuvõttes pole olukord ohtlik kuni pinged (7.58) jäävad lubatud piiridesse.

b) Vaba toetus

Rajatingimused välisserval $r = b$ on $w = M_r = 0$, kust leiame

$$C_2 = -\frac{F}{16D\pi(1 + \nu)} [2(1 + \nu) \ln b + 3 + \nu], \quad C_4 = \frac{Fb^2(3 + \nu)}{16D\pi(1 + \nu)}. \quad (7.60)$$

Siirded ja paindemomendid (7.53) saavad seejärel kuju

$$\begin{cases} w(r) = \frac{F}{16D\pi(1 + \nu)} \left[(3 + \nu)(b^2 - r^2) + 2(1 + \nu)r^2 \ln \frac{r}{b} \right], \\ M_r(r) = \frac{F(1 + \nu)}{4\pi} \ln \frac{r}{b}, \\ M_\vartheta(r) = \frac{F(1 + \nu)}{4\pi} \left(\ln \frac{r}{b} + 1 + \nu \right). \end{cases} \quad (7.61)$$

Ekstremaalne läbipaine plaadi keskel on lõplikud

$$w = \frac{Fb^2(3 + \nu)}{16D\pi(1 + \nu)}. \quad (7.62)$$

Paindemomendid, aga on avaldiste (7.62) põhjal plaadi keskel lõpmata suured. Analoogiliselt jäiga kinnitusega näitab ka siin täpsem uuring, et koormu-

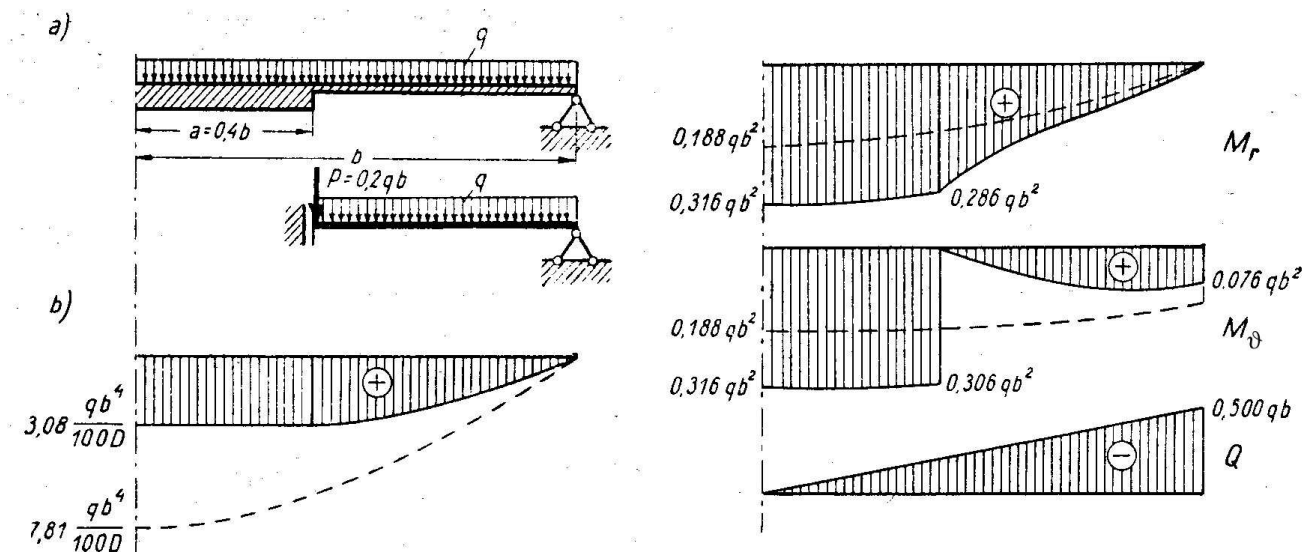
se rakenduspunkti lähedal tekib lokaalne plastne tsoon kuid plaadi tõmmatud kihtides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{F}{h^2} \left[(1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right) + 0,48 \right]. \quad (7.63)$$

Ka sel juhul pole olukord ohtlik kuni pinged (7.63) jäävad lubatud piiridesse.

7.4.4 Rõngasplaat

a) Jäiga südamikuga ümarplaat.



Joonis 7.5: Ühtlaselt koormatud rõngasplaadi paine. NB! Joonisel q , meil p_0 !

Vaatleme vabalt toetatud astmelist ümarplaati, mille keskmise osa jäikus on suur võrreldes välise osaga (vt. joonis 7.5). Seetõttu käitub väline, st. väikese jäikusega osa kui rõngasplaat. Plaadile mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega p_o . Lihtsuse mõttes eeldame, et sisemise osa raadius $a = 0,4b$ ja $\nu = 0$. Lisaks toome sisse nn. dimensioonita raadiuse $\rho = r/b$.

Rajatingimused:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{välisserv, } \rho = 1 : \left\{ \begin{array}{l} w = 0, \\ M_r = 0; \end{array} \right. \\ \text{siseserv, } \rho = 0,4 : \left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dr} = 0, \\ Q = -0,2bp_o, \quad \text{sest } |Q \cdot 2\pi a| = |\pi a^2 p_o|. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (7.64)$$

Kasutades viimaseid koos avaldistega (7.38) ja (7.39) saame määrata konstandid C_1, \dots, C_4 . Saadud konstantide asendamisel võrrandiesse (7.38) ja (7.39)

saame siirete ja sisejõudude avaldised välise osa jaoks:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = p_o b^4 (1,562\rho^4 - 8,151\rho^2 + 2,448 \ln \rho + 6,589,) / 100D \\ \frac{dw}{dr} = p_o b^3 (6,250\rho^3 - 16,302\rho + 2,448/\rho) / 100D, \\ M_r = p_o b^2 (-18,750\rho^2 + 2,448/\rho^2 + 16,302) / 100, \\ M_\vartheta = p_o b^2 (-6,250\rho^2 - 2,448/\rho^2 + 16,302) / 100, \\ Q = -0,500p_o b\rho. \end{array} \right. \quad (7.65)$$

Plaadi keskmine, st. jäigem osa, arvutatakse vastavalt ümarplaadi valemitele. Siirete ja sisejõudude epüürid on toodud joonisel 7.5. Vasakpoolne alumine joonis esitab läbipainde epüüri ja parempoolsed sisejõudusid. Kriipsjoonega on esitatud ühtlase paksusega plaadi siirete ja sisejõudude epüürid. On näha, et keskmise osa jäikuse suurendamine vähendab küll läbipaindeid, kui samas suurendab paindemomente nii jäigastatud kui jäigastamata osas. Kuna sellega kaasneb ka pingete kasv, siis ei saa sellist tüüpi konstruktsiooni lugeda heaks.

Kui plaadi keskmise osa jäikus pole suur võrreldes äärmise osaga, siis on arvutus keerulisem, sest plaati tuleb vaadelda kui tervikut, võttes arvesse paksuse hüppelist muutust. Tuleb koostada siirete avaldised plaadi mõlema osa jaoks. Need avaldised sisaldavad 8 konstanti, millest kaks keskmisele osale vastavat on nullid. Ülejäänud 6 määratakse rajatingimustest välisserval, st. $\rho = 1$ on $w = M_r = 0$ ja pidevustingimustest siirete w ja sisejõudude Q , M_r ning M_ϑ jaoks kohal $r = a$.

b) Välisservast jäigalt kinnitatud ja siseservast vaba rõngasplaat.

Jäigalt kinnitatud välisservas $r = b$ peavad $w = 0$ ja $dw/dr = 0$. Vabas siseservas $r = a$ aga $M_r = 0$ ja $Q = 0$. Kasutades selliseid rajatingimusi saame avaldistest (7.38) ja (7.39) neli võrrandit konstantide C_1, \dots, C_4 määramiseks.

Kui konstandid on leitud saame omakorda leida siirete ja sisejõudude avaldised, milledest siinkohal esitame vaid siirete oma:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \frac{p_0 a^4}{64D} [-1 + 2(1 - k - 2\beta^2)(1 - \rho^2) + \rho^4 - 4k \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho], \\ \rho = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \\ k = \frac{(1 - \nu)\beta^2 + (1 + \nu)(1 + 4\beta^2 \ln \beta)}{(1 - \nu) + (1 + \nu)\beta^2} \beta^2. \end{array} \right. \quad (7.66)$$

Kokkuvõte. Rõngasplaatide korral on võimalikud väga mitmed jäiga kinnituse, vaba toetuse ja vaba serva kombinatsioonid. Kõigi nende puhul tuleb lähtudes avaldistest (7.38) ja (7.39) ning konkreetsetest rajatingimustest (7.43)–(7.45) koostada võrrandisüsteem konstantide C_1, \dots, C_4 määramiseks. Seejärel saadakse siirete ja sisejõudude avaldised.