Peatükk 8

Plaatide stabiilsus

8.1 Sissejuhatus

Vaatleme plaati, millele mõjuv koormus on plaadi tasandis.

- Koormus suhteliselt väike
  - tasandülesanne — plaat jääb tasapinnaliseks

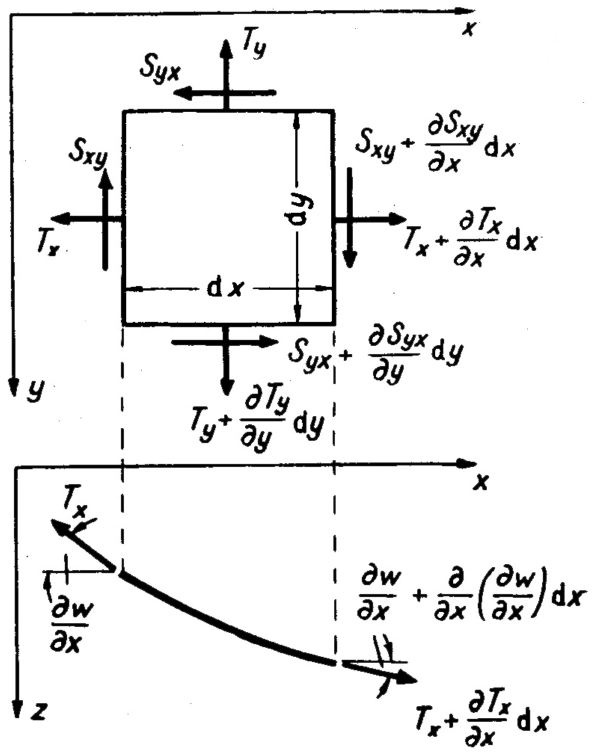
- Koormus ületab kriitilise piiri
  - Mõlgid (mõlkumine) — stabiilsuse kadu
  - Analoogia tala stabiilsuse kaoga — tala nõtke
  - Erinevus talast — stabiilsuse kadumisega koos ei pruugi kaduda plaadi kandevõime — painduvate plaatide teooria.

Vt. lisaks R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967 lk. 469–488.

8.2 Kriitilise koormuse määramine staatilise tasakaalu meetodil

Idee:

- Plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrandisse (EPDV) tuleb lisada liikmed, mis vastavad plaadi tasandis mõjuvatele jõududele.
- Tuleb leida plaadi läbipainde avaldis, mis rahuldaks nii EPDV-t kui rajatingimusi.



Joonis 8.1: Plaadi element $dx - dy - h$ ja talle mõjuvad jõud

Seni oleme EPDV tuletamisel arvesse võtnud vaid sisejõudusid (painde- ja väändemomente ning põikjõudu), mis on põhjustatud plaadile mõjuvast põikkoormusest. Hüljatud on olnud plaadi tasandis mõjuvad piki- ja nihkejõud ehk aheljõud. Stabiilsuse (ja suurte läbipainete) uurimisel tuleb aga needki arvesse võtta.

Vaatleme plaadi elementi $dx - dy - h$, millele mõjuvad pikijõud T_x ja T_y ning nihkejoud (tangentsiaaljõud) $S_{xy} = S_{yx}$ (vt. joonis 8.1). Vastavad ahelpinged[a] $\sigma_x = T_x/h$, $\sigma_y = T_y/h$ ja $\tau_{xy} = S_{xy}/h$.

[a]NB! nagu teistelgi sisejõududel on aheljõudude dimensioon N/m

Staatilise tasakaalu korral peavad vaadeldavale elemendile mõjuvate summaarsete jõudude projektsioonid koordinaattelgedel olema nullid. Eeldame, nagu eespoolgi, et pöörded on väikesed ja seega $\cos\alpha \sim 1$ ning $\sin\alpha \sim \tan\alpha \sim \alpha$. Kuna x- ja y-telgede sihis mõjuvad vaid sisejõud siis saavad tasakaaluvõrrandid kuju

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0. \tag{8.1}$$

Projekteerides jõud T_x, T_y ja $S_{xy} = S_{yx}$ z-teljele saame nn. täiendava jõu, mis tuleb lisada plaadi EPDV-sse (6.10):

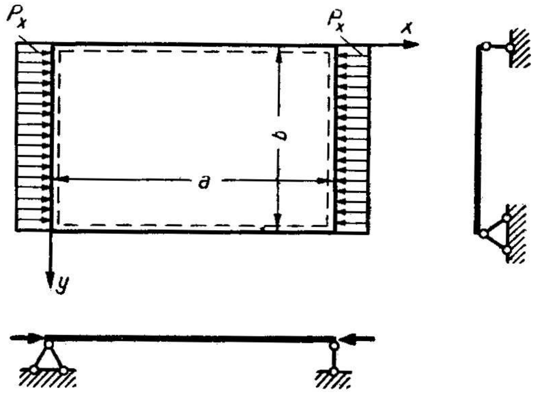
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(p(x,y) + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right). \tag{8.2}$$

Valides põikkoormuse $p = 0$, saamegi võrrandi kriitilise koormuse leidmiseks:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{8.3}$$

8.2.1 Ristkülikplaadi kriitilise koormuse leidmine

Jäigale kontuurile toetuv ühes sihis surutud plaat (joon. 8.2).



Joonis 8.2: Jäigale kontuurile toetuv ristkülikplaat.

- Koormus P_x on rakendatud plaadi servadel $x = 0$ ja $x = a$.
  - $T_x = -P_x$, $T_y = S_{xy} = 0$
  - Kriitilise koormuse määramise võrrand (8.3) lihtsustub

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{8.4}$$

- Lahendit otsime analoogiliselt Navier' meetodiga kujul

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{8.5}$$

- (8.5) $\longrightarrow$ (8.4)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 - P_x\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = 0. \tag{8.6}$$

- (8.6) peab kehtima iga x puhul $\Rightarrow$ üksikud sõltumatud võrrandid

$$P_x = \pi^2 D \frac{\left(m^2/a^2 + n^2/b^2\right)^2}{m^2/a^2}. \tag{8.7}$$

- Fikseeritud m korral omab P_x minimaalset väärtust $n = 1$ korral.

- Fikseeritud n korral sõltub minimaalset P_x tagav m väärtus suhtest a/b.
- $n = 1 \rightarrow (8.7) \Rightarrow$

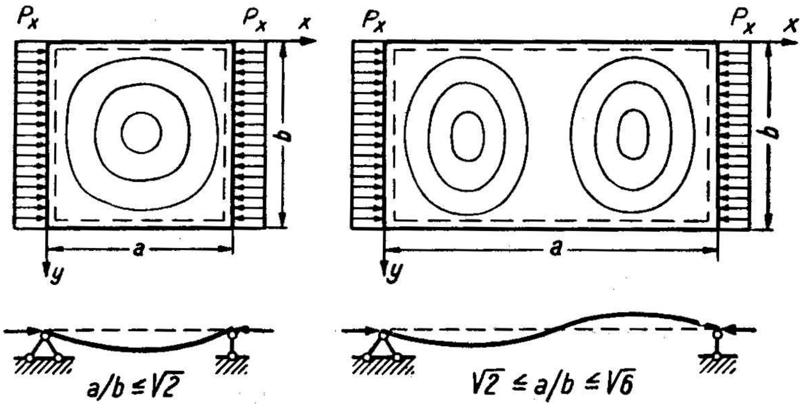
$$P_x = \frac{\pi^2 D}{a^2}\left(m + \frac{1}{m}\frac{a^2}{b^2}\right)^2. \tag{8.8}$$

P_x miinimumile vastab

$$\frac{d}{dm}\left(m + \frac{1}{m}\frac{a^2}{b^2}\right) = 1 - \frac{1}{m^2}\frac{a^2}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a}{b}. \tag{8.9}$$

- Kuna poollainete arv m saab olla vaid täisarv, kuid küljepikkuste suhe a/b ei pruugi olla täisarv, siis pole tulemus otseselt rakendatav.
  - Leiame millise a/b väärtuse korral annavad m ja $m+1$ poollainet sama kriitilise koormuse P_{kr}: m & $m+1 \rightarrow (8.8) \Rightarrow$

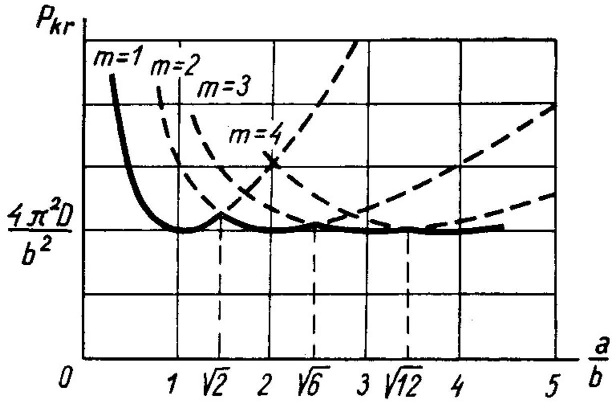
$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m+1)} \tag{8.10}$$



Joonis 8.3: Ühe ja kahe poollainega mõlkumiskujud.

  - Teisisõnu, piir ühe ja kahe poollaine vahel on $a/b = \sqrt{2}$, kahe ja kolme vahel $a/b = \sqrt{6}$, kolme ja nelja vahel $a/b = \sqrt{12}$ jne. (vt. joonised 8.3 ja 8.4).

- Üksikud kõverad joonisel 8.4 vastavad poollainete arvule $m = 1, 2, 3, \ldots$. On selge, et kriitiline koormus P_{kr} omab minimaalset väärtust $4\pi^2 D/b^2$ juhul kui a/b on täisarv. Viimase joonise põhjal on selge, et juhtude $a/b \geq 1$ korral (koormus mõjub pikema külje sihis) sobib kriitiliseks



Joonis 8.4: Kriitiline koormus sõltuvana suhtest a/b.

koormuseks see sama minimaalne väärtus

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}. \tag{8.11}$$

- Juhtudel kui $a/b < 1$ (koormus mõjub lühema külje sihis) on $m = n = 1$ ja valemist(8.8) saame

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \tag{8.12}$$

- Kui $a/b \ll 1$, siis saab viimane kuju

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2}. \tag{8.13}$$

Kriitilise pinge leidmiseks jagatakse kriitiline koormus plaadi paksusega h:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{h}. \tag{8.14}$$

Arvestades, et $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ saame pikemate külgede sihis surutud plaadi ($a/b > 1$) jaoks

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{b}\right)^2 \tag{8.15}$$

ja lühemate külgede sihis surutud plaati ($a/b < 1$) jaoks

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \tag{8.16}$$