

Peatikk 3

Deformatsioon

3.1. Siire ja deformatsioon

81

3.1 Siire ja deformatsioon

3.1.1 Cauchy seosed

Vaatleme deformeeruva keha meelevaldset punkti A . Algolekus on tema koordinaadid x, y, z . Välisjõudude toimel liigub ta asendisse A' koordinaatidega x', y', z' . Vektorit $\overline{AA'}$ nimetatakse punkti A *siirdeks ehk siirdevektorigks*.¹

Eristame kahte liikki siirded:

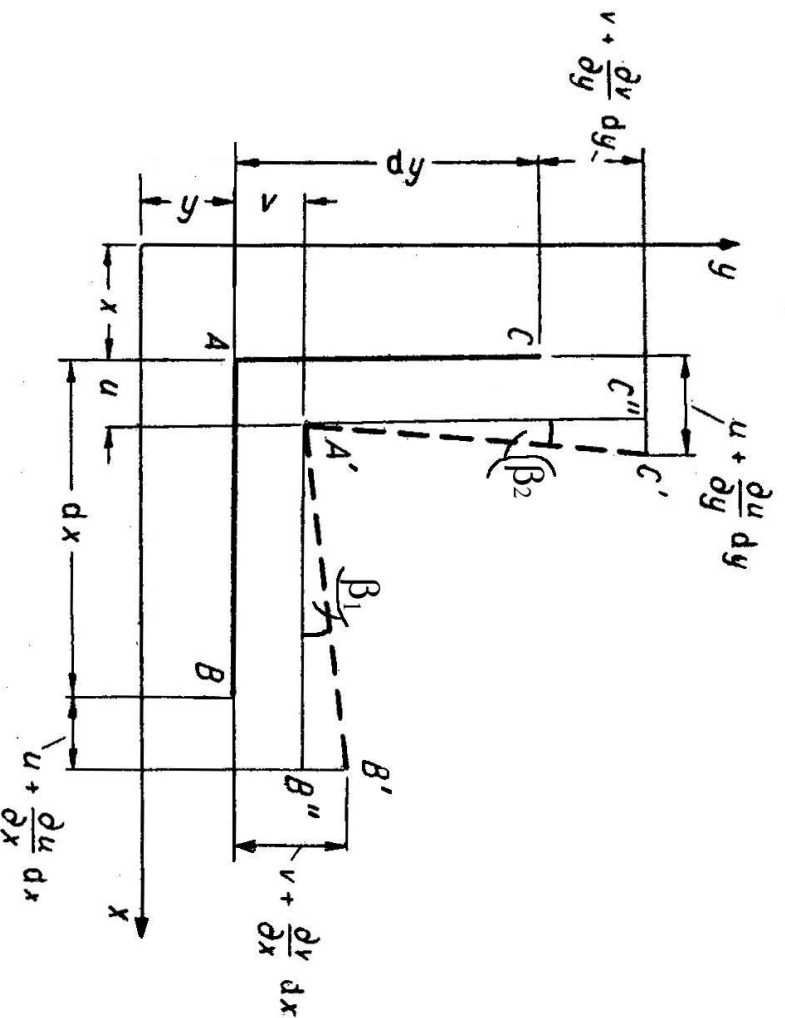
- keha kui terviku siirded (toimuvad ilma deformatsioonideta) — jäiga keha mehaanika²
- siirded, mis on seotud keha deformatsiooniga — käesolevas kursuses vaadeldakse vaid selliseid siirdeid.

Siirdevektori koordinaattelgede x, y, z sihilisi komponente tähistatakse u, v, w , st.,

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z. \quad (3.1)$$

¹Siirde sinonüüm on paigutus.

²Mitmed pideva keskkonna mehaanika õpikud nimetavad selliseid siirdeid *jäigaks deformatsiooniks*.



Joonis 3.1: Normaal- ja nihkedeformatsioon.

3.1. Siire ja deformatsioon

Kui keha deformeerub, siis peavad erinevate punktide siirded olema erinevad, st.,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (3.2)$$

Vaatleme lõpmata väikese risttahuka kahe serva käitumist x, y tasandil (joon.

3.1). Enne deformatsiooni:

- $AB = dx \parallel x$ ja $AC = dy \parallel y$;
- Punktide koordinaadid: $A : (x, y)$; $B : (x + dx, y)$; $C : (x, y + dy)$.

Peale deformatsiooni: $A \rightarrow A'$; $B \rightarrow B'$ ja $C \rightarrow C'$. Vastavad siirded:

- Punkt A : u ja v ;
- Punkt B : $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ja $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$;
- Punkt C : $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ ja $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$;

Kuna lineaarses elastusteoorias on kõik muutused väikesed, siis on väikesed ka servade AB ja AC pöördenurgad, st., $\cos \beta \sim 1$, $\sin \beta \sim \beta$ ja $\tan \beta \sim \beta$. Seetõttu lõikude AB ja AC suhtelised pikenedused (koordinaatide x ja y sihilised normaaldeformatsioonid)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{A'B'' - AB}{AB} = \frac{(dx - u + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} \approx \frac{A'C'' - AC}{AC} = \frac{(dy - v + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) - dy}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1. Siire ja deformatsioon

ja pöörded

$$\begin{cases} \beta_1 \approx \tan \beta_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)} \stackrel{= \varepsilon_x \ll 1}{=} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \beta_2 \approx \tan \beta_2 = \frac{C'C''}{A'C''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \dots = \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (3.4)$$

Nihe ehk nihkedeformatsioon on defineeritud kui algse täisnurga muutus, st. nihe xy tasandil

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Analoogiliselt saab leida suhtelised pikenemised ja nihked teistel koor-
dinaatatasanditel. Kokku saame kuus seost deformatsioonikomponentide
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ ja siirdekompontentide u, v, w vahel:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Saadud seoseid nimetatakse tihti *Cauchy võrranditeks* või *Cauchy seosteks*.

Märgireeglid:

- pikenemisele vastav normaaldeformatsioon on positiivne;
- koordinaattelgede positiivsete suundade vahelisele täisnurga vähenemisele vastav nihe on positiivne.

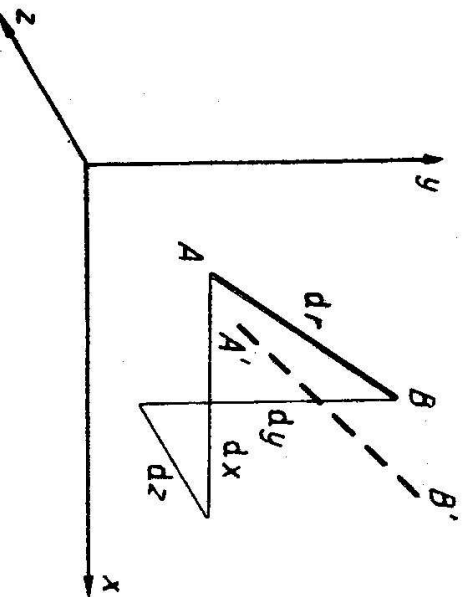
Järeldus: Positiivsed pinged põhjustavad positiivseid deformatsioone.

3.1. Siire ja deformatsioon

3.1.2 Orienteeritud lõigu pikenemine

Vaatleme kahte lõpmata lähedast punkti A ja B , kusjuures vektor $\overline{AB} = d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Siinjuures on vektori $d\mathbf{r}$ suunakoosinused

$$l = \frac{dx}{dr}, \quad m = \frac{dy}{dr}, \quad n = \frac{dz}{dr}.$$



Joonis 3.2: Lõigu AB deformatsioon

Vastava joonelemendi AB suhteline pikenenemine (deformatsioon)

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB}. \quad (3.7)$$

Siin

$$AB = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dr, \quad \left\{ \begin{array}{l} A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial r} dr\right)^2} = \dots \\ = dr \sqrt{1 + 2\left(l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}\right)}. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Kombineerides kahte viimast avaldist ning hinnates liikmete suurusjärke saame

$$\varepsilon_r = l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3.9)$$

Teisendades osatuletised r järgi osatuletisteks koordinaatide x, y, z järgi, saame³

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + lm\gamma_{xy} + mm\gamma_{yz} + ln\gamma_{xz}. \quad (3.10)$$

³Detailset tuletuskäiku vt. R. Eek, L. Poverus, Ehirusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967 lk. 279–282.

3.1. Siire ja deformatsioon

89

Rakendus tensomeetrias. Olgu vaja määrata xy tasandi meelevaldses punktis suhtelised pikenenemised ε_x ja ε_y ning nihe γ_{xy} . Kuna antud juhul on $n = 0$, siis saame valemile (3.10) kujul

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + lm\gamma_{xy}. \quad (3.11)$$

Kaks lahendust:

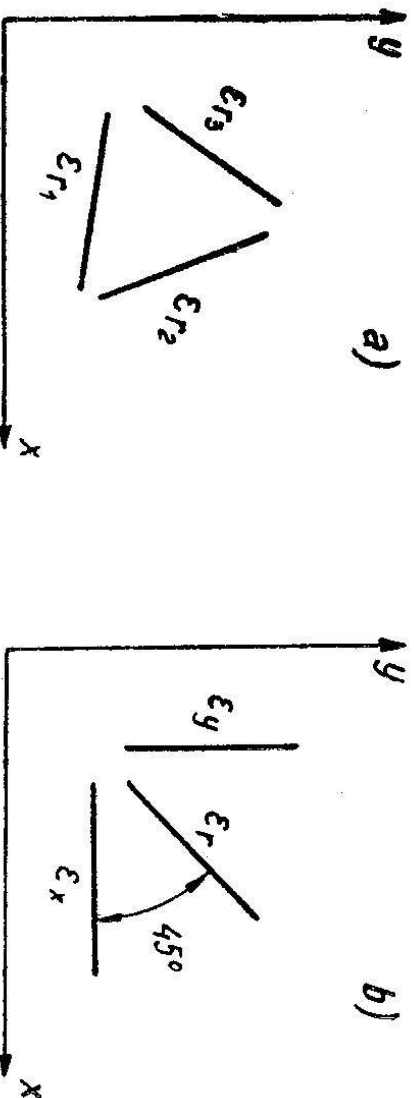
- Vaadeldava punkti ümbrusse asetatakse kolm suvaliselt orienteeritud tensomeetrit (joon. 3.3). Tensomeetrite lugemid esitavad valemi (3.11) vasakut poolt kolme erineva orientatsiooniga lõigu jaoks. Kuna tensomeetrite orientatsioon on teada (s.o. määratud sihikoosimustega l, m, n) saadakse kolmest lugemist kolm võrrandit otsitavate suuruste $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ja γ_{xy} määramiseks.

- Kui orienteerida kaks tensomeetrit telgede x ja y sihis, siis saame deformatsioonid ε_x ja ε_y otse tensomeetrite lugemitest, γ_{xy} aga avaldame võrrandist (3.11)

$$\gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_r - l^2 \varepsilon_x - m^2 \varepsilon_y}{lm}. \quad (3.12)$$

Üldjuhul on kolmas tensomeeter koordinaattelgede suhtes 45° nurga all. Seega $l = m = \sqrt{2}/2$ ja

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_r - \varepsilon_x - \varepsilon_y. \quad (3.13)$$



Joonis 3.3: Tensomeetria näide.

3.2. Deformatsioonitensor

3.2 Deformatsioonitensor

Suhtelistest pikennemistest ja nihetest saab moodustada deformatsioonitensori

$$F = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Erinevalt pingetensorist on siin nihete kordajaks 0,5. Ilma selliste kordajateta ei alluks pingetensor tensorarvutuste reeglitele.

Analoogiliselt pingetensoriga saab ka deformatsioonitensorile leida peaväärtused ja peasuunad (ehk peavektorid) ning invariantid — tuleb lihtsalt rakendada analoogilisi valemeid ja arvutuseeskirju.

3.3 Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus

Üldjuhul keha ruumala (maht) muutub deformatsiooni käigus. Vaatleme lõpmata väikest risttahukat, mille ruumala enne deformatsiooni oli $dV = dx dy dz$. Serva AB pikkus enne deformatsiooni (vt. joon. 3.1) on dx ja peale deformatsiooni $dx_1 = dx(1 + \varepsilon_x)$. Analoogiliselt $dy \rightarrow dy_1 = dy(1 + \varepsilon_y)$ ja $dz \rightarrow dz_1 = dz(1 + \varepsilon_z)$.

Keha ruumala peale deformatsiooni leiame lähtudes eeldusest, et suhtelised pikenedemised ja nihked on väikesed. Pärast mõningaid teisendusi, mille käigus hüljatakse ka teist ja kolmandat järku väikesed liikmed, saame deformeerunud elementaarristküliku mahuks $dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$. *Ruumdeformatsioon* ehk *suhteline mahumuutus* avaldub seega kujul

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.15)$$

Arvestades deformatsioonide ε_x , ε_y ja ε_z definitsioone (3.6) saame öelda, et ruumdeformatsioon on siirde divergents:

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

3.4. Pidevustingimused

93

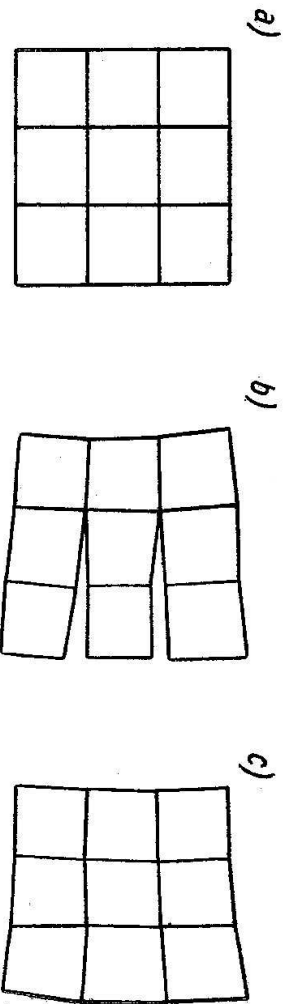
3.4 Pidevustingimused

Cauchy võrrandid (3.6) seovad kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ kolme siirdekomponendiga u, v, w .

- Kui on antud kolm siirdekomponenti u, v, w , siis võrrandite (3.6) abil on võimalik iheselt määrata kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.
- Kui on antud kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$, siis pole võrrandite (3.6) abil võimalik kolme siirdekomponenti u, v, w iheselt määrata. Ühese lahendi saamiseks tuleb sisse tuua kuut deformatsioonikomponenti siduvad lisatingimused (lisavõrrandid). Neid lisatingimusi nimetatakse *pidevustingimusteks*.⁴

⁴Pidevustingimusi nimetatakse ka pidevusvõrranditeks või sobivustingimusteks. Ingl. k. *compatibility conditions*.

Alternatiivne põhjendus pidevustingimuste sissetoomiseks.



Joonis 3.4: Pidevustingimused

Oletame, et vaadeldav keha on algolekus lõigatud väikesteks kuupideks (joon. 3.4 a). Kui iga kuupi on seejärel eraldi deformeeritud, siis on nende uuesti ühendamine sellisel, et tekkiks pidev keha üldjuhul võimatu (joon. 3.4 b). Selleks, et peale deformatsiooni oleks meil endiselt tegu pideva kehaga (joon. 3.4 c), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama teatud tingimusi, mida eestikeelses kirjanduses nimetatakse tavaliselt *pidevustingimusteks*.

3.4. Pidevustingimused

95

Pidevusvõrrandite tuletamine. Diferentseerime võrrandit (3.6)₁ kaks korda koordinaadi y järgi ja võrrandit (3.6)₂ kaks korda koordinaadi x järgi ning liidame saadud tulemused.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.16)$$

Kombineerides võrrandeid (3.6)₁₋₃ saame veel kaks analoogilist pidevusvõrrandit.

Neist aga ei piisa. Selleks, et saada veel kolm võrrandit, leiame võrrandeist (3.6)₄₋₆ osatuletised «puuduva koordinaadi» järgi, liidame (3.6)₄₋₅ ja lahutame saadud summast (3.6)₆. Seejärel võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \quad (3.17)$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks pidevusvõrrandit.

Kokku oleme saanud kuus pidevusvõrrandit, mis on tuntud ka *Saint-Venant'i pidevusvõrranditena*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

3.4. Pidevusühtlused

Saadud kuuel võrrandil on väga selge füüsikaline sisu.

1. Esimesed kolm: kui on antud normaaldeformatsioonid (suhtelised piknemised) kolmes ristuvas sihis, siis nende sihtidega määratud tasandites ei saa nihkedeformatsiooni meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega (3.18)_{1–3}.
2. Viimased kolm: kui on antud nihkedeformatsioonid kolmes ristuvastasapinnas, siis ei saa normaaldeformatsioone meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega (3.18)_{4–6}

3.5 Üldistatud Hooke'i seadus

3.5.1 Deformatsioonide avaldamine pingete kaudu

Klassikalises (lineaarses) elastsusteoorias kehtib *üldistatud Hooke'i seadus*: deformatsioonitensori komponendid on lineaarsed funktsioonid pingetensori komponentidest. Kõige tildisemal juhul saab vastavad seosed esitada kujul⁵

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{xy} + C_{15}\tau_{yz} + C_{16}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{xy} + C_{25}\tau_{yz} + C_{26}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z = C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}\tau_{xy} + C_{35}\tau_{yz} + C_{36}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}\tau_{xy} + C_{45}\tau_{yz} + C_{46}\tau_{zx} \\ \gamma_{yz} = C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}\tau_{xy} + C_{55}\tau_{yz} + C_{56}\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} = C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}\tau_{xy} + C_{65}\tau_{yz} + C_{66}\tau_{zx} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Vimmased avaldised sisaldavad 36 *elastsuskonstanti* — seda on palju!

⁵Sellisel kujul on pingete ja deformatsioonide vahelised seosed esitanud näiteks õpikutes R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967 ja V. I. Samul, Osnovõ Teorii Uprugosti i Plastišnosti /Elastsus- ja plastusteooria alused/, Moskva, Vöšaja Skola, 1982.

3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

Kui eeldada, et keha on ideaalselt elastne (st. peale koormuse kõrvaldamist taastub algne kuju) ja isotroopne, siis jääb järele vaid kaks sõltumatut elastsuskonstanti, mis on määratavad väga lihtsate eksperimentide abil ja on kasutuses ka tugevusõpetuses. Need kaks konstanti on Youngi moodul E ja Poissoni koefitsent (Poissoni tegur) ν

- Tõmme–surve (x -telje sihhis).
 - Elastsuskonstant ehk Youngi moodul E : $\varepsilon_x = \sigma_x/E$
 - Poissoni koefitsent ν : $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$
- Nihe (xy tasandis).
 - Nihkeelastusmoodul G : $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$, kus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.20)$$

Kuna nihkeelastusmoodul G on avaldatav E ja ν kaudu, siis ei saa teda pidada iseseisvaks elastsuskonstandiks.

Üldistatud Hooke'i seaduse tuletamiseks vaatleme lõpmata väikest isotroopset risttahukat, milles mõjuvad vaid normaalpinged $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Pinge $\sigma_x > 0$ põhjustab pikennemist x -telje sihis ja lühenemist y - ja z -telje sihis. Analoogiline toime on normaalpingetel $\sigma_y > 0$ ja $\sigma_z > 0$. Seega on summaarne suhteline pikennemine x -telje sihis ehk normaaldeformatsioon

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (3.21)$$

Nihkepingete ja nihkedeformatsioonide vahelised seosed on määratud Hooke'i seadusega iga koordinaat tasandi jaoks sõltumatult, s.t., τ_{xy} põhjustab vaid nihet γ_{xy} , jne. (vrd. normaaldeformatsioonidega).

Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad *üldistatud Hooke'i seadust* isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (3.22)$$

3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

101

3.5.2 Hooke'i seadus ruumdeformatsiooni jaoks

Vastavalt üldistatud Hooke'i seadusele (3.22)

$$\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{=\theta} = \frac{(1 - 2\nu)}{E} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{=I_1^\sigma} \quad (3.23)$$

Seega

$$\theta = \frac{(1 - 2\nu)I_1^\sigma}{E}. \quad (3.24)$$

Suurust $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ nimetatakse *ruumdeformatsiooniks* ja ta on ühtlasi ka deformatsioonitensori esimene invariant. Tuues sisse ruumpaisumismooduli K ja keskmise pinge σ_0 ,

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1^\sigma}{3}, \quad (3.25)$$

saame lineaarse seose keskmise pinge ja ruumdeformatsiooni vahel kujul

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (3.26)$$

3.5.3 Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu

Liidame avaldise (3.22)₁ paremale poolele ja lahutame avaldise (3.22)₁ paremast poolest suuruse $\frac{1}{E}\nu\sigma_x$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_x - \nu I_1^\sigma]. \quad (3.27)$$

Avaldades (3.24)-st invarianti $I_1^\sigma = E\theta/(1 - 2\nu)$, saame

$$\varepsilon_x = \frac{(1 + \nu)\sigma_x}{E} - \frac{\nu\theta}{(1 - 2\nu)}, \quad \text{kust} \quad \sigma_x = \frac{E\nu\theta}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{1 + \nu} \quad (3.28)$$

Tuues sisse *Lamé koefitsiendid*

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad (3.29)$$

saame valemist (3.28)₂ $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$.

3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

Leides analoogilised avaldised σ_y ja σ_z jaoks ning avaldades seostest (3.22) nihkepinged, olemegi saanud *Hooke'i seaduse alternatiivse kuju*

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Kasutades viimaseid valemleid leiame seose pingetensori ja deformatsiooni-tensori esimese invarianti vahel

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{=I_1^\sigma} = 3\lambda\theta + 2\mu\underbrace{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}_{\theta}, \quad \text{kust} \quad I_1^\sigma = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (3.31)$$

Kui tähistada keskmist normaaldeformatsiooni

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\theta}{3}, \quad (3.32)$$

siis saame seose keskmise pinge ja keskmise normaaldeformatsiooni vahel

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0. \quad (3.33)$$

3.5.4 Anisotroopsed kehad

Paljudes õpikutes⁶ esitatakse valemitega (3.19) analoogilised pingete ja deformatsioonide vahelised seosed natuke teisel kujul. Esiteks tuuakse sisse tähistused

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad \sigma_4 = \tau_{yz}, \quad \sigma_5 = \tau_{xz}, \quad \sigma_6 = \tau_{xy} \quad (3.34)$$

ja

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_4 = 2\gamma_{yz}, \quad \varepsilon_5 = 2\gamma_{xz}, \quad \varepsilon_6 = 2\gamma_{xy}. \quad (3.35)$$

Seejärel esitatakse pinge sõltuvana deformatsioonist kujul

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

⁶Vt. näiteks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999

3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

ja deformatsioon sõltuvana pingest kujul

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Elastuskoeffitsentidest moodustatud matriksit $[C_{ij}]$ nimetatakse *jätkusmatriksiks*⁷. Matriksit $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$ võib eesti keeles seega nimetada *pöördjätkusmatriksiks*⁸.

⁷T. k. *stiffness matrix*

⁸T. k. *compliance matrix*. Tehnikasõnastikus on ingliskeelse sõna *compliance* eestikeelseks vasteks pakutud ka vetruvus.

Elmistes alajaotustes vaatlesime isotroopseid materjale ning seal oli pingete ja deformatsioonide vaheliste seoste kirjeldamiseks vaja vaid kahte sõltumatut elastsuskoeffitsenti. Anisotroopse keha puhul on elastsuskonstantide arv loomulikult suurem. Kuna anisotroopseid materjale on mitut liiki, siis tuleb vajalik elastsuskonstantide arv määrata iga liigi jaoks eraldi.

Ortotropseid materjale, näiteks vineer, on üks sagedamini esinevaid anisotroopse materjali liike. Sellisest materjalist kehade jaoks on võimalik määrata 3 omavahel ristuvat telge (peasuunada), mille sihis rakendatud normaalpinged ei põhjusta telgedevaheliste nurkade muutumist. Ortotropse materjali elastsed omadused ei muutu telgede pöörämisel 180° võrra, kuid muutuvad iga teistsuguse pöörde korral. Ortotropse materjali iseloomustamiseks on vaja iiheksat elastsuskonstanti. Valemid (3.37) saavad selliste materjalide korral kuju

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

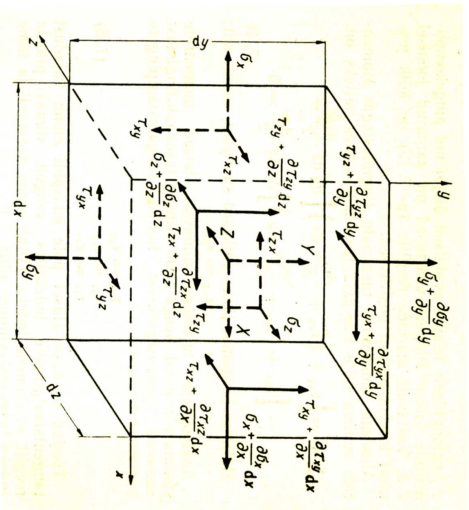
kus

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3}, \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \\ S_{55} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{44} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Konstandid $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{13}$ ja G_{23} on vastavalt Youngi moodulid, Poissoni tegurid ja nihkeelastsusmoodulid peatelgedega 1, 2, 3 määratud sihtides⁹.

⁹Vt. lisaks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999 §1.4.6

3.6 Elastusjõu töö ja deformatsiooni potentsiaalne energia



Vaatleme lõpnata väikest risttahukat (joon. 2.4). Arvestame klassikalise elastsusteooria eeldusi ja hüpoteese:

- ideaalselt elastne materjal;
- superpositsiooni printsiip;
- deformatsioonid on väikesed

ning leiame *pingete poolt keha deformeerimisel tehtava töö*.

- Vaatleme tahke, mis on risti x teljega. Eeldame, et normaalpingete toimel suureneb tahkude vaheline kaugus $d\varepsilon_x dx$ võrra.
 - Vastav elastusjõu elementaartöö (hiljates kõrgemat järku väikesed suurused): $\sigma_x dydzd\varepsilon_x dx$.

3.6. Elastusjõu töö ja deformatsiooni potentsiaalne energia

- Vaatleme tahke, mis on risti x teljega ja tahke, mis on risti y teljega. Eeldame, et nihkepingete toimel muutub nurk x ja y telje vahel väikese suuruse $d\gamma_{xy}$ võrra.
 - Vastav elastusjõu elementaartöö (hiljates kõrgemat järku väikesed suurused): $\tau_{xy} dydzd\gamma_{xy} dx$.
- Analooiliselt saab leida pingetele σ_y , σ_z , τ_{yz} ja τ_{xz} vastavad tööd.

*

Rakendame superpositsiooni printsiipi ja saame summaarse elementaartöö

$$dA^* = (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}) dx dy dz. \quad (3.40)$$

Jagades viimase elementaarruumalaga $dV = dx dy dz$, saame elementaartöö tiheduse $dA = dA^*/dV$. Kuna eelduse põhjal on materjal ideaalselt elastne, siis on tehtud töö tõttu suurendatud elementaaristahuka potentsiaalset energiat $dW^* = dA^*$ võrra.

†

Edaspidi vaatleme seega suurust dW , st. potentsiaalse energia juurdekasvu ühikruumala kohta:

$$dW = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}. \quad (3.41)$$

Asendame saadud avaldise pinged σ_x, \dots tildistatud Hooke'i seadusest (3.30) ja saame

$$\begin{aligned} dW &= (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x) d\varepsilon_x + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y) d\varepsilon_y + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z) d\varepsilon_z + \\ &+ \mu\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \mu\gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \mu\gamma_{zx} d\gamma_{zx} = \\ &= \lambda\theta d\theta + 2\mu(\varepsilon_x d\varepsilon_x + \varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z) + \\ &+ \mu(\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \gamma_{zx} d\gamma_{zx}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Viimast avaldist integreerides leiame potentsiaalse energia tiheduse sõltuvana deformatsioonidest

$$W = \frac{1}{2} [\lambda\theta^2 + 2\mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (3.43)$$

Kuna Lamé koefitsiendid (3.29) on positiivsed, siis peab ka potentsiaalne energia olema positiivne (või null) igas ideaalselt elastse keha punktis.

3.6. Elastusjõu töö ja deformatsiooni potentsiaalne energia

Kasutades taas Hooke'i seadust kujul (3.30) saame *Clapeyroni valemi* †

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (3.44)$$

Viimasest saab omakorda avaldada W läbi pingete ja elastsuskonstantide E ja ν kui kasutada Hooke'i seadust kujul (3.22)

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + 2(1 + \nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (3.45)$$

Kuna W on potentsiaalne energia, siis peab avaldis (3.41) olema funktsiooni W täisdiferentsiaal, mis omakorda tähendab, et

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, & \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, & \sigma_z = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}, \\ \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, & \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}. \end{cases} \quad (3.46)$$

Viimased avaldised on tuntud *Castigliano valemite*na. Üaltpoolu kontrolliks

leiame avaldistest (3.43)

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = \sigma_x, \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = \mu\gamma_{xy} = \tau_{xy}, \dots \end{cases} \quad (3.47)$$

Et leida kehas salvestunud summaarne potentsiaalne energia \mathcal{W} tuleb potentsiaalse energia tihedust integreerida üle kogu keha ruumala V , st.

$$\mathcal{W} = \int_V W dV = \iiint_V W dx dy dz. \quad (3.48)$$

Rakendes Clapeyroni valemnit avaldub summaarne potentsiaalne energia kujul

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.49)$$