

Peatükk 6

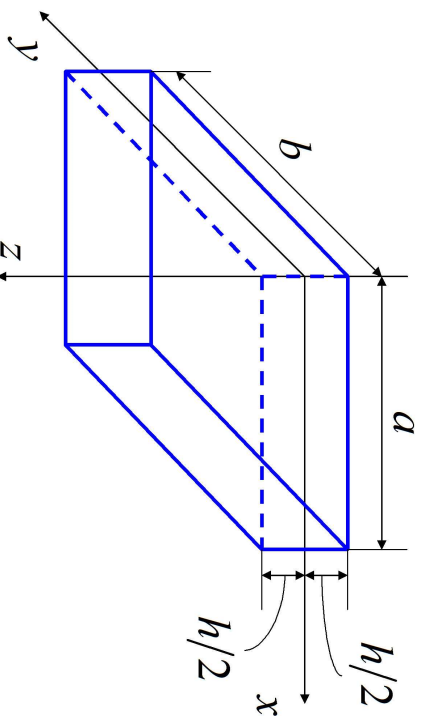
Õhukeste plaatide paine

6.1 Plaatide paindeteooria põhimõisted ja hüpoteesid

6.1. Plaatide paindeteooria põhimõisted ja hüpoteesid

244

Plaat on prismaatiline või silindriline keha, mille kõrgus on väike võrreldes teiste dimensioonidega.¹ Harilikult nimetame seda kõrgust *plaadi paksuseks* ja tähistame h . Käesolevas peatükis vaatleme ristkülikplaate, järgmises aga ka ümar- ja rõngasplaate.



Joonis 6.1: Plaadi mõõtmed ja koordinaattasandite valik.

¹Tihti defineeritakse plaat kui kooriku erijuht. *Koorik* on konstruktsioonelement, mille üks mõõde on teistega võrreldes väike. *Plaat* on koorik, mille kõverus on null, st. mida ümbritsevatest pindadest kaaks on paralleelsed tasandid.

Pinda, mis jagab plaadi paksuse kaheks võrdseks osaks, nimetatakse plaadi *keskpinnaks*. Koordinaatteljed valime nii, et x ja y teljed on kesktasandil ning z telg on suunatud alla (vt. joonis 6.1). Plaadi laiuse tähistame a ja pikkuse b .

Plaadile mõjuva koormuse saab alati lahutada kaheks komponendiks.

- Plaadi keskpinnaga ristuv koormus ehk põikkoormus
 - Plaadi paine
- Plaadi keskpinna sihis mõjuv koormus
 - Stabiilsus — kriitiline koormus — mõlkumine

*6.1. Plaatide paindeteooria põhimõistest ja hüpoteesid***Plaatide liigitus.***Paksuse järgi.*

- Paksus võib olla nii konstantne kui muutuv.
- Õhukesed ja paksud. Eegi ja Poveruse² järgi loetakse õhukeseks plaati, mille lühema külje pikkus a on vähemalt viis korda suurem kui paksus h , st., $a/h \geq 5$, Ugurali³ järgi aga kui $a/h \geq 20$.

Materjali omaduste järgi.

- isotroopsed plaadid — metallplaadid
- anisotroopsed plaadid
 - ortotroopsed plaadid — vineer, ristsarrusega raudbetoonplaat (nõrgalt ortotroopne)

²R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967³A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

Paande iseloomu järvi.

- *Jäigad plaadid.* Kui plaadi maksimaalne läbipaine on võrreldes plaadi paksusega väike, siis võtavad enamuse väliskoorrmusest vastu paindemomendid ja põikjõud. Selliseid plaate nimetatakse jäikadeks. Metsaveere⁴ põhjal on väike läbipaine 10% paksusest, Eegi ja Poveruse⁵ põhjal 1/3 Ugurali⁶ põhjal aga 1/2.
- *Membraanid.* Kui läbipainded ületavad mitmekordselt (Eek & Poverus: 5 korda) plaadi paksuse, siis võtavad enamuse koorrmusest vastu plaadi kesktasandis tekivad pikijõud — m. aheljõud. Selliseid plaate nimetatakse membraanideks.
- *Painduvad plaadid.* Plaat, mis pole ei jäigad ega membraanid nimetatakse painduvateks.

Jäikade plaatide puhul hüljatakse ahelpinged, membraanide puhul paindepinged. Painduvate plaatide korral tuleb aga arvesse võtta mõlemad. Kuna mak-

⁴J. Metsaveer, *Plaatide arvutus ja tasandülesanne*, Tallinn, 1987

⁵R. Eek, L. Poverus, *Ehitusmehaanika II*, Tallinn, 1967

⁶A. C. Ugural, *Stresses in Plates and Shells*, Boston, McGraw-Hill, 1999

6.1. Plaatide paindeteooria põhimõistest ja hüpoteesid

simaalne läbipaine sõltub mõjuvast koorrmusest, siis võib sama plaat töötada nii jäigana, painduvana kui membraanina.

Käesolevas kursuses vaatleme vaid õhukesi ühtlase paksusega isotroopseid jätku plaate. Sellise plaadi töö koorrmuse vastuvõtmisel on paljuski sarnane tala tööle. Samas aga on sisejõudude ja toereaktsioonide leidmisel olulisi erinevusi.

Õhukeste jäikade plaatide paindeteoorias on kasutusel terve rida lihtsustavaid hüpoteese, mis on sarnased tugevusõpetuses kasutatavatele. Samas ei käsitleta plaate tugevusõpetuse vaid hoopis elastsusõpetuse raames ülesannete keerukuse tõttu.

Märkus: Paljud autorid ei kasutata jäiga ja painduva plaadi mõistet, vaid ütlevad, et esimesel juhul loetakse läbipainded väikeseks ning kasutatakse klassikalist plaatide teooriat. Teisel juhul aga on tegu lõplikele ehk suurtele läbipainetele vastava teooriaga.

Hüpoteesid

1. Plaadi keskpind ei pikene ega lühene vaid ainult paindub (köverdub).
 - See viitab jäiga plaadi definitsioonile.
 - Kesktasandi punktide siirded on vaid z telje sihis, plaadi pinna sihis on siirded nullid.
2. Sirged, mis enne paindumist olid keskpinnaga risti, jäävad ka peale paindumist keskpinnaga ristuvateks sirgeteks.
 - Analoogia talade juures kasutatava ristlõigete tasandilisuse hüpoteesiga.
3. Paindumisel ei muutu plaadi mõtteliste kihtide vahelised kaugused paksuse sihis.
 - Plaadi keskpinna siire $w = w(x, y)$.
4. Plaadi paksuse sihilised normaalpinged hüljatakse väiksuse tõttu, st. $\sigma_z = 0$.

6.2. *Deformatsioonide avaldamine plaadi punkti siirete ja läbipainde kaudu.*

250

- Kuna plaat on õhuke, siis ei mõjuta see lihtsustus oluliselt lahendit.
5. Koormus mõjub plaadi pinnaga risti ja on esitatud ruumjõuna:

$$Z(x, y, z) = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) p(x, y). \quad (6.1)$$

- Selline koormus sedus annab välispinnale $z = \pm 0, 5h$ nullise koormuse, plaadi keskpinna ühiku kohta aga summaarse koormuse

$$\int_{-h/2}^{h/2} Z(x, y, z) dz = \dots = p(x, y). \quad (6.2)$$

- Tavaliselt vaadeldaksegi plaadi keskpinnal mõjuvat koormust kujul $p(x, y)$.

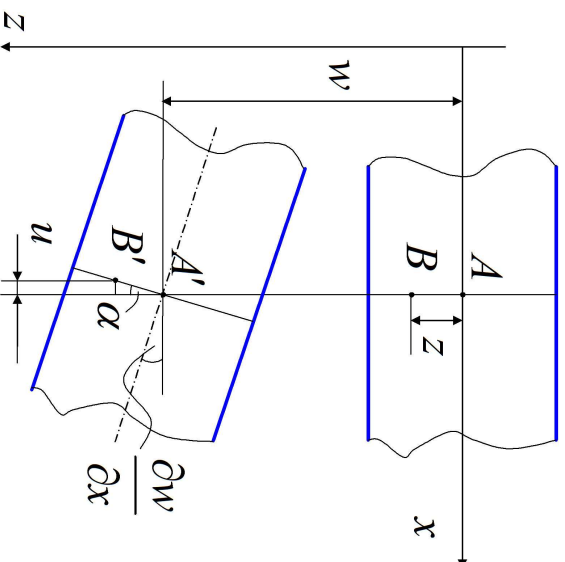
6.2 Deformatsioonide avaldamine plaadi punkti siirete ja läbipainde kaudu.

Plaadi kesktasandi punktide vertikaalsiiret $w(x, y)$ nimetatakse *läbipaindeks*.

Esimese kolme hüpoteesi põhjal on võimalik avaldada plaadi suvalise punkti

siirdekomponendid u ja v läbipaande $w(x, y)$ kaudu.

Vaatleme plaadi keskpinna normaali punktide A ja B liikumist paindel (joonis 6.2) ja leiame siirdekomponentide u ja w vahelise seose.



Joonis 6.2: Plaadi keskpinna normaali punktide A ja B liikumine paindel.

6.2. Deformatsioonide avaldamine plaadi punkti siirte ja läbipaande kaudu.

- Vastavalt tehtud hüpoteesidele saab keskpinna punkt A liikuda vaid vertikaalselt. Kesktasandi normaal peab aga jääma ka peale deformatsiooni risti keskpinnaga, seejuures $AB = A'B' = z = const$.
- Plaadi keskpind punktis A pöörduv nurga α võrra. Sama nurga võrra pöördub ka sirge AB .
 - Seega punkti B siire x telje suhtes $u = -z \sin \alpha$.
 - Kuna nurk α on väike, siis

$$\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (6.3)$$

- Analooiliselt saame siduda ka siirdekomponendid v ja w . Kokkuvõttes oleme saanud valemid

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{ja} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6.4)$$

Cauchy seoste (3.6) ja valemite (6.4) põhjal

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.5)$$

6.3 Plaadi elastse pinnavaõrrand

Lähtume tasakaalu diferentsiaalvaõrranditest (2.6)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

- Diferentseerime esimest tasakaaluvaõrrandit x järgi, teist y järgi ja kolmandat z järgi.

6.3. Plaadi elastse pinnavaõrrand

254

- Arvestades nihkepingete paarsusseadust saame ellimineerida τ_{yz} ja τ_{xz} .
- Arvestades et $\sigma_z = X = Y = 0$ ja Z on antud avaldisega (6.1) saame lõpuks vaõrrandi

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = - \frac{z p(x, y)}{i}, \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \text{kus suurus} \\ i = \frac{h^3}{12} \end{aligned} \quad (6.7)$$

kujutab endast plaadi ristlõike inertsimomenti pikkusühiku kohta, st., inertsimomendi intensiivsust.

Selleks, et tuletada pingete ja läbipainete vahelised seosed kasutame Hooke'i seadust kujul

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad (6.8)$$

ning asendame viimasesse seosed (6.5). Tulenus on järgmine:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \end{cases} \quad (6.9)$$

Pannes viimased pingevaaldised võrrandisse (6.6) saamegi plaadi elastse pinnavaõrrandi

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (6.10)$$

Suurust

$$D = \frac{Ei}{1-\nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6.11)$$

nimetatakse *silindriliseks paindejätkuseks*. Suurust $E/(1-\nu^2)$ võib siinjuures nimetada *plaadi taandatud elastsusmooduliks*. Võrrand (6.10) on jällegi *biharmooniline võrrand*.

6.4. Sisejõud

256

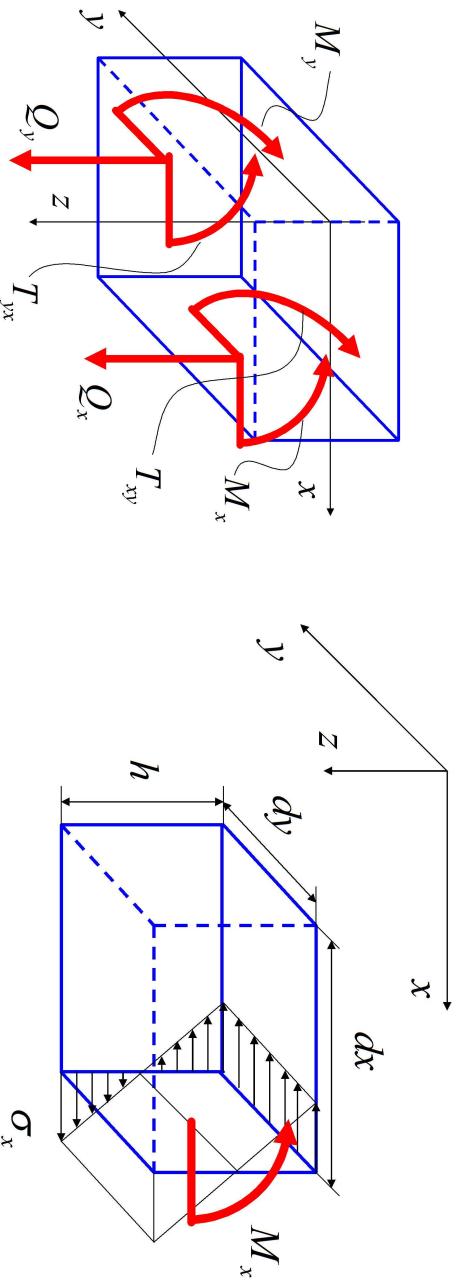
Plaadis mõjuvate pingete leidmiseks tuleb seega kõigepealt lahendada biharmooniline võrrand (6.10). Tulenusena saame plaadi läbipainde avaldise $w(x, y)$. Seejärel saame seoste (6.9) abil leida pinged σ_x , σ_y ja τ_{xy} . Nihkepingered τ_{yz} ja τ_{xz} määramiseks tuleb kasutada kahte esimest tasakaaluvõrrandit, kust saab avaldada osatuletised $\partial \tau_{xz} / \partial z$ ja $\partial \tau_{yz} / \partial z$. Peale integreerimist z järgi rajatingimustel $\tau_{xz}|_{z=\pm 0,5h} = \tau_{yz}|_{z=\pm 0,5h} = 0$ saame

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ \tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right). \end{cases} \quad (6.12)$$

6.4 Sisejõud

Talade korral mõisteti sisejõudusid kogu tala laiuse ulatuses, st., sisejõuks nimetati mingis ristlõikes mõjuvat summaarset jõudu või momenti. Plaatide korral on kasutused teistsugune lähenemine. Siin nimetatakse sisejõuks hoopis

sisejõu intensiivsust. Teisisõnu, painde- ja väändmomentide ning põikjõu asemel vaadeldakse vastavaid suurusi pikkusühiku kohta.



Joonis 6.3: Plaadi sisejõud.

Taladest erinev on ka paindemomentide ja põikjõu tähistus (joonis 6.3). Plaatide puhul on kombeks tähistada pinge σ_x poolt põhjustatud paindemomenti M_x ja σ_y poolt põhjustatud M_y . Pingest τ_{xz} ja τ_{yz} põhjustatud põikjõudu- sid tähistatakse vastavalt Q_x ja Q_y . Seega viitab plaatide korral painde- momendi ja põikjõu tähistes olev indeks vaadeldava ristloike normaali sihile.

6.4. Sisejõud

Väändmomentid $T_{xy} = T_{yx}$ on põhjustatud nihkepingetest $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Painde- ja väändmomentid. Momentide arvutamine käib tavapärasel moel ning arvestades avaldisi (6.9) saame painde- ja väändmomentid esitada läbipainde w kaudu:

$$\begin{cases} M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_x dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_y dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ T_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{xy} dz = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (6.13)$$

Põikjõudude jaoks saame avaldised

$$\begin{cases} Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right). \end{cases} \quad (6.14)$$

Märgireeglid kattuvad talade juures kasutatavatega. Positiivne paindemoment põhjustab positiivsete kihtide ($z > 0$) tõmmet. Positiivne põikjõud mõjub positiivsel pinnal z telje positiivses suunas.

Vastupidised seosed:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \sigma_x = \frac{M_x}{I} z, & \sigma_y = \frac{M_y}{I} z, & \tau_{xy} = \frac{T_{xy}}{I} z, \\ \tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right), & \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \end{array} \right. \quad (6.15)$$

On selge, et paindepinged σ_x ja σ_y ning nihkepinge (väändepinge) τ_{xy} muutuvad ristlõikes lineaarse seaduse põhjal ning omavad ekstreemseid väärtusi kohal $z = \pm 0, 5h$. Nihkepinged τ_{xz} ja τ_{yz} muutuvad aga ruutparaboolse seduse järgi omades maksimumi kohal $z = 0$.

6.4.1. Toereaktsioonid

260

6.4.1 Toereaktsioonid

Talade korral on reaktsioonjõud arvuliselt võrdsed põikjõuga toe kõrval. Plaatide puhul on olukord aga pisut komplitseeritum, sest reaktsioonjõud R_x (mõjub x telje sihilise normaaliga pinnal) ja R_y peavad tasakaalustama ka plaadis tekkinud väändemomendi mõju ja näitaks reaktsioonjõud

$$R_x = Q_x + Q'_x, \quad (6.16)$$

kus Q'_x on väändemomendi poolt tekitatud nn. täiendav põikjõud. Eelmise valemi põhjal on selge, et analoogiliselt põikjõuga, esitatakse ka reaktsioonjõud R_x ja R_y plaadi serva pikkusühiku kohta.

Selgituseks vaatleme kahte kõrvutist võrdse laiussega dy elementaarriistkülikut ristlõikes, mille normaal on x telje sihiline (joonis loengus). Parempoolsel ristkülikul mõjub summaarne väändemoment $T_{xy} dy$ ja vasakpoolsel ($T_{xy} + (\partial T_{xy} / \partial y) dy$). Asendamme need väändemendid jõupaaridega ($F_x, -F_x$) ja ($F'_x, -F'_x$), kus $F_x = T_{xy}$ ja $F'_x = T_{xy} + (\partial T_{xy} / \partial y) dy$. On selge, et kahe elementaarriistküliku ühisel serval on nii tekkinud täiendav põikjõud $dF = F'_x - F_x = (\partial T_{xy} / \partial y) dy$. Selline täiendav põikjõud tekib igas elementaarriistkülikus laiu-

✓
pin-
gete
epüüri

sega dy . Tähistame selle jõu intensiivsuse $Q'_x = dF/dy = \partial T_{xy}/\partial y$. Korrates sama protseduuri y telje sihilise normaaliga ristlõike jaoks saame täiendava põikjõu intensiivsusega $Q'_y = dF/dx = \partial T_{xy}/\partial x$. Reaktsioonjõud on seega

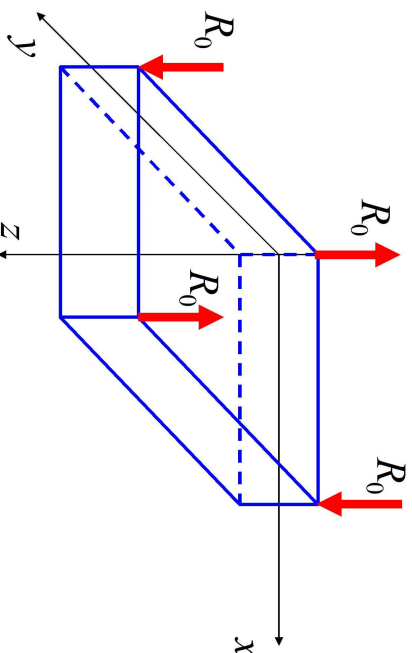
$$\begin{cases} R_x = Q_x + Q'_x = Q_x + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ R_y = Q_y + Q'_y = Q_y + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{cases} \quad (6.17)$$

Sellisel sisse toodud jõupaarid annavad aga lisaks mööda külgi jaotunud reaktsioonjõule (reaktsioonjõu intensiivsusele) veel täiendavad koondatud reaktsioonjõud

$$R_o = T_{xy} + T_{yx} = 2T_{xy} \quad (6.18)$$

plaadi nurkadesse. Vastavate reaktsioonjõudude positiivsed suunad on näidatud joonisel 6.4. Nende koondatud reaktsioonide sissetoomise vajadus tuleneb faktist, et plaadi nurgapunktides puuduvad vaadeldud elementaar-ristkülikutel tasakaalustavad naaberristkülikud.

6.5. Rajatingimused

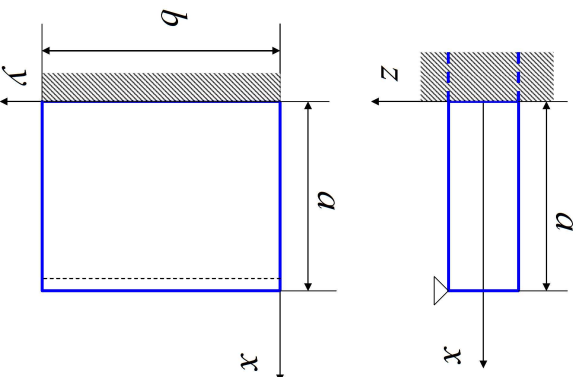


Joonis 6.4: Reaktsioonjõudude positiivsed suunad.

6.5 Rajatingimused

Biharmonilise võrrandi lahendamiseks on vaja teada vajalikul hulgal *raja-ehk serva-ehk ääretingimusi*. Kuna võrrandi järk on mõlema koordinaadi (x ja y) järgi neli, siis on vaja mõlema koordinaadi järgi ka neli rajatingimust. Teisisõnu, iga plaadi serva jaoks kaks tingimust. Füüsikaliselt peavad need tingimused vastama plaadi serva kinnituvile.

Kolm tüüpilist plaadi serva kinnitustviisi ja vastavad tähistused on esitatud joonisel 6.5. Serv $x = 0$ on järgalt kinnitatud, serv $x = a$ vabalt toetatud (liigendiga kinnitatud) ning servad $y = 0$ ja $y = b$ vabad.



Joonis 6.5: Plaadi serva kinnitustviisid ja vastavad tähistused.

6.5. Rajatingimused

Vaatleme järgnevalt nelja juhtu.

1. Järgalt kinnitatud serv ehk kinnisserv. Sellise kinnitustviisi korral ei saa plaadi serv omandada deformatsiooni käigus ei pöörideid ega siirdeid ja ääretingimused on esitatavad kujul

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{ja/või} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (6.19)$$

2. Vabalt toetatud serv või liigendiga kinnitatud serv. Antud juhul ei saa plaadi servapunktid siirdeid, kui pööride on lubatud. Sellisel toetatud plaadi serv ei võta vastu momente ja ääretingimused saavad kuju

$$w = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{ja/või} \quad M_y = 0. \quad (6.20)$$

Avaldise (6.13) põhjal $M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$. Kuna mööda sirget serva tuletis $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ (sirge teine tuletis on alati null), siis saavad ääretingimused kuju (kasutades M_y jaoks analoogset lähenemist)

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ja/või} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (6.21)$$

Siin valem (6.21)₂ vastab tingimusele $M_x = 0$ ja (6.21)₃ vastab tingimusele $M_y = 0$.

3. Vaba serv. Sellise serva punktid võivad saada nii siirdeid kui pööride. Arvestades ääretingimuste füüsikalist sisu peavad nii paindemoment kui reaktsioonjõud olema vabas servas nullid.

$$R_x = 0 \quad \text{ning} \quad M_x = 0 \quad \text{ja/või} \quad R_y = 0 \quad \text{ning} \quad M_y = 0. \quad (6.22)$$

Arvestades reaktsioonjõudude ja paindemomentide avaldise saame viimase esitada kujul

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \text{ja/või} \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Kuna algne sirge vaba serv ei pruugi deformeerudes jääda sirgeks, siis siin pole võimalik enam täiendavaid lihtsustusi teha.

6.5. Rajatingimused

4. Sümmetriatelge. Kui plaat ja koormus omavad tihist sümmetriatelge ja toetusviis on samuti sümmetriline, siis on ka läbipaine w sümmetriline. Sel juhul piisab kui lahendada plaadi võrrand vaid ühel pool sümmetriatelge. Sümmetriatelge ennast aga vaadelda kui tinglikku (virtuaalset) serva, kus rajatingimused juhul kui sümmetriateljeks on x ja/või y telg avalduvad kujul

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad Q_x = 0 \quad \text{ja/või} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad Q_y = 0. \quad (6.24)$$

Arvestades põikjõu avaldise (6.14) saame viimastele kujul

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{ja/või} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0. \quad (6.25)$$

6.6 Ühtlaselt koormatud plaatide lihtsamad paindeülesanded

6.6.1 Silindriline paine

Kui ristkülikuline plaat on «pika ristküliku» kujuline ja koormus on pikkade külgedele sihis konstantne, siis plaadi keskosa (vt. joonis 6.6) elstne pind on silindrilise kujuga (silindri moodustaja on paralleelne y teljega). Teisisõnu, plaadi keskosas siirded $w = w(x)$. Sellist plaadi deformatsiooni nimetatakse *silindriliseks paindeks*.

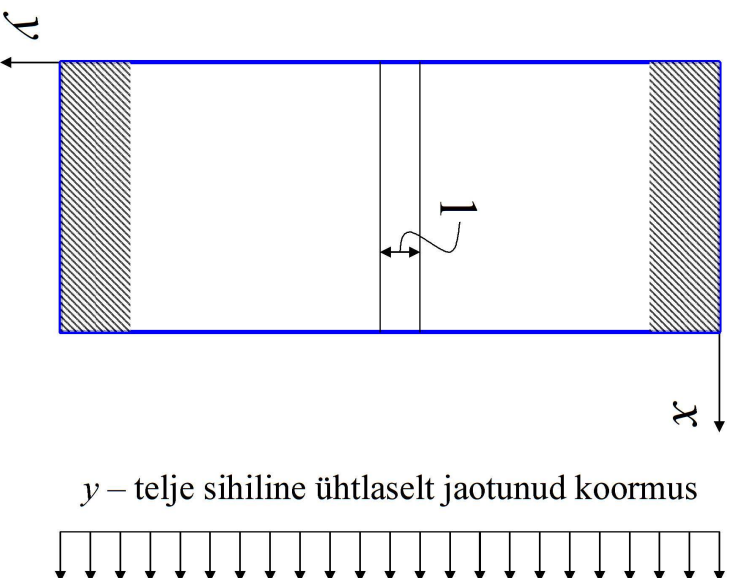
Olgu plaat välja venitatud y telje sihis ja koormus ühtlaselt jaotunud üle kogu plaadi pinna, st., $p(x, y) = p = \text{const.}$ (joon. 6.6). Plaadi elastse pinna võrrand (6.10) saab sel juhul kuju

$$D \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = p. \quad (6.26)$$

See võrrand on väga sarnane tugevusõpetusest tuntud tala elastse joone võrrandiga

$$EI \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = p. \quad (6.27)$$

6.6.1. Silindriline paine



Joonis 6.6: Pikk ristkülikuline plaat.

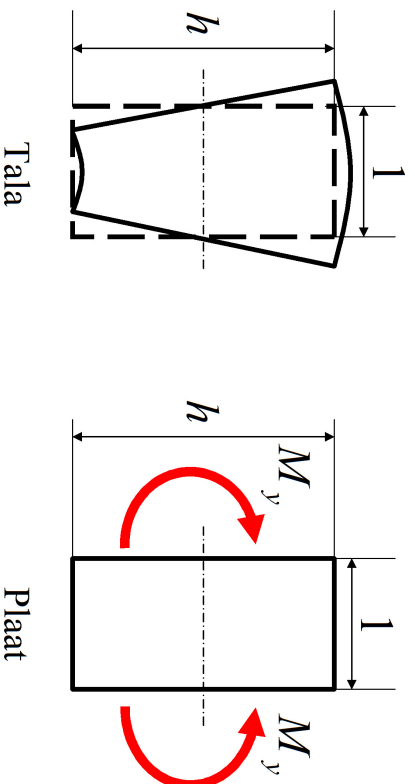
Läbipainete võrdlemiseks tuleb võrrelda plaadi paindejätkust $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ tihkulise lausega tala⁷ paindejätkusega $EI = Eh^3/12$. Kuna plaadi paindejätkus on tala omast suurem, siis on plaadi läbipaine tala omast väiksem.

Sisejõud määratakse seostest (6.13) ja (6.14). Kuna $w = w(x)$, siis ka paindemomendid ja põikjõud on vaid koordinaadi x funktsioonid.

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}, \quad M_y = -\nu D \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = \nu M_x. \quad (6.28)$$

Võrreldes taladega tekivad seega plaadis ka paindemomendid M_y . Talas neid ei teki kuna tala ristlõiked saavad vabalt deformeeruda (joon. 6.7). On ilmselge, et paindemomendid M_y põhjustavad pingeid σ_y , mida tuleb arvesse võtta näiteks raudbetoonplaatide sarrustamisel: plaat tuleb kindlasti sarrustada ka pikisuunas.

⁷Plaadi koormus on antud pinna tihiku kohta, talal aga pikkusühiku kohta



Joonis 6.7: Paindemomendid M_y .

6.6.2 Ühtlaselt koormatud jäigalt kinnitatud elliptiline plaat

See on üks vähetest plaadi painde tulesannetest, millele on võimalik leida analüütiline (täpne) lahend.

Vaatleme elliptilist plaati (joon. 6.8), millele koordinaatteljed x ja y on sümmeetritelgedeks. Sellisel juhul saame elliptilise plaadi kontuuri võrrandile kujul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6.29)$$

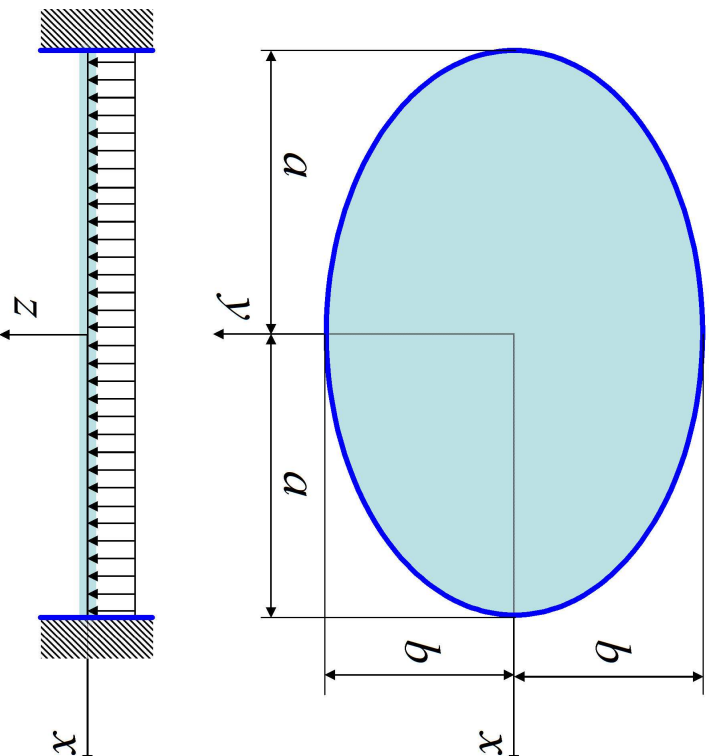
Näitame, et plaadi elastse pinnaga (keskpinna vertikaalsirete) avaldis kujul

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2, \quad (6.30)$$

kus w_0 on plaadi läbipaine koordinaatide alguses, rahuldab plaadi elastse pinnaga (diferentsiaal)võrrandit (6.10)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}$$

6.6.2. Ühtlaselt koormatud jäigalt kinnitatud elliptiline plaat



Joonis 6.8: Elliptiline plaat.

ja ääretingimusi jäigalt kinnitatud servas (6.19)

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (6.31)$$

kus n on plaadi kontuuri normaal. On ilmselge, et plaadi kontuuril on esimene neist rahuldatud. Kuna plaadi kontuuril tuletised $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$, siis on tuletised suvalises suunas, kaasa arvatud normaal n , nullid ja ääretingimused (6.31) rahuldatud.

Niüd leiame avaldisest (6.30) vajalikud osatuletised, paneme need elastse pinnavaorrandisse (6.10) ja avaldame läbipande plaadi keskel —

$$w_0 = \frac{p}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (6.32)$$

Seega saab plaadi elastse pinnavaaldis (6.30) kuju

$$w = \frac{p}{D} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2. \quad (6.33)$$

Kuna avaldis (6.33) rahuldab nii elastse pinnavaorrandit kui ääretingimusi, siis on ta vaadeldava ülesande täpseks lahendiks.

6.6.2. Ühtlaselt koormatud jäigalt kinnitatud elliptiline plaat

Eelasi on võimalik leida paindemomentide avaldised, kasutades valem

$$(6.13) \quad \left\{ \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{pa^2}{6 + 4\frac{a^2}{b^2} + 6\frac{a^4}{b^4}} \left[\left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + \nu \frac{a^2}{b^2} \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right) \right], \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{pb^2}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}} \left[\left(1 - 3\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} \right) + \nu \frac{b^2}{a^2} \left(1 - 3\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} \right) \right]. \end{aligned} \right. \quad (6.34)$$

Plaadi keskel, kus $x = y = 0$ saavad paindemomentid seega väärtuse

$$M_x = \frac{pa^2 \left(1 + \nu \frac{a^2}{b^2} \right)}{6 + 4\frac{a^2}{b^2} + 6\frac{a^4}{b^4}}, \quad M_y = \frac{pb^2 \left(1 + \nu \frac{b^2}{a^2} \right)}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}}. \quad (6.35)$$

Vaadeldava kinnitusviisi tõttu on plaadi servas paindemomendid nullist erinevad. Feldusel, et $a > b$ saame maksimaalse momendi plaadi servas kohal $x = 0$, $y = \pm b$:

$$\max M_k = -\frac{2pb^2}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}}. \quad (6.36)$$

Erijuhul $a = b = r$ saame elliptisist ringi, st., elliptilise plaadi asemel vaatlеме ringikujulist plaati ehk ümarplaati, mille korral momendid plaadi keskel ja servas saavad väärtuse

$$M_0 = \frac{pr^2}{16}(1 + \nu), \quad M_k = -\frac{pr^2}{8}. \quad (6.37)$$

Et saada maksimaalset paindepinget plaadi ristõikes, st., $\sigma(\pm h/2)$ tuleb saadud momendivaldised jagada vastupanumomendiga $W = h^2/3$.

6.7 Elastse pinna võrrandi lahendamine ristkülikulise plaadi korral

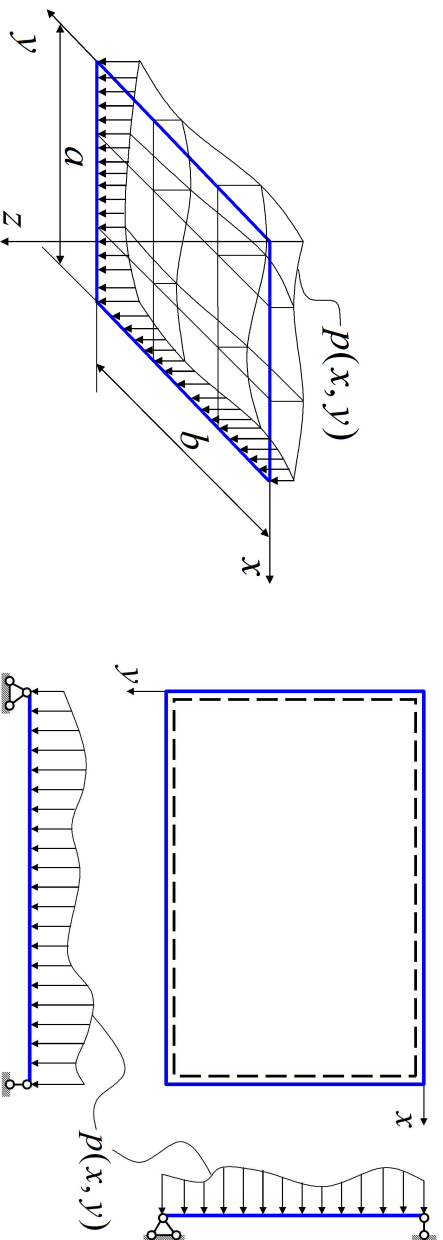
Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tuleb üldjuhul kasutada liigikaudseid meetodeid. Selliseid meetodeid on välja töötatud suhteliselt palju. Järgmistes peatükkides vaatleme neist mõningaid.

6.7.1 Navier' meetod — lahendus kahekorsetses trigonomeetrilistes ridades

Vaatleme kõikidest servadest vabalt toetatud ristkülikplaati, mis on koormatud meelevaldse ristkoormusega $p(x, y)$. Vabalt toetatud plaadi elastset pinda saab kirjeldada kahekoritse trigonomeetrilise rea abil:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.38)$$

Selle rea iga liige rahuldab ääretingimusi (6.21)



Joonis 6.9: Vabalt toetatud ristkülikplaat.

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ja/või} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (6.39)$$

seega ka kogu rea puhul on ääretingimused rahuldatud.

Plaadile rakendatud koormus arendatakse Fourier ritta, st.

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.40)$$

6.7.1. Navier' meetod — lahendus kahekorsetses trigonomeetrilistes ridades

278

Tegurid B_{mn} leitakse matemaatilisest analüüsist tuntud valemite abil

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (6.41)$$

Järgmise sammuna tuleb siire w ja koormus p asendada plaadi elastse pinnavaõrrandisse (6.10):

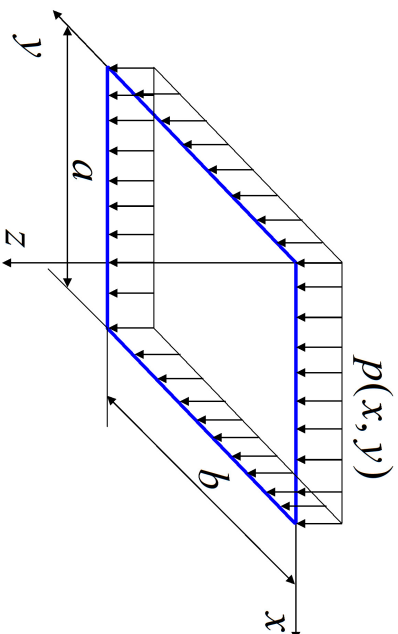
$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Kuna viimane võrrand peab kehtima iga m ja n korral, siis

$$C_{mn} = \frac{B_{mn}}{\pi^4 D [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}. \quad (6.43)$$

Kokku oleme saanud plaadi elastse pinnavaõks avaldise

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.44)$$



Joonis 6.10: Ühtlaselt koormatud ristkülikplaat.

Ühtlaselt jaotatud koormuse juht. Elastse pinnavaaldise (6.44) raken-damise näitena vaatleme ühtlaselt koormatud plaati. Sellisel juhul kordejad

$$B_{mn} = \frac{4p}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (6.45)$$

Kuna integraal

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \begin{cases} 2a/m\pi, & \text{kui } m = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{kui } m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (6.46)$$

6.7.1. Navier' meetod — lahendus kahekorsetes trigonomeetrilistes ridade

280

siis

$$B_{mn} = \frac{4p}{ab} \frac{2a}{m\pi} \frac{2b}{n\pi} = \frac{16p}{\pi^2 mn}, \quad m, n, = 1, 3, 5, \dots \quad (6.47)$$

Elastse pinnavaaldis saab antud juhul kuju

$$w(x, y) = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.48)$$

Kui tähistada plaadi külgede pikkuste suhte $b/a = \beta$ (s.t. asendame $b = a\beta$), siis saame viimasele anda kasutamiseks mugavama kuju

$$w(x, y) = \frac{16pa^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn [m^2 + (n/\beta)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a\beta}. \quad (6.49)$$

Sisejõudude leidmiseks tuleb viimasest avaldisest võtta piisaval arvul osatuletisi ning kasutada valemeid (6.13) ja (6.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = \frac{16pa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{m^2 + \nu(n/\beta)^2}{mn [m^2 + (n/\beta)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a\beta}, \\ M_y = \frac{16pa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\nu m^2 + (n/\beta)^2}{mn [m^2 + (n/\beta)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a\beta}, \\ T_{xy} = -\frac{16(1-\nu)pa^2}{\pi^4\beta} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{[m^2 + (n/\beta)^2]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a\beta}, \\ Q_x = \frac{16pa}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n [m^2 + (n/\beta)^2]} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a\beta}, \\ Q_y = \frac{16pa}{\pi^3\beta} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m [m^2 + (n/\beta)^2]} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a\beta}. \end{array} \right. \quad (6.50)$$

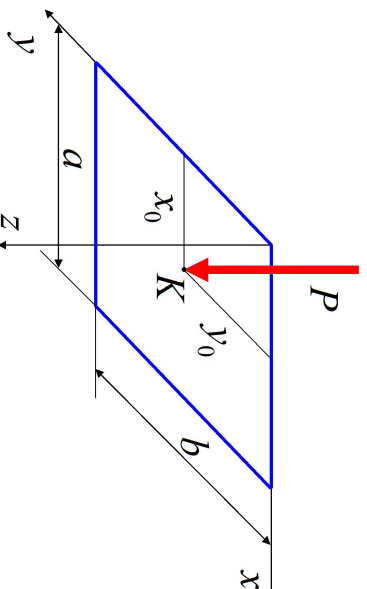
Kui on vaja leida toereaktsioonid, siis tuleb kasutada valemeid (6.17) ja (6.18).

Et välja selgitada, mitu liiget tilaltoodud trigonomeetrilistes ridades tuleb

6.7.1. Navier' meetod — lahendus kahelkorndsetes trigonomeetrilistes ridades

võtta, tuleb uurida ridade koonduvust. Selgub, et kõige kiiremini koondub läbipainde avaldis (6.49). Pisut aeglasemalt koonduvad momentide avaldised ja veelgi aeglasemalt põikjõu ja toereaktsioonide avaldised.

Koondatud jõu juht. Olgu koondatud jõud P rakendatud plaadi punktis



Joonis 6.11: Koondatud jõuga koormatud ristkülikplaad.

K koordinaatidega x_0, y_0 . Valemite tuletamiseks eeldame, et see jõud on jaotunud lõpmata väikesele pinnale $dxdy$ punkti K ümbruses:

$$p(x, y) = \frac{P}{dxdy}. \quad (6.51)$$

Tegurid B_{mn} leitakse valemiga (6.41) abil. Siin esineva kahekorsete integraali arvutamisel tuleb arvestada, et see integraal on null kõikjal peale punkti K , kus ta omab väärtust

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}. \quad (6.52)$$

Kasutades nüüd valemiga (6.44) saame avaldise

$$w(x, y) = \frac{4P}{Dab\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.53)$$

Teades läbipainet, saame leida sise- ja reaktsoonjõud kasutades vastavaid avaldiseid (6.13), (6.14), (6.17) ja (6.18).

Kuna rida (6.53) koondub aeglasemalt kui rida (6.49) ning tema abil saadud sise- ja reaktsoonjõude esitavad read aeglasemalt kui ühtlaselt jaotatud koormusele vastavad read, siis tuleb koondatud jõudude puhul olla ettevaatlik. Teisisõnu, aktsepteeritava tulemuse saamiseks tuleb siin valida tunduvalt pikemad read kui ühtlaselt jaotatud koormuse korral.

6.7.1. Navier' meetod — lahendus kahekorsetses trigonomeetrilistes ridades

Näide. Vaatleme ruutplaati, st. $b/a = \beta = 1$, millel Poissoni tegur $\nu = 0,3$ ja millele mõjub ühtlaselt jaotunud koormus $p(x, y) = p$. Leiame plaadi läbipainde, sisejõud ja toereaktsoonid mõnedes iseloomulikes punktides piirduhes vaid trigonomeetriliste ridade nelja esimese liikmega, st., $m, n = 1, 3$.

Läbipaine plaadi keskel, st. punktis $x = 0,5a$ ja $y = 0,5b = 0,5a$. Kasutame valemiga (6.49). Vaja on leida järgmised suurused:

- $\sin(m\pi x/a), \dots$
- $1 / \left\{ mn [m^2 + (n/\beta)^2]^2 \right\}, m, n = 1, 3$
- w avaldis arvestades, et $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$.

Tulemusena saame

$$w = 0,0443pa^4/Eh^3. \quad (6.54)$$

Paindemomendid plaadi keskel. Analoogiline protseduur annab tulemuseks

$$M_x = M_y = 0,0470pa^2. \quad (6.55)$$

Vändmoment plaadi nurgas $x = y = 0$ avaldub kujul

$$T_{xy} = -0,0315pa^2, \quad (6.56)$$

ning põikjõud ja toereaktsioon külje $x = 0$ keskel

$$Q_x = 0, 28pa; \quad R_x = 0, 36pa. \quad (6.57)$$

- Positiivsed paindemendid viitavad sellele, et plaadi alumine pool on tõmmatud.
- Vastavalt valemile (6.18) põhjustab vändmoment plaadi nurkades m. täiendava koondatud reaktsioonjõu $R_o = 2T_{xy} = -0,0630pa^2$. Kuna nurgas $x = y = 0$ on R_o positiivne suund ülles (vt. vastavat joonist), siis antud juhul on R_o suunatud alla. See omakorda tähendab seda, et plaadi nurk püüab ülles tõusta.
- Kiljel $x = 0$ (välisnormaal on suunatud x -telje negatiivses suunas) on positiivsed Q_x ja R_x suunatud ülles, st. z telje negatiivses suunas.

6.7.1. Navier' meetod — lahendus kahekorsetes trigonomeetrilistes ridade

Tabelite kasutamisest. Samasugused arvutused saab läbi viia ka tihed erinevate β väärtuste jaoks ja suuremate liikmete arvuga ridade jaoks. Tulenused erinevad eeltoodud näitest vaid kordajate väärtuste poolest. Seega saab plaatide arvutamisel kasutatavatele valemitele (mis esitavad läbipaindeid, seisjõudusid jne.) anda järgmise kuju:

läbipaine ja paindemendid plaadi keskel

$$w = k_1 \frac{pa^4}{Eh^3}; \quad M_x = k_2 pa^2; \quad M_y = k_3 pa^2; \quad (6.58)$$

põikjõud ja toereaktsioonid pikema külje keskel

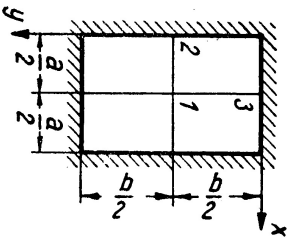
$$Q_x = k_4 pa; \quad R_x = k_6 pa; \quad (6.59)$$

põikjõud ja toereaktsioonid lühema külje keskel

$$Q_y = k_5 pa; \quad R_y = k_7 pa; \quad (6.60)$$

koondatud reaktsioonjõud plaadi nurkades

$$R_o = k_8 pab. \quad (6.61)$$



Jäigalt kinnitatud servadega plaat

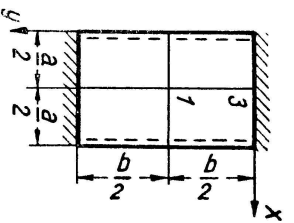
b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1,0	0,0138	0,0931	0,0231	0,0513	0,0513	0,452	0,452	0,440	0,440
1,1	0,0165	0,0964	0,0231	0,0581	0,0538	0,448	0,412	0,473	0,450
1,2	0,0191	0,0999	0,0228	0,0639	0,0554	0,471	0,381	0,493	0,457
1,3	0,0210	0,0327	0,0222	0,0687	0,0563	0,491	0,352	0,505	0,462
1,4	0,0227	0,0349	0,0212	0,0726	0,0568	0,505	0,327	0,510	0,464
1,5	0,0241	0,0368	0,0203	0,0757	0,0570	0,517	0,305	0,515	0,465
1,6	0,0251	0,0381	0,0193	0,0780	0,0571	—	—	—	—
1,7	0,0260	0,0392	0,0182	0,0799	0,0571	—	—	—	—
1,8	0,0267	0,0401	0,0174	0,0812	0,0571	—	—	—	—
1,9	0,0272	0,0407	0,0165	0,0822	0,0571	—	—	—	—
2,0	0,0276	0,0412	0,0158	0,0829	0,0571	—	—	—	—
∞	0,0284	0,0417	0,0125	0,0833	0,0571	—	—	0,500	0,465

Tabel 6.2: NB! Tabeli q on meil p .

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{En^3} & Q_x^{(2)} &= k_6 qa \\ M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 & Q_y^{(3)} &= k_7 qa \\ M_y^{(1)} &= k_3 qa^2 & R_x^{(2)} &= k_8 qa \\ M_x^{(2)} &= -k_4 qa^2 & R_y^{(3)} &= k_9 qa \\ M_y^{(3)} &= -k_5 qa^2 \end{aligned}$$

Kahel vastasserval vabalt toetatud,

kahel jäigalt kinnitatud plaat

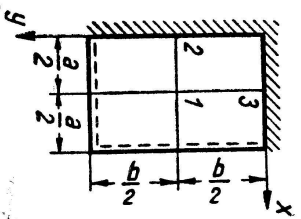


$$\begin{aligned} \text{Kui } a \gg b: & & \text{Kui } a \leq b: & \\ w^{(1)} &= k_1 \frac{qb^4}{En^3} & w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{En^3} \\ M_x^{(1)} &= k_2 qb^2 & M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 \\ M_y^{(1)} &= k_3 qb^2 & M_y^{(1)} &= k_3 qa^2 \\ M_y^{(3)} &= -k_4 qb^2 & M_y^{(3)} &= -k_4 qa^2 \end{aligned}$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
0	0,0284	0,0125	0,0417	0,0417	0,0833	—	—	—	—
1/2	0,0284	0,0142	0,0420	0,0420	0,0842	—	—	—	—
1/1,5	0,0270	0,0179	0,0406	0,0406	0,0822	—	—	—	—
1/1,4	0,0262	0,0192	0,0399	0,0399	0,0810	—	—	—	—
1/1,3	0,0255	0,0203	0,0388	0,0388	0,0794	—	—	—	—
1/1,2	0,0243	0,0215	0,0375	0,0375	0,0771	—	—	—	—
1/1,1	0,0228	0,0230	0,0355	0,0355	0,0739	—	—	—	—
1	0,0214	0,0244	0,0332	0,0332	0,0697	—	—	—	—
1,1	0,0276	0,0307	0,0371	0,0371	0,0787	—	—	—	—
1,2	0,0349	0,0376	0,0400	0,0400	0,0868	—	—	—	—
1,3	0,0425	0,0446	0,0426	0,0426	0,0938	—	—	—	—
1,4	0,0504	0,0514	0,0448	0,0448	0,0998	—	—	—	—
1,5	0,0582	0,0585	0,0460	0,0460	0,1049	—	—	—	—
1,6	0,0658	0,0650	0,0469	0,0469	0,1090	—	—	—	—
1,7	0,0730	0,0712	0,0475	0,0475	0,1122	—	—	—	—
1,8	0,0799	0,0768	0,0477	0,0477	0,1152	—	—	—	—
1,9	0,0863	0,0821	0,0476	0,0476	0,1174	—	—	—	—
2	0,0987	0,0869	0,0474	0,0474	0,1191	—	—	—	—
3	0,1276	0,1144	0,0419	0,0419	0,1246	—	—	—	—
4	0,1383	0,1223	0,0390	0,0390	0,1250	—	—	—	—
5	0,1412	0,1243	0,0379	0,0379	0,1250	—	—	—	—
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,0375	0,1250	—	—	—	—

Tabel 6.3: NB! Tabeli q on meil p .

Kabel naaberserval vabalt toetatud, kabel järgalt kinnitatud plaat



$$\begin{aligned} w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \\ M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 \\ M_y^{(1)} &= k_3 qa^2 \\ M_x^{(2)} &= -k_4 qa^2 \\ M_y^{(3)} &= -k_5 qa^2 \end{aligned}$$

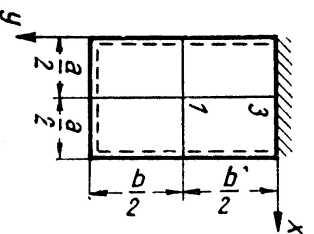
Märkus. Maksimaalne väljamoment on paindemomentist $M_x^{(1)}$ 9—16% suurem.

Tabel 6.4: NBI Tabeli q on meil p .

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
1,0	0,02229	0,0304	0,0304	0,0678	0,0678
1,1	0,0276	0,0353	0,0311	0,0766	0,0709
1,2	0,0318	0,0397	0,0312	0,0845	0,0736
1,3	0,0353	0,0435	0,0308	0,0915	0,0754
1,4	0,0384	0,0469	0,0302	0,0975	0,0765
1,5	0,0415	0,0497	0,0293	0,1028	0,0772
1,6	0,0441	0,0521	0,0284	0,1068	0,0778
1,7	0,0463	0,0541	0,0274	0,1104	0,0782
1,8	0,0482	0,0557	0,0265	0,1134	0,0785
1,9	0,0497	0,0570	0,0256	0,1159	0,0786
2,0	0,0511	0,0582	0,0247	0,1180	0,0787
∞	0,0560	0,0625	0,0188	0,1250	—

6.7.1. Navier' meetod — lahendus kahelkorsetes trigonomeetrislikes ridade

Ühel serval järgalt kinnitatud, teistel vabalt toetatud plaat

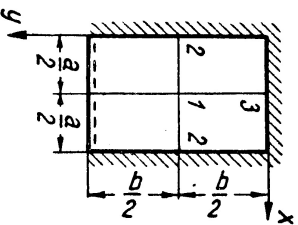


$$\begin{aligned} \text{Kui } a \gg b: \\ w^{(1)} &= k_1 \frac{qb^4}{Eh^3} \\ M_x^{(1)} &= k_2 qb^2 \\ M_y^{(3)} &= -k_4 qb^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Kui } a \leq b: \\ w^{(1)} &= k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \\ M_x^{(1)} &= k_2 qa^2 \\ M_y^{(3)} &= -k_4 qa^2 \end{aligned}$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0,0569	0,0188	0,0625	0,1250
0,5	0,0530	0,0235	0,0601	0,1210
0,6	0,0489	0,0268	0,0573	0,1156
0,7	0,0444	0,0297	0,0529	0,1086
0,8	0,0399	0,0315	0,0484	0,1009
0,9	0,0352	0,0331	0,0437	0,0922
1,0	0,0304	0,0339	0,0391	0,0840
1,1	0,0387	0,0411	0,0422	0,0916
1,2	0,0468	0,0484	0,0443	0,0983
1,3	0,0549	0,0557	0,0461	0,1040
1,4	0,0627	0,0625	0,0471	0,1084
1,5	0,0702	0,0691	0,0478	0,1121
1,6	0,0774	0,0750	0,0481	0,1148
1,7	0,0842	0,0806	0,0481	0,1172
1,8	0,0903	0,0855	0,0477	0,1189
1,9	0,0961	0,0901	0,0473	0,1204
2,0	0,1012	0,0942	0,0470	0,1216
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,1250

Tabel 6.5: NBI Tabeli q on meil p .

Ühel serval vabalt toetatud, teistel järgalt kinnitatud plaat



$$\begin{array}{ll} \text{Kui } a \geq b: & \text{Kui } a \leq b: \\ w^{(1)} = k_1 \frac{qb^4}{Eh^3} & w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \\ M_x^{(1)} = k_2qb^2 & M_x^{(1)} = k_2qa^2 \\ M_y^{(1)} = k_3qb^2 & M_y^{(1)} = k_3qa^2 \\ M_x^{(2)} = -k_4qb^2 & M_x^{(2)} = -k_4qa^2 \\ M_y^{(3)} = -k_5qb^2 & M_y^{(3)} = -k_5qa^2 \end{array}$$

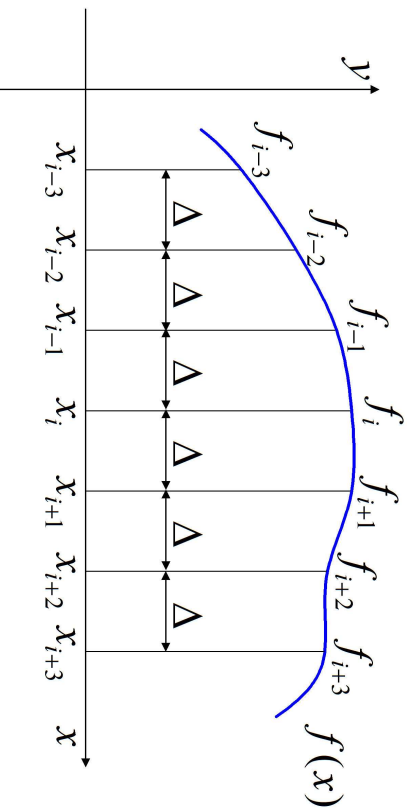
b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0	0,0569	0,0188	0,0625	—	0,1250
0,5	0,0491	0,0259	0,0558	0,0783	0,1140
0,6	0,0419	0,0290	0,0496	0,0773	0,1020
0,7	0,0346	0,0305	0,0428	0,0749	0,0907
0,8	0,0282	0,0306	0,0352	0,0708	0,0778
0,9	0,0223	0,0297	0,0294	0,0657	0,0658
1,0	0,0172	0,0278	0,0236	0,0600	0,0547
1,1	0,0197	0,0309	0,0230	0,0659	0,0566
1,2	0,0216	0,0336	0,0222	0,0705	0,0573
1,3	0,0230	0,0357	0,0211	0,0743	0,0574
1,4	0,0241	0,0374	0,0200	0,0770	0,0576
1,5	0,0251	0,0386	0,0190	0,0788	0,0569
1,6	0,0260	0,0397	0,0181	0,0803	0,0568
1,7	0,0266	0,0404	0,0172	0,0815	0,0567
1,8	0,0271	0,0410	0,0165	0,0825	0,0567
1,9	0,0274	0,0414	0,0158	0,0831	0,0566
2,0	0,0277	0,0417	0,0151	0,0833	0,0566
∞	0,0284	0,0417	0,0125	0,0833	0,0566

Tabel 6.6: NB! Tabeli q on meil p .

6.7.2. Võrgumetod ehk lõplike vahede meetod

6.7.2 Võrgumetod ehk lõplike vahede meetod

Võrgumetod ehk lõplike vahede meetod on üks diferentsiaalvõrrandite numbrilise (arvulise) lahendamise meetoditest.



Joonis 6.12: Funktsioon $f(x)$ ja tema väärtused võrgusõlmedes $f(x_i) = f_i$.

Meetodi idee: tuletsised leitakse nn. lõplike vahede abil.

- Vaatleme ühe muutuja funktsiooni $f(x)$ (vt. joonis 6.12)
- Jagame x telje osadeks võrdse sammuga $\Delta \equiv \Delta_x$ — saame 1D võrgu, mille i -ndas punktis $x = x_i$ ja $f(x_i) = f_i$.
- Tuletised punktis x_i leitakse valemitest abil, mis põhinevad tuletise definitsioonil:

$$f'(x) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}, \quad f''(x) = [f'(x)]', \dots \quad (6.62)$$

•

$$f'(x_i) = f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta},$$

$$\begin{aligned} f''(x_i) = f''_i &= \frac{f'_{i+1} - f'_{i-1}}{2\Delta} = \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta^2} = \\ &= \frac{f'_{i+1/2} - f'_{i-1/2}}{\Delta} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta^2}, \end{aligned}$$

6.7.2. Võrgumethod ehk lõplike vahede method

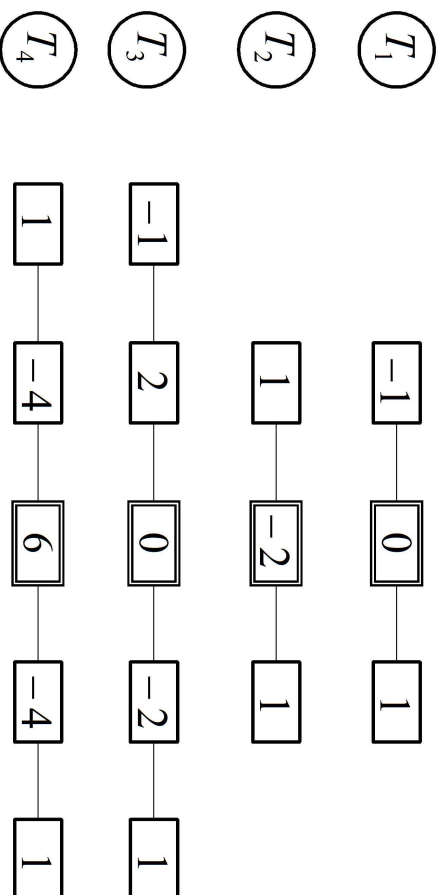
$$f'''(x_i) = f'''_i = \frac{f''_{i+1} - f''_{i-1}}{2\Delta} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta^3},$$

$$\begin{aligned} f''''(x_i) = f''''_i = f_i^{IV} &= \frac{f'''_{i+1} - f'''_{i-1}}{2\Delta} = \frac{f''_{i+1} - 2f''_i + f''_{i-1}}{\Delta^2} = \\ &= \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta^4}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

- Tihti esitatakse need ja nendega sarnased valemid nn. graafiliste operaatorite abil (vt. joonis 6.13), mis esitavad võrgu sõlmedes leitud funktsiooni väärtuste f_{i-2}, f_{i-1}, \dots kordajaid.
- Olles näiteks tähistanud i -ndale tuletisele vastava graafilise operaatori T_i , saame funktsiooni f tuletiste leidmiseks valemid

$$f'_i = \frac{T_1 f}{2\Delta}, \quad f''_i = \frac{T_2 f}{\Delta^2}, \quad f'''_i = \frac{T_3 f}{2\Delta^3}, \quad f''''_i = \frac{T_4 f}{\Delta^4}. \quad (6.64)$$

- Nimetatud graafilised operaatorid on kui trafaretid, millega liigutakse mööda võrku ja määratakse f_{i-2}, f_{i-1}, \dots kordajad i -ndas sõlmes.



Joonis 6.13: Graafilised operaatorid funktsiooni $f(x)$ tuletiste $f'_i \dots f_i^{(n)}$ numbriliseks leidmiseks.

6.7.2. Võrgumetod ehk lõplike vahede meetod

Plaadi elastse pinna siirded, sisejõud ja toereaktsioonid on kahe muutuva, x ja y , funktsioonid. Seega on nende korral vaja numbriliselt määrata osatuletisi nii x kui y järgi. Vastavad valemid on analoogilised ühe muutuva funktsioonide juures kasutatutega. Nüüd tuleb vaid kasutada kahte indeksit, näiteks punktis $x = x_i$ ja $y = y_k$ osatuletis

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{f_{i+1,k} - f_{i-1,k}}{2\Delta x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{f_{i,k+1} - f_{i,k-1}}{2\Delta y}, \quad (6.65)$$

kus Δx ja Δy on vastavalt võrgusammud x – ja y –teljel.

- Kuna vaatleme ristkülikplaate, siis pole vaja osadeks jagada kogu x ja y telge — piirdume vaid plaadi külgede pikkuste lõikudega (**joonis loengus**). Teisisõnu, vaatleme lõike $0 \leq x \leq a$ ja $0 \leq y \leq b$, mille jagame osadeks sammudega

$$\Delta x = \frac{a}{m}, \quad \Delta y = \frac{b}{n}, \quad (6.66)$$

- Vaatleme plaadi elastse pinna (diferentsiaal)võrrandit (6.10)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}$$

Tuues sisse tähistuse $W(x, y) = Dw(x, y)$, Saame viimasele kuju

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = p(x, y) \quad \text{ehk} \quad \nabla^2 (\nabla^2 W) = p. \quad (6.67)$$

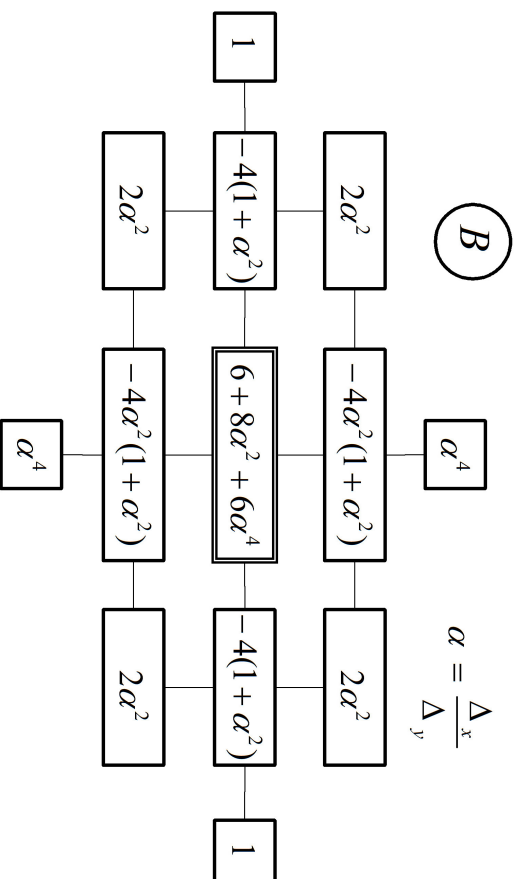
Viimases võrrandis on vaja leida neljandat järku osatuletised x ja y järgi ning samuti neljandat järku segaosatuletis.

- Võrrandi (6.67) vasakut poolt saab kujutada graafilise operatori B abil (vt. joonis 6.14). Selleks tuleb liita võrrandi liikmetele vastavad graafilised operaatorid ning tuua sisse tähistus

$$\alpha = \frac{\Delta_x}{\Delta_y} \Rightarrow \frac{1}{\Delta_y} = \frac{\alpha}{\Delta_x}. \quad (6.68)$$

- Seejärel saab biharmooniline võrrand (6.67), st. plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand, kuju

$$BW = p\Delta_x^4. \quad (6.69)$$



Joonis 6.14: Biharmoonilise võrrandi graafiline operaator B .

- **Võrgupunktide liigitus.** Vastavalt valemitele (6.66) oleme katnud ristkülikplaadi võrguga kus on $(m + 1)(n + 1)$ punkti ehk sõlme (**joonis loengus**).
 - Võrgupunkte, mis asetsevad plaadi servadel nimetame *servapunktideks* ehk *rajapunktideks*.
 - Võrgupunkte, mis asetsevad servapunktidest seespool nimetame *avapunktideks*.
 - Kuna neljanda tuletise arvutamise valemis on vaja teada funktsiooni väärtusi kahes naaberreas või naaberveerus, siis tuleb sisse tuua nn. *välis- ehk lisapunktid*, mis asuvad väljaspool plaati. Funktsiooni väärtused neis punktides määratakse rajatingimustest. Tavaliselt on võimalik piirduda ühe rea välispunktidega.
 - Punktide arv plaadil on $(m + 1)(n + 1)$, neist $(m - 1)(n - 1)$ on avapunktid ja $(m + 1)(n + 1) - (m - 1)(n - 1) = 2(m + n)$ serva- ehk rajapunktid.

- **Plaadi paindeülesande lahendamiseks** tuleb lõplikes vahedes esitatud biharmoонiline võrrand kujul (6.69) lahti kirjutada igas avapunktis.
 - Tulemusena saame võrrandisüsteemi, kus on avapunktide arvuga võrdne arv algebralisi võrrandeid. Saadud süsteemi lahend annabki meile plaadi elastse pinna siirded (lähbipainded) avapunktides.
 - Servapunktide siirded on esitatud rajatingimuste abil.
 - Kui siirded on leitud, siis nende abil saame leida sisejõud vastavalt valemitele (6.13)

$$\begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \frac{M_x W}{\Delta_x^2}, \\ M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = \frac{M_y W}{\Delta_y^2}, \\ T_{xy} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = (1 - \nu) \alpha \frac{T_{xy} W}{4 \Delta_x^2} \end{cases} \quad (6.70)$$

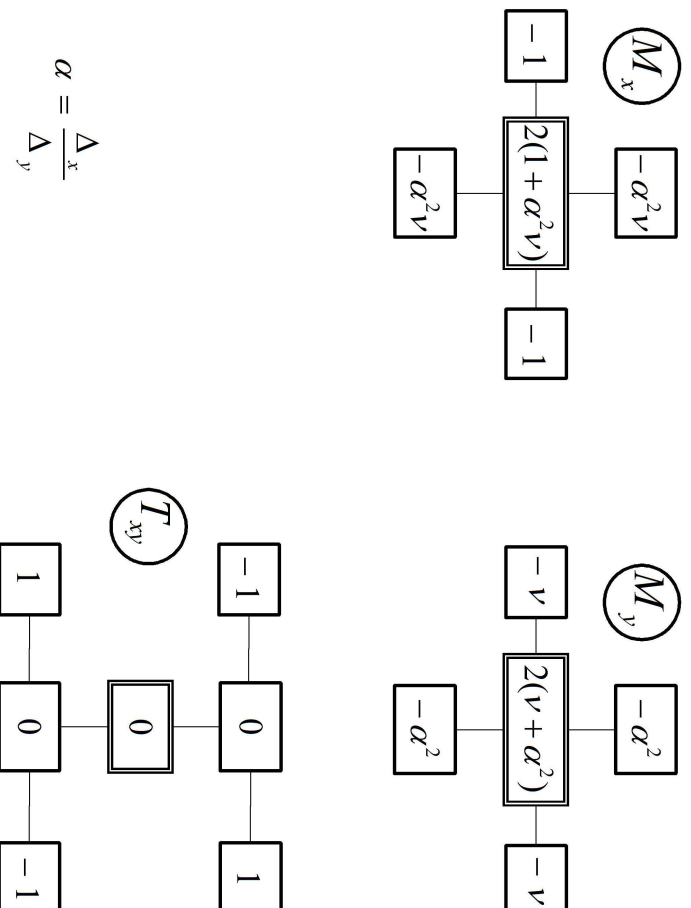
ja (6.14)

$$\begin{cases} Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{Q_x W}{2\Delta_x^3}, \\ Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) = \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right) = \alpha \frac{Q_y W}{2\Delta_x^3}. \end{cases} \quad (6.71)$$

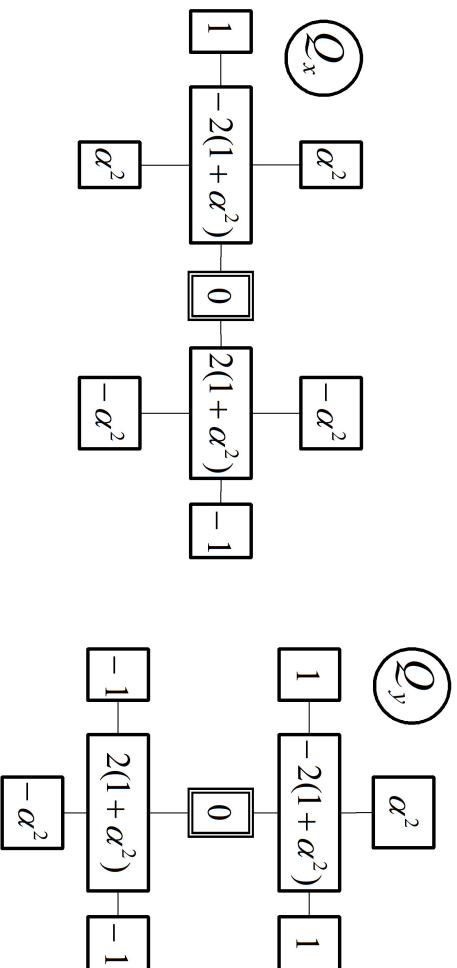
M_x, M_y, T_{xy}, Q_x ja Q_y on graafilised operaatorid (vt. joon. (6.15)) ja (6.16)).

- Toereaktsioonide leidmise juures õnnestub plaadi elastse pinnavaorrandi abil ellimineerida nn. teise rea välispunktid. Kasutades graafilisi operaatoreid \mathcal{R}_x ja \mathcal{R}_y (vt. joon. (6.17)–(6.20)) saab vastavard avaldised esitada kujul

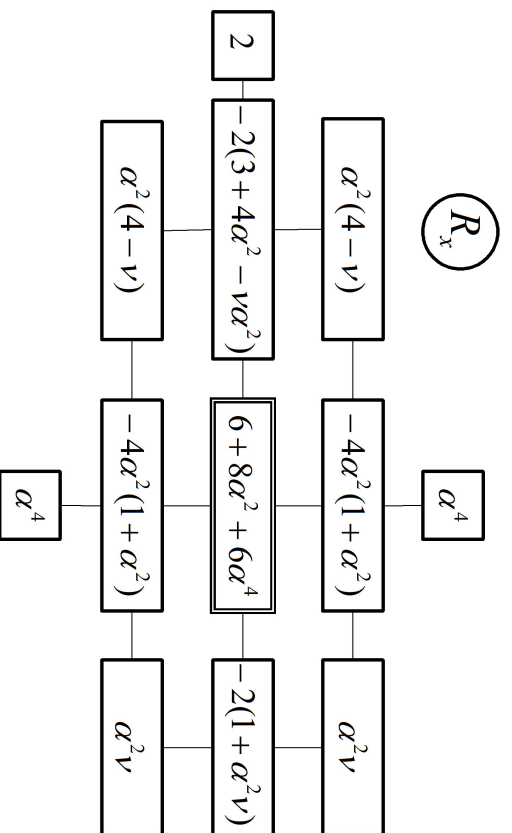
$$R_x = \frac{\mathcal{R}_x W}{2\Delta_x^3} - \frac{p\Delta_x}{2}, \quad R_y = \frac{1}{\alpha} \frac{\mathcal{R}_y W}{2\Delta_x^3} - \frac{p\Delta_x}{2}. \quad (6.72)$$



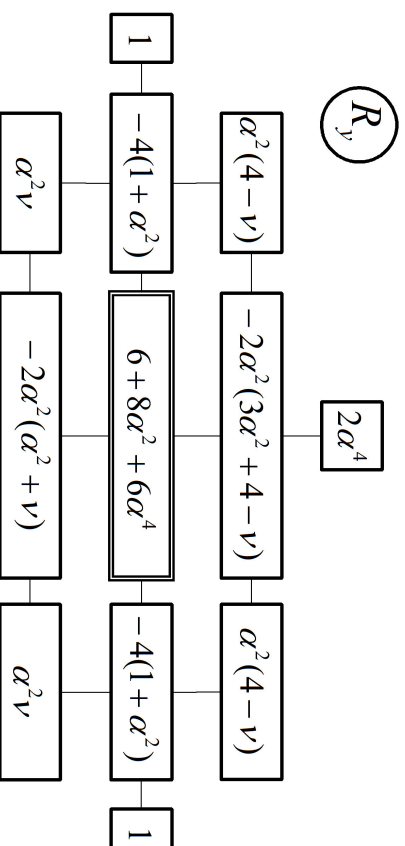
Joonis 6.15: Graafilised operaatorid painde- ja väändemomentide leidmiseks.



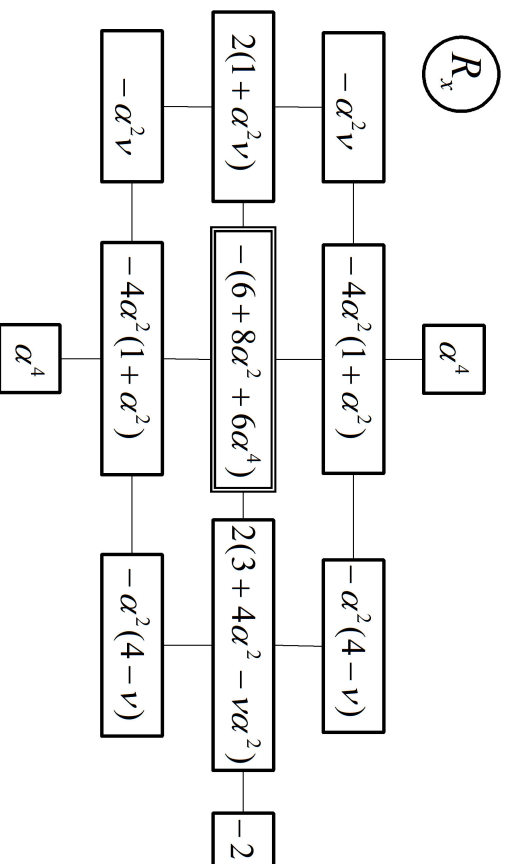
Joonis 6.16: Graafilised operaatorid põikjõudude leidmiseks.



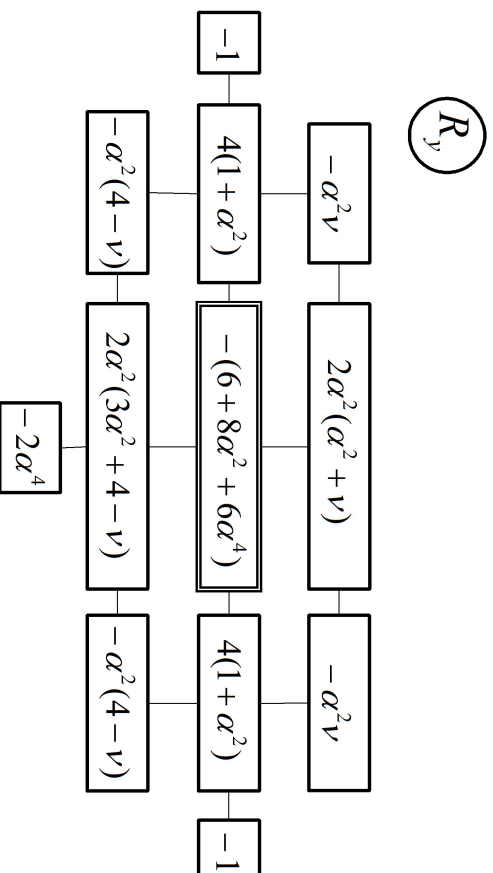
Joonis 6.17: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.



Joonis 6.18: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.



Joonis 6.19: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.



Joonis 6.20: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.

Ääritingimused.

- **Kinnisserv.** Servapunktides, mis on risti x –teljega

$$W_i = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=x_i} = 0 \Rightarrow W_{i-1,k} = W_{i+1,k}. \quad (6.73)$$

Servapunktides, mis on risti y –teljega

$$W_i = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{y=y_k} = 0 \Rightarrow W_{i,k-1} = W_{i,k+1}. \quad (6.74)$$

- **Vabalt toetatud serv.** Servapunktides, mis on risti x –teljega

$$W_i = 0, \quad (M_x)_{x=x_i} = 0 \Rightarrow W_{i-1,k} = -W_{i+1,k}. \quad (6.75)$$

Servapunktides, mis on risti y –teljega

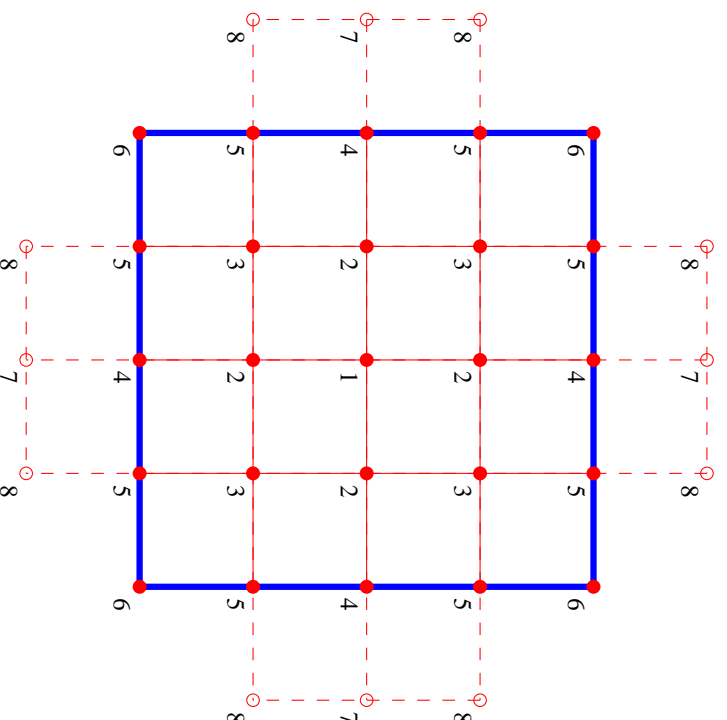
$$W_i = 0, \quad (M_y)_{y=y_i} = 0 \Rightarrow W_{i,k-1} = -W_{i,k+1}. \quad (6.76)$$

- **Vaba serv.** Siin on olukord tunduvalt keerulisem, sest $W \neq 0$ ja W väärtusi raja- ja välispunktides ei õnnestu avaldada avapunktide kaudu. Selle asemel lisatakse avapunktides lahti kirjutatud plaadi elastse pinnu võrranditele lisavõrrandid, mis väljendavad vaba serva tingimusi paindemomendi, põikjõu ja/või toereaktsiooni jaoks.

Näide. Ruutplaadile servapikkusega a mõjub ühtlaselt jaotunud koormus inensiivsusega p_0 .

Leida plaadi keskpinna siirded avapunktides ja paindemomentide väärtused plaadi keskel ning servade keskpunktis kahel juhul: 1) kui kõik plaadi servad on järgalt kinnitatud; 2) kui kõik plaadi servad on vabalt toetatud.

Katame plaadi pinnu võrguga, mille samm $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = a/4$ (joonis 6.21). Sümmetria tõttu peame vaatlema vaid kolme sisepunkti ja kirjutama nende jaoks lahti biharmoonselise võrrandi, kasutades eeltoodud graafilist operaatorit B .



Joonis 6.21:

Kui rajatingimusi ei arvesta, on tulemuseks kolmest võrrandist koosnev kaheksa tundmatuga võrrandsüsteem

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 + 4W_4 + 0W_5 + 0W_6 + 0W_7 + 0W_8 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 25W_2 - 16W_3 - 8W_4 + 6W_5 + 0W_6 + 1W_7 + 0W_8 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 22W_3 + 4W_4 - 16W_5 + 2W_6 + 0W_7 + 2W_8 = p_o\Delta^4. \end{cases} \quad (6.77)$$

Mõlema rajatingimuse korral on siirded servapunktides nullid, st. $W_4 = W_5 = W_6 = 0$ ja tundmatute arv väheneb kolme võrra.

Jäiga kinnituse korral saame lisaks tingimused $W_7 = W_2$ ja $W_8 = W_3$ ning võrrandsüsteem (6.77) saab kuju

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 26W_2 - 16W_3 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 24W_3 = p_o\Delta^4. \end{cases} \quad (6.78)$$

Selle lahend on

$$W_1 = 0, 4607p_o\Delta^4, \quad W_2 = 0, 3090p_o\Delta^4, \quad W_3 = 0, 2093p_o\Delta^4. \quad (6.79)$$

6.7.9. Võrgumethod ehk lõplike vahede method

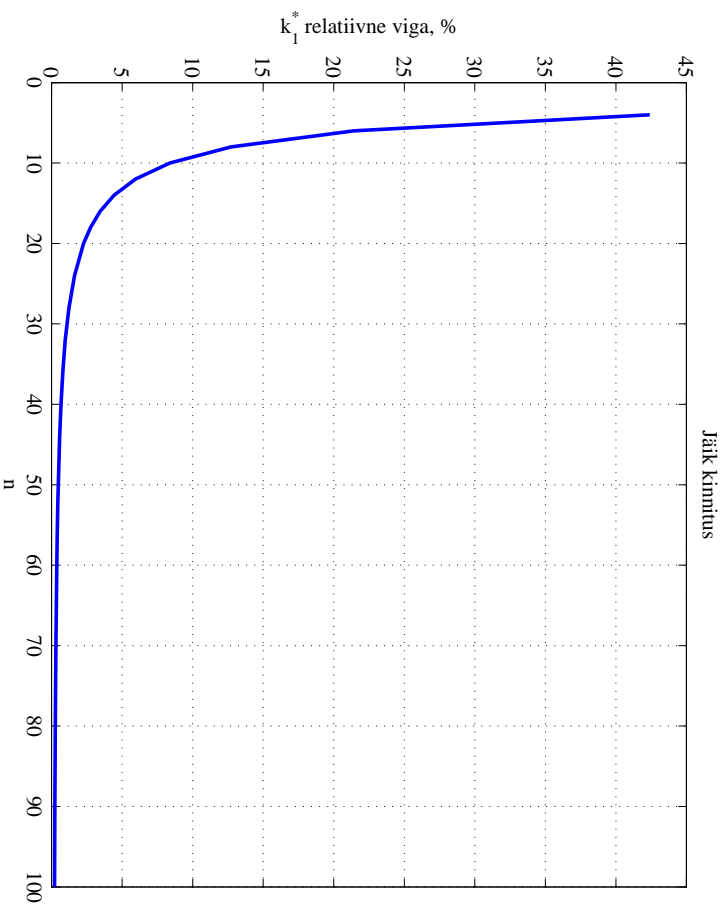
314

Paindemomendid ($\nu = 0.3$)

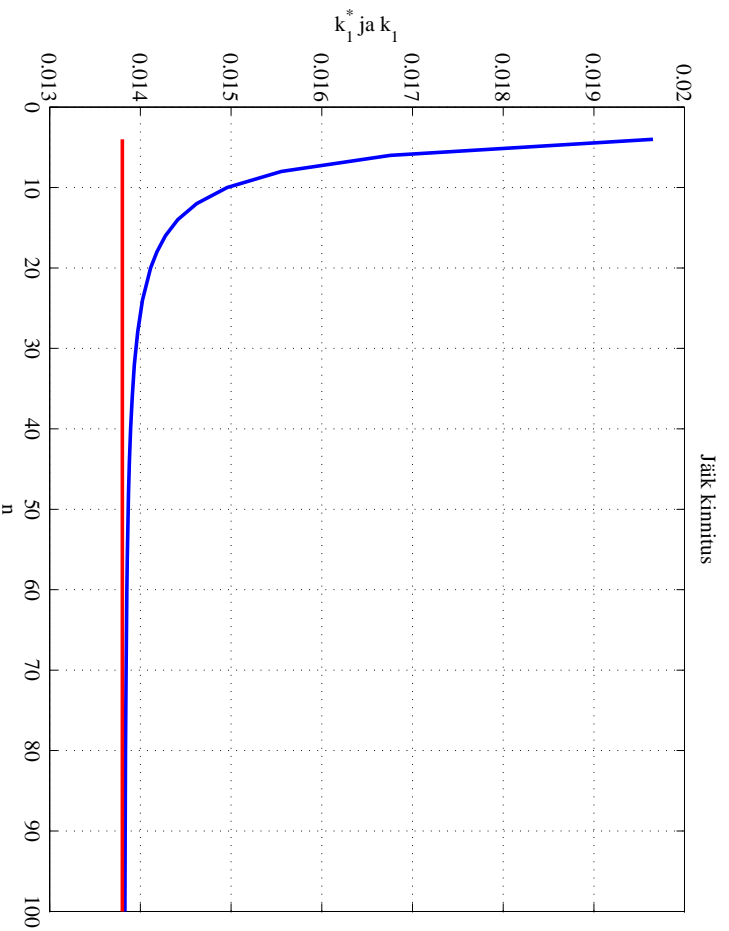
‡

$$\begin{cases} M_1 = (2, 6W_1 - 2W_2 - 0, 6W_2)/\Delta^2 = 0, 3944p_o\Delta^2 = 0, 0246p_oa^2 \\ M_4 = -2W_2/\Delta^2 = -0, 6180p_o\Delta^2 = -0, 0386p_oa^2 \end{cases} \quad (6.80)$$

Et võrrelda saadud siirde W_1 väärtust tabelites antud konstandiga k_1 tuleb W_1 jagada suurusega $n^4/[12(1 - \nu^2)]$. Tulemuseks on $k_1^* = 0.0197$, mis erineb tabelist saadud väärtusest $k_1 = 0, 0138$. Et saavutada suuremat kooskõla, tuleb suurendada võrgupunktide arvu. Näiteks $n = 12$ korral saame $k_1^* = 0.0146$ ja $n = 24$ korral saame $k_1^* = 0.0140$ (vt. joonist 6.22 kus on esitatud vastav relatiivne viga sõltuvana võrgupunktide arvuist ja joonist 6.23 kus on esitatud k_1^* sõltuvana võrgupunktide arvust). Paindemomentide korral pole sellist ümberarvutamist vaja teha. Võrgupunktide arvule $n = 4$ vastavad $k_2^* = 0, 0246$ ja $k_4^* = 0, 0386$, tabelis $k_2 = 0, 0231$ ja $k_4 = 0, 0513$. Väärtusele $n = 12$ vastavad $k_2^* = 0, 0232$ ja $k_4^* = 0, 0495$ ning $n = 24$ vastavad $k_2^* = 0, 0230$ ja $k_4^* = 0, 0509$.



Joonis 6.22:



Joonis 6.23:

Vaba toetuse korral saame lisaks rajatingimused $W_7 = -W_2$ ja $W_8 = -W_3$ ning võrrandisüsteem (6.77) saab kuju

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 24W_2 - 16W_3 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 20W_3 = p_o\Delta^4. \end{cases} \quad (6.81)$$

Selle lahend on

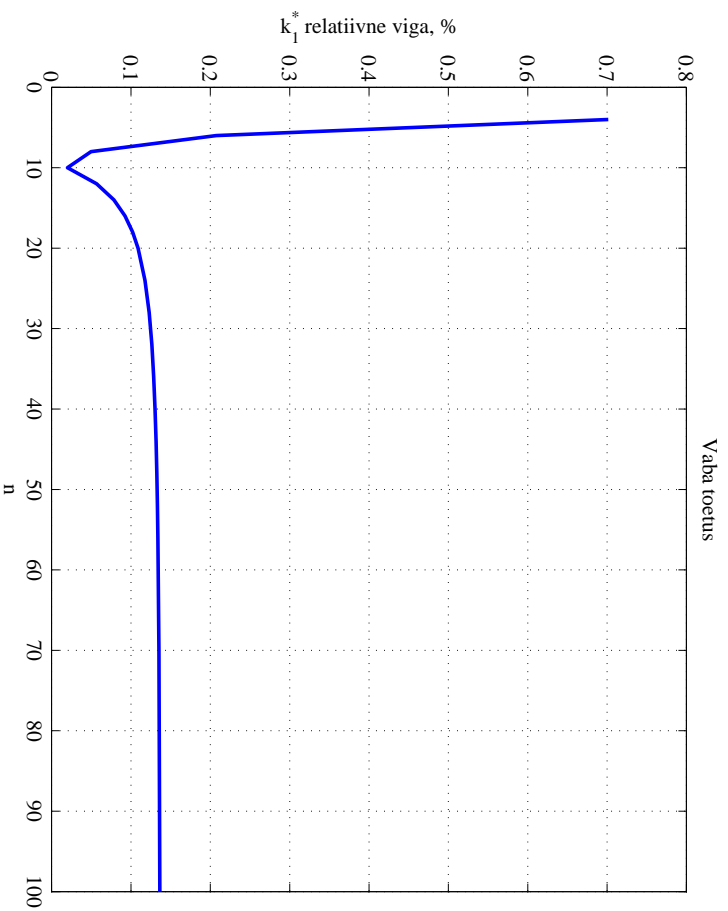
$$W_1 = 1, 0313p_o\Delta^4, \quad W_2 = 0, 7500p_o\Delta^4, \quad W_3 = 0, 5469p_o\Delta^4. \quad (6.82)$$

Paindemendid ($\nu = 0.3$)

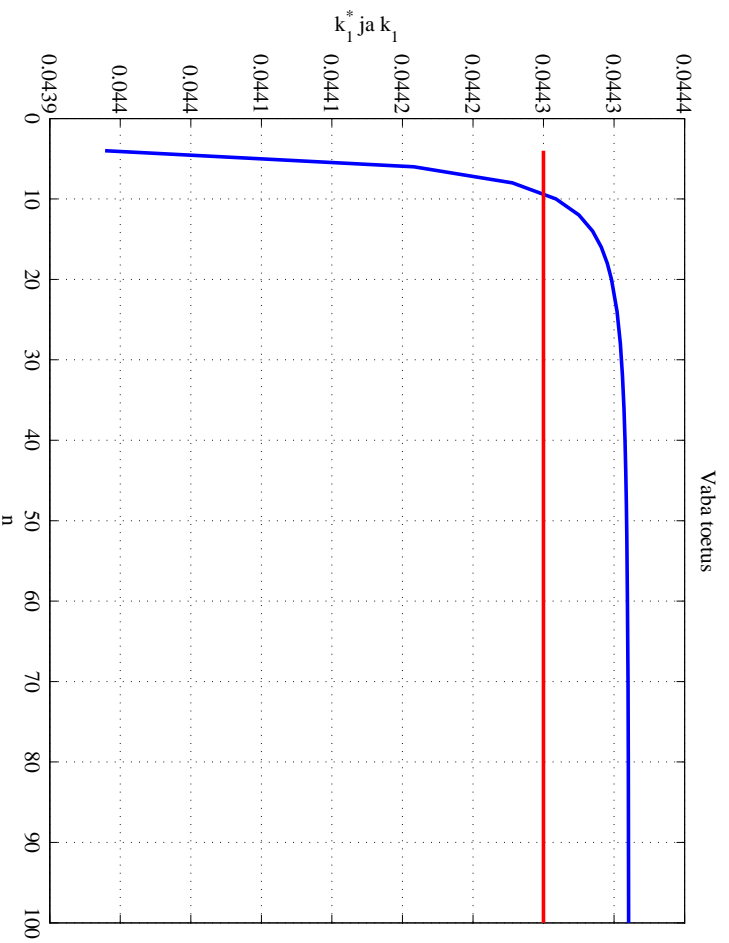
$$\begin{cases} M_1 = (2, 6W_1 - 2W_2 - 0, 6W_2)/\Delta^2 = 0, 7312p_o\Delta^2 = 0, 0457p_oa^2, \\ M_4 = (W_2 - W_2)/\Delta^2 = 0. \end{cases} \quad (6.83)$$

Et võrrelda saadud siirde W_1 väärtust tabelites antud konstandiga k_1 tuleb W_1 jällegi jagada suurusega $n^4/[12(1 - \nu^2)]$. Tulenuseks on $k_1^* = 0.0440$, mis erineb tabelist saadud väärtusest $k_1 = 0, 0443$ tunduvalt vähem kui jäiga kin- nituse lahend (vt. joonist 6.24 kus on esitatud vastav relatiivne viga sõltuvana

võrgupunktide arvust ja joonist 6.25 kus on esitatud k_1^* sõltuvana võrgu- punktide arvust). Ka paindemomentide väärtused on antud juhul paremas kooskõlas tabelis antutega. Tabelis $k_2 = 0, 0479$, ja $n = 4, 12, 24$ vastavad $k_2^* = 0, 0457; 0, 0476; 0, 0478$.



Joonis 6.24:



Joonis 6.25: