

# Peatükk 2

## Pinge

---

### 2.1. Jõud ja pinged

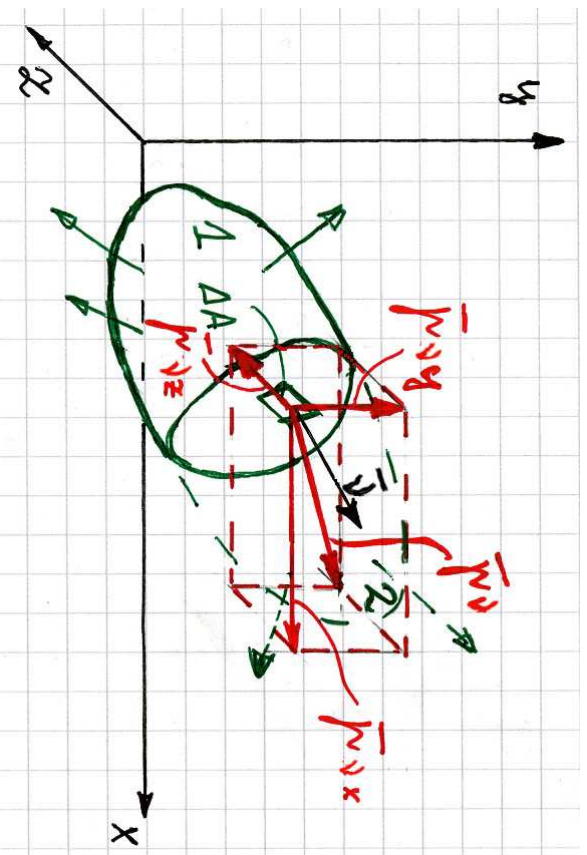
## 2.1 Jõud ja pinged

Kehale mõjuvad välisjõud saab jagada kahte rühma.

1. *Pindjõud ehk kontaktjõud* on põhjustatud keha kontaktist teiste kehade või keskkondadega. Näiteks survejõud, mis mõjuvad vette asetatud kehale või vundamendi surve pinnasele jne.
    - Pindjõu dimensioon:  $\text{IN}/\text{m}^2$
    - Kui pind, millel jõud mõjub on väike võrreldes keha mõõtemetega (keha välispinnaga), siis võib sellist jõudu lugeda koondatud jõuks, st. summaarne jõud loetakse rakendatuks ühte punkti.
  2. *Mahujõud ehk ruumjõud* mõjuvad igale keha punktile. Näiteks gravitatsiooni jõud (keha kaal) või elektromagnetilised jõud või inertsjõud.
    - Mahujõu dimensioon:  $\text{IN}/\text{m}^3$
    - Mõnedes õpikutes käsitletakse mahujõu asemel massjõudu. Vastav dimensioon  $\text{IN}/\text{kg}$
-

Vaatleme meelevaldse kujuga keha, millele mõjuv pind- ja mahujõududest koosnev (välis)jõudude süsteem on tasakaalus.

Rakendame lõikeneetodit: jagame keha mõtteliselt osadeks 1 ja 2; hülgame osa 2 ja vaatleme osa 1 (joon. 2.1).



Joonis 2.1: Pingvektori  $\mathbf{p}_\nu$  koordinaattelgede  $xyz$  suunalised komponendid.

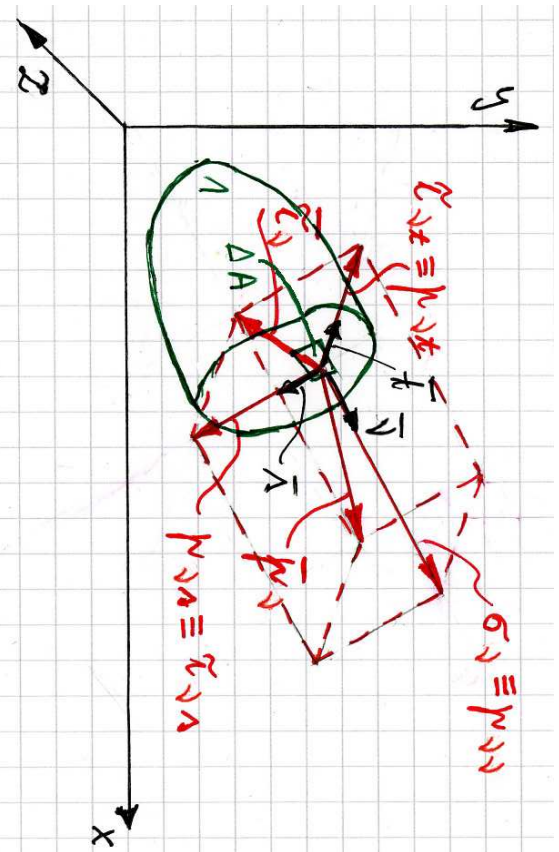
### 2.1. Jõud ja pinged

### 57

- Selleks, et osa 1 oleks ka peale osa 2 eraldamist tasakaalus tuleb lõikepinnale rakendada osa 2 asendavad jõud, st. sisejõud, mis on jaotunud üle kogu lõikepinna.
- Lõikepind osal 1 on määratud välisnormaaliga  $\boldsymbol{\nu}$ . Mõjugu väikesel pinnal  $\Delta A$  sisejõud  $\Delta \mathbf{S}$ . Suhet  $\Delta \mathbf{S} / \Delta A$  võib nimetada keskmiseks pingeks pinnal  $\Delta A$ .
- Kui minna piirile  $\Delta A \rightarrow 0$ , saame (tegeliku) *pinge pinnal normaali*  $\boldsymbol{\nu}$

$$\mathbf{p}_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta A}. \quad (2.1)$$

- Üldjuhul vektorite  $\boldsymbol{\nu}$  ja  $\mathbf{p}$  suunad ei ühti.
- Edaspidi on tihti otstarbekas kasutada pingvektori asemel tema projekttsioone koordinaattelgedel  $p_{\nu x}$ ,  $p_{\nu y}$ ,  $p_{\nu z}$ , mis omakorda määravad ära pingvektori  $\mathbf{p}_\nu$  koordinaattelgede  $xyz$  sihilised komponendid (vt. joon. 2.1). Siin ja edaspidi märgib esimene indeks pinnanormaali sihti ja teine pingekomponendi mõjumise sihti.

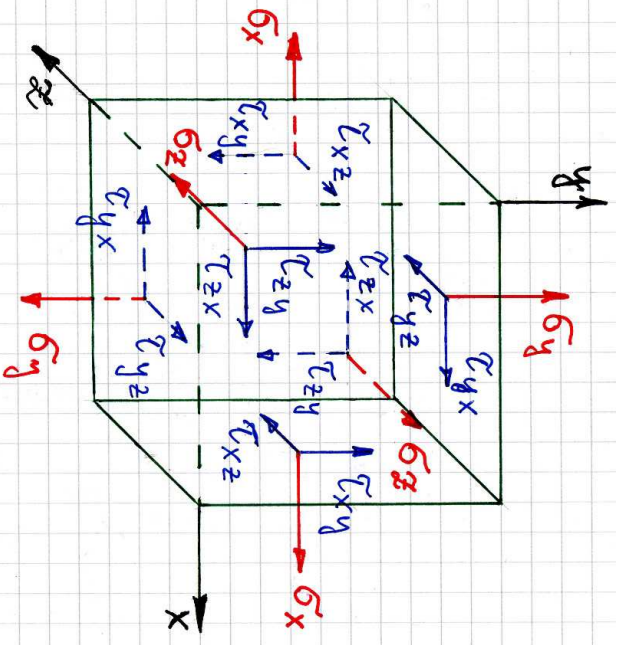


Joonis 2.2: Pingvektori  $\mathbf{p}_\nu$  lahutamine normaal- ja nihkepingeks.

- Teisest küljest saab pinnal normaaliga  $\nu$  mõjuva pingvektori lahutada *normaal- ja nihkepingeks*:  $\mathbf{p}_\nu = \boldsymbol{\sigma}_\nu + \boldsymbol{\tau}_\nu$ . Nihkepinge  $\boldsymbol{\tau}_\nu$  lahutatakse tavaliselt veelkord kaheks komponendiks:  $\boldsymbol{\tau}_\nu = \boldsymbol{\tau}_{\nu s} + \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$  (vt. joon. 2.2, kus  $\mathbf{p}_{\nu n} \equiv \boldsymbol{\sigma}_\nu$ ,  $\mathbf{p}_{\nu s} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu s}$  ja  $\mathbf{p}_{\nu t} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$ ).

### 2.1. Jõud ja pinged

Kui lõike pind on paralleelne koordinaattasanditega, siis kasutatakse indeksi  $\nu$  asemel lõikepinnale normaaliks oleva koordinaattelje nime, näiteks  $x$ .

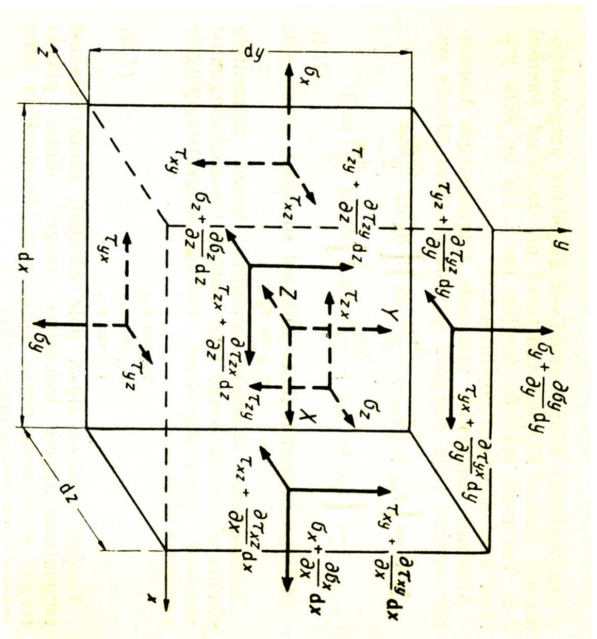


Märgireeglid: joonis 2.3.

- *Positiivne sisepind* on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

Joonis 2.3: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.

## 2.2 Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid



Joonis 2.4: Elementaaristtahukas

Välisjõudude toimel tahkes kehas tekki-  
vad pinged pole üldjuhul konstantsed,  
vaid võivad omada igas keha punktis  
erinevaid väärtusi:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z), & \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z), \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z), & \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z), \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Vaatleme välisjõudude mõju all tasa-  
kaalus olevast kehast välja lõigatud  
elementaaristtahukat (joon. 2.4). Igal  
risttahuka tahul mõjub 3 pingekompo-  
nenti  $\Rightarrow$  kokku 18 pingekomponenti.

### 2.2. Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

Olgu punktis koordinaatidega  $x, y, z$  normaalpinge väärtus  $\sigma_x(x, y, z)$ . Kasu-  
tades Taylori rittaarendust<sup>1</sup> (säilitades seejuures vaid esimest järku väikesed  
suurused) võime kirjutada

$$\begin{aligned} \sigma_x(x + dx, y + dy, z + dz) &= \sigma_x(x, y, z) + \\ & \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (2.3)$$

- Viimase avaldise (2.3) põhjal  $\sigma_x(x + dx, y, z) = \sigma_x(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dx$ .
- Teiste pingekomponentide jaoks saab tuletada analoogilised valemid.
- Kehale mõjuvate mahujõudude projektioonid tähistame  $X, Y, Z$  (NB!  
mahujõu dimensioon on 1 N/m<sup>3</sup>).

†

<sup>1</sup>Ühe muutuja funktsiooni korral  $f(x + dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) dx^k$

Keha on tasakaalus, järelikult peab ka elementaarriisttahukas olema tasakaalus. Seega peavad risttahukale mõjuvate jõudude peavektor ja peamoment olema võrdsed nulliga.

Tasakaaluvõrrandite koostamiseks leiame esiteks risttahukale mõjuvad jõud, projekteerime nad  $x$ -teljele ja võrutame saadu nulliga: †

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ & \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Avarne sulud ja jagame saadud võrrandi elementaarruumalaga  $dV = dx dy dz$ :

$$\frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\tau_{zx}}{dz} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\tau_{zx}}{dz} + X = 0.$$

Peale koondamist saame ihe otsitavatest võrranditest

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (2.5)$$

### 2.2. Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks tasakaaluvõrrandit kasutades jõudude projektsioone  $y$ - ja  $z$ -teljel:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Saadud võrrandid ongi *elastse keha tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid*. Kui mahujõudude projektsioonid sisaldavad inertsijõudusid, saab viimste abil lahendada ka dinaamika ülesandeid.

Järgnevalt leiame momendid risttahuka keskpunkti läbiva  $x$ -telje suhtes ja võrutame tulemuse nulliga:

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \\ & \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

✓



Avame sulud:

$$\tau_{yz} dx dy dz - \tau_{zy} dx dy dz + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dz \frac{dy^2}{2} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy \frac{dz^2}{2}}_{\text{kõrgemat järku väikesed liikmed} \approx 0} = 0. \quad (2.8)$$

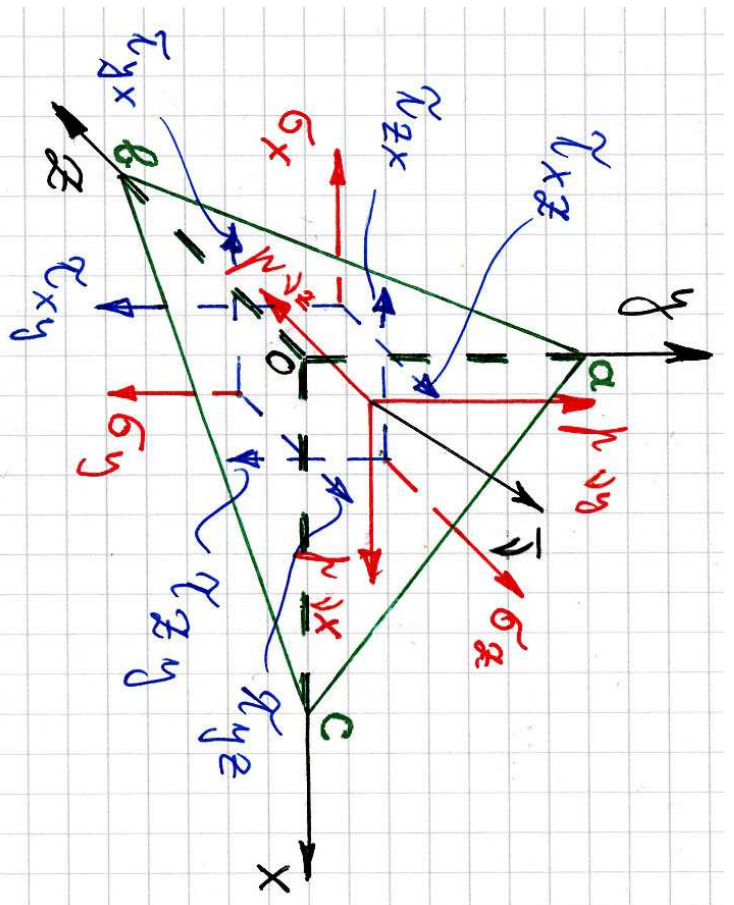
Pärast kõrgemat järku väikeste liikmete hülgamist saame  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , mis on tuntud *nihkepingete paarsuse seadusena*. Leides analoogiliselt momendid  $y$ - ja  $z$ -telje suhtes saame kokkuvõttes

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.9)$$

Tänu nihkepingete paarsusele väheneb tundmatute pingekomponentide arv tühiksalt kuuele. Nende määramiseks on meil aga ainult kolm tasakaaluõrrandit. Seega on tegu staatiliselt määramata tulesandega ja me vajame lisavõrrandeid, mis võtaks arvesse materjali füüsikalisi omadusi.

### 2.3. Pinged kaldpinnal, rajatingimused keha pinnal

### 2.3 Pinged kaldpinnal, rajatingimused keha pinnal



Joonis 2.5: Pinged kaldpinnal

Selleks, et uurida pingeseisundit suvalises keha punktis on vaja osata leida pingeid meelevaldse orientatsiooniga kaldpinnal. Joonisel 2.5 kujutatud kaldpinna  $abc$  orientatsioon koordinaattelgede suhtes on määratud pinnanormaali  $\nu$  suunakoosinustega

$$l = \cos(\nu, x), \quad m = \cos(\nu, y), \quad n = \cos(\nu, z). \quad (2.10)$$

Koos koordinaatpindadega moodustub tetraeeder  $Oabc$ . Tähistame kalddpinnana  $abc$  pindala  $dA$ . Tetraeedri teiste külgede pindalad avalduvad nüüd läbi vektori  $\nu$  suunakoosinuste:

$$A_{Oab} = dA \cdot l, \quad A_{Obc} = dA \cdot m, \quad A_{Oac} = dA \cdot n. \quad (2.11)$$

Koostame tetraeedri jaoks tasakaalu võrrandid. Peale joonisel 2.5 näidatud pingete mõjuvad tetraeedrile veel mahujõud  $X, Y, Z$ , mida pole joonisel näidatud. Projekteerime tetraeedrile mõjuvad jõud  $x$ -teljele:

$$\begin{aligned} p_{\nu x} dA - \sigma_x A_{Oab} - \tau_{yx} A_{Obc} - \tau_{zx} A_{Oac} + X dV &= \\ p_{\nu x} dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{yx} dA \cdot m - \tau_{zx} dA \cdot n + X dV &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

### 2.3. Pinged kaldpinnal, rajatätinginnused keha pinnal

Jagame viimase avaldise pindalaga  $dA$ , hülgame viimase liikme kui kõrgemat järku väikese<sup>2</sup> ja saame avaldise

$$p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n. \quad (2.13)$$

Korrates sama protseduuri teiste telgedega saame avaldised pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  ülejäänud kahe projektsiooni leidmiseks. Kokku saame

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (2.14)$$

Valemid (2.14) võimaldavad leida mis tahes kalddpinnal mõjuva pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  komponente kui on teada pinnanormaal  $\nu$  ja pingekomponendid koordinaatpindadel  $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$

Kui pind  $abc$  ühtib keha välispinnaga, siis esitavad võrrandid (2.14) *rajatätingimusi (ääretätingimusi) keha pinnal*.

<sup>2</sup> $\lim_{dA \rightarrow 0} (dV/dA) = 0$

## 2.4 Peapinged, pinge invariantid

Kuna vaadeldav tetraeder on lõpmata väike, siis tegelikult võimaldavad valemid (2.14) määrata pingeid keha mis tahes punkti läbival mis tahes kaldpinnal kui on teada pinnanormaal  $\nu$  ja pinged (pingekomponendid  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ ) seda punkti läbivatel koordinaattasanditel.

Pinnal normaaliga  $\nu$  mõjuva pinge saab omakorda jagada normaalpingeks  $\sigma_\nu$  ja nihkepingeks  $\tau_\nu$ . Kui on teada pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  komponendid ja normali  $\nu$  suunakoosinused, siis saame leida

$$\sigma_\nu = p_{\nu x}l + p_{\nu y}m + p_{\nu z}n. \quad (2.15)$$

Kasutades valemeid (2.14) saab  $\sigma_\nu$  omakorda avaldada koordinaattasandeil mõjuvate pingete kaudu. Nihkepinge  $\tau_\nu$  kujutab endast pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  projektsiooni vaadeldaval pinnal ja tema moodul

$$\tau_\nu^2 = p_\nu^2 - \sigma_\nu^2. \quad (2.16)$$

### 2.4. Peapinged, pinge invariantid

On selge, et nii  $\mathbf{p}_\nu$ , kui  $\sigma_\nu$  ja  $\tau_\nu$  sõltuvad pinna orientatsioonist. Saab näidata, et igas punktis leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat pinda, millel nihkepinge  $\tau_\nu = 0$  ja normaalpinge  $\sigma_\nu = \mathbf{p}_\nu$ . Selliseid pindasid nimetatakse *peapindadeks*, neil pindadel mõjuvaid normaalpingeid *peapingeteks* ja neid pindu määravaid pinnanormaale *peasuundadeks*.

**Peapingete ja peasuundade leidmise protseduur.**

- Tähistame otsitava peapinge  $\sigma$  ja talle vastava pinnanormaali suunakoosinused  $l, m, n$ .
- Nende nelja tundmatu määramiseks on võrrandsüsteem

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

koos lisatingimusega

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (2.18)$$

\*



- Meid huvitab selle VS-i mitte triviaalne lahend ( $l, m, n$  pole korraga nullid). See tingimus on täidetud kui karakteristiklik determinant

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

- Viimasest saadakse omakorda karakteristiklik võrrand

$$\sigma^3 - I_1^\sigma \sigma^2 + I_2^\sigma \sigma - I_3^\sigma = 0, \quad (2.20)$$

kus suuruseid

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \end{cases} \quad (2.21)$$

nimetatakse *pinge invariantideks*<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Täpsemalt öeldes nimetatakse neid pingetensori invariantideks. Tensori mõiste juurde tuleme õige pea.

#### 2.4. Peapinged, pinge invariantid

#### 71

- Uritaval juhul on kuupvõrrandil (2.20) kolm reaalarvulist lahendit, mis järjestatakse kahanevas järjekorras  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .
- Neile vastava kolme peasuuna määramiseks asendatakse saadud kolm peapinget kordamööda võrrandisüsteemi (2.17), (2.18). Tulenusena saame igale peapingele  $\sigma_i$  vastava peasuuna suunakoosinused  $l_i, m_i, n_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .
- Peasuundade praktilise leidmise juurde tuleme tagasi alajaotuses 2.6.

Sõltuvalt kuupvõrrandi lahendite väärtustest, saab eristada kolme juhtu:

1. Kui kõik kolm peapinget on erinevad, siis saadakse võrrandisüsteemi (2.17), (2.18) lahendamisel kolm ristuvat ühikvektorit.
2. Kui kõik kolm peapinget on võrdsed, siis sobib peapinnaks iga vaadeldavat punkti läbiv pind. Praktilistel kaalutustel valitakse tavaliselt ristuvate pindade kolmik, mis omakorda määrab omavahel ristuvate peasuundade kolmiku.

3. Kui kaks peapinget on võrdsed ja kolmas neist erinev, siis saame määrata sellele kolmandale peapingele vastava peasuuna, mis omakorda määrab peapinna. Ülejäänud kaheks peasuunaks sobib mistahes ristuvate suundade paar, mis on omakorda risti kolmanda peasuunaga.

Kasutades peapingeid saame pinge invariantid kujul

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2^\sigma = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \\ I_3^\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \quad (2.22)$$

- Pinge invariantid on sõltumatud koordinaatide  $xyz$  valikust.
- Kuna invariantid on sõltumatud koordinaatide valikust, tuleb neid vaadelda kui põhilisi suurusi, mis iseloomustavad pinget vaadeldavas punktis — kõik pingekomponendid on määratavad läbi invariantide.

## 2.5. Pingetensor

### 2.5 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaattasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ja kuus nihkepinget

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx} \text{ moodustavad } \textit{pingetensori}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada  $3 \times 3$  (tasandilisesannete korral  $2 \times 2$ ) tabelina nagu maatrikseid. Pingetensor iseloomustab täielikult pingust (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingektoreid suvalisel seda punkti läbival pinnal (vt. valemid (2.14)).

Käesolevas kursuses vaatleme kolme liiki füüsikalisi suurusi — skalaare, vektoreid ja (teist järku) tenseoreid.

1. *Skalaar* pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus. Näited: mass, tihedus, temperatuur.

2. *Vektorit* iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund. Vektori iga komponent on samuti seotud ühe suunaga ja tema tähistamisel kasutatakse ühte indeksit. Näited: jõud, pinnanormaal, kiirus, siire.
3. *Teist järku tensori* iga komponenti iseloomustab lisaks moodulile kaks suunda ja tema tähistamisel kasutatakse kahte indeksit. Näiteks pingetensori korral näitab esimene indeks pinnanormaali suunda ja teine indeks pingekomponendi suunda.
- Vektoreid võib nimetada esimest järku tenseoreiks ja skalaare nullindat järku tenseoreiks.

### Maatriksite ja tensorite omavaheline suhe

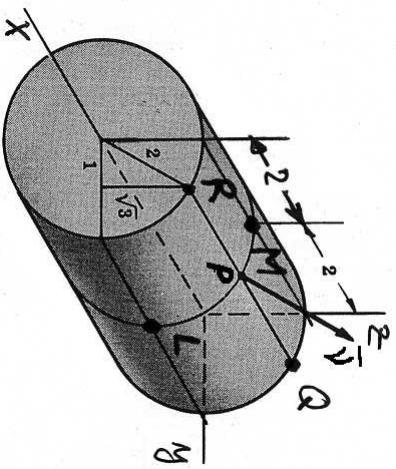
- Kui on fikseeritud kordinaatsüsteem, siis saab iga teist järku tensori esitada  $3 \times 3$  maatriksina ja iga vektori arvukolmikuna.
- Vastupidine aga ei kehti — iga  $3 \times 3$  maatriks ei osutu tensoriks.
- Koordinaatide teisendamisel teisenevad nii tensori kui vektori komponendid kindlate reeglite alusel.

- Pärast kordinaatteisendust peab tensor (vektor) esitama endiselt täpselt sama füüsikalist suurust, mida enne teisendust.
  - \* Kui see nii on, siis ongi tegu tensoriga (vektoriga), vastupidisel juhul mitte.
  - \* Vastupidine olukord on füüsikaliselt vastuvõtmatu. Pole võimalik, et pinge keha punktis või punkti siire või kiirus sõltuks kordinaatsüsteemi valikust.
  - \* Näide. Vektor ning kaks kordinaatsüsteemi  $xy$  ja  $x'y'$ , mille vaheline nurk on  $\theta$ .
- Kui tensor (vektor) on määratud igas vaadeldava keha punktis, siis on meil tegu tensorväljaga (vektorväljaga). Näiteks on pingetensori korral tegu tensorväljaga, sest ta on määratud igas vaadeldava keha punktis.

## 2.6 Ülesanded

Ülesanne 1. Pingus keha punktides on antud pingetensoriga (Descartes'i ristkoordinaatides)

$$S = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}.$$



Leida pinge(vektor), mis mõjub silindri külgpinnal  $y^2 + z^2 = 4$  punktides  $P, Q, R, L$  ja  $M$  ning silindri otspindade punktides  $Q$  ja  $R$ . Lahutage pingektor normaal- ja nihkepingeks.

Lahendamisel tuleb kasutada valemeid (2.14), (2.15) ja (2.16).

### 2.6. Ülesanded

Ülesanne 2. Leida peapinged ja peasuunad pingetensorile

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix}.$$

Ülesannet 2 on võimalik lahendada kahel põhimõtteliselt erineval viisil.

#### A. «Käsitsi.»

1. Tuleb koostada võrrandsüsteem (2.17) ja vastav karakteristlik determinant.
2. Karakteristliku determinandi abil tuleb moodustada karakteristlik võrrand ja leida selle lahendid. Viimased ongi peapinged, mis tuleb järjestada kahanevas järjekorras ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ).

3. Peapinged  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) tuleb asendada üksshaaval võrrandisüsteemi (2.17).
- (a) Iga peapinge  $\sigma_i$  jaoks saate kolm võrrandit, millest peab välja valida suvalised kaks. Neisse tuleb asendada  $n_i = 1$  ja leida vastavad  $l_i$  ja  $m_i$ . Tulenusena saate vektori  $\mathbf{N}_i^* = (l_i^*, m_i^*, n_i^*)$ , mis määrab peapingele  $\sigma_i$  vastava peasuuna.
- (b) Järgmise sammuna tuleb saadud vektor  $\mathbf{N}^*$  normeerida, s.t. leida vastav ühikvektor  $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i^* / |\mathbf{N}_i^*|$ .

4. Peale peasuundade leidmist tuleb kontrollida, kas nad moodustavad parema käe kolmiku, s.t. kas  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ .

- Kui  $\mathbf{N}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  ja  $\mathbf{N}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ , siis

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \left\{ \begin{array}{c|c|c} m_1 & n_1 & l_1 \\ \hline m_2 & n_2 & l_2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{array} - \begin{array}{c} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{c|c|c} m_1 & n_1 & l_1 \\ \hline m_2 & n_2 & l_2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{array} + \begin{array}{c} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{c|c|c} m_1 & n_1 & l_1 \\ \hline m_2 & n_2 & l_2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} m_1 \\ n_1 \\ l_1 \end{array} - \dots$$

## B. «Arvutiga»

1. Sisestada pingetensori maatriks.
2. Leida peaväärtused ja peasuunad. Harilikult on selleks käsk **eig** (*eigenvalues*).
3. Järjestada peaväärtused ja peasuunad ümber nii, et  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Kuna peaväärtustega koos tuleb ümberjärjestada ka peavektorid, siis tuleb tihti muuta arvutist saadud peavektori  $\mathbf{N}_3$  orientatsioon selliseks, et  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ .