

# Peatikk 5

## Elastusteooria tasandülesanne

---

### 5.1. Tasandülesande mõiste

144

#### 5.1 Tasandülesande mõiste

Selleks, et iseloomustada *pingust* või *deformatsiooni elastse keha punktis* kasutatakse peapinge ja peadeformatsiooni mõistet. Pinguse puhul eristatakse järgmist kolme juhtu:

- *ruumpingus* — kõik kolm peapinget on nullist erinevad;
- *tasandpingus* — kaks peapinget on nullist erinevad;
- *joonpingus* — vaid üks peapinge on nullist erinev.

Analoogiliselt, st. läbi peadeformatsioonide, defineeritakse *ruum-, tasand- ja joondeformatsiooni*.

Üldjuhul võib nii pinguse kui deformatsiooni iseloom olla keha erinevates punktides erinev. Kui igas keha punktis on pingus (deformatsioon) sama iseloomuga siis öeldakse, et kehas on *ühtlane pingus (deformatsioon)*.

Elastusteooria ülesannet nimetatakse *tasandülesandeks* (ehk tasapinnaliseks ülesandeks) kui deformatsioon või pinge on kogu keha ulatuses tasapinnaline.

---

## 5.2 Tasanddeformatsioon

Vaadeldaval juhul on kõigis keha punktides deformatsioon tasapinnaline, st. üks peadeformatsioonidest on null. *Tasanddeformatsioon saab tekkida kui siirded*

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0. \quad (5.1)$$

Vastavalt Cauchy seostele (4.2)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Selline deformatsiooniseisund tekib pikas kehas, millele mõjub keha pinnaga ( $z$ -teljega) ristuv koormus.

*Näiteks:* pikk tugisein; (metroo)tunnel; pikk radiaalselt surutud völli; pika plaadi silindriline paine (NBI Saint Venant'i printsiip).

### 5.2. Tasanddeformatsioon

### 146

Pingete leidmiseks kasutame tildistatud Hooke'i seadust nn. pöördkujul (4.4):

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y = \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} = 0, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y), & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Teisest küljest, arvestades Hooke'i seadust kujul (4.3), peab

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0,$$

kust saame

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Kuna siirded  $u$  ja  $v$  sõltuvad vaid koordinaatidest  $x$  ja  $y$ , siis avaldiste (5.2) ja (5.3) põhjal ka pinge  $\sigma_z$  sõltub vaid koordinaatidest  $x$  ja  $y$ .

*Tasakaaluvõrrandid* (4.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

Arvestades üllesande sisu jääb järgi kaks võrrandit

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

kusjuures ka mahujõud  $Z = 0$ .

### 5.2. Tasanddeformatsioon

*Rajatingimustest* (4.5)

$$\begin{cases} p_{vx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{vz} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases}$$

jääb samuti alles 2 esimest võrrandit —

$$\begin{cases} p_{vx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m, \\ p_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m; \end{cases} \quad (5.5)$$

- keha külgpind on paralleelne  $z$ -tejega ning seetõttu normaali suunakoo-sinus  $n = 0$ ;
- $p_{vz} = 0$  kuna muidu poleks meil tasanddeformatsiooni.

Pidevusvõrranditest deformatsioonides (4.6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

jääb alles vaid esimene

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.6)$$

### 5.3. Tasandpingus

150

## 5.3 Tasandpingus

Vaatleme olukorda, kus kõigis keha punktides üks peapingetest on null. Sellisel juhul saame valida Descartes'i ristkoordinaadid nii, et

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (5.7)$$

Selline pingus tekib näiteks õhukeses plaadis, millele mõjub servades rakendatud koormus, mis on risti  $z$ -teljega.

Üldistatud Hooke'i seadusest (4.3) saame

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\nu \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 0. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Tasakaaluvõrrandid on tasandpinguse korral samad kui olid tasanddeformatsiooni korral, st. esitatud kujul (5.4).

## 5.4 Tasandülesande lahendamine pingetes

Väga sageli lahendatakse elastsusteooria ülesanded pingetes, sest sellel meetodil on võrreldes siiretes lahendamisega mõned eelised:

- sageli ongi ülesande lahendina vaja leida vaid pingeid, siirded on teisejärgulise tähtsusega ning neid polegi vaja leida;
- üldjuhul on siirete avaldised võrreldes pingete avaldisega tunduvalt keerukamad.

*Tundmatud:* pingetensori komponendid  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$ .

### 5.4. Tasandülesande lahendamine pingetes

Esmalt peame pidevustingimuse (5.6)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

avaldama pingetes. Selleks kasutame üldistatud Hooke'i seadust kujul (5.8) kust leiame vajalikud osatuletised läbi pingete:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Seega saab pidevustingimus kujul

$$\left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.10)$$

Viimasest avaldisest saab tasakaaluvõrrandite (5.4) abil elimineerida nihkepinge. Selleks diferentseerime (5.4)<sub>1</sub>  $x$  järgi ja (5.4)<sub>2</sub>  $y$  järgi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial X}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial Y}{\partial y}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Eeldades, et mahujõu on konstantsed, saame viimaste liitmise tulemusena

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}. \quad (5.12)$$

Asendades viimase tulemuse pidevustingimusse (5.10) saame peale teisendusi

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0. \quad (5.13)$$

Kasutades Laplace'i operaatorit  $\nabla^2$  saame väljendada *tasandülesande pidevustingimuse pingetes* kujul

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (5.14)$$

#### 5.4. Tasandülesande lahendamise pingetes

154

Tasandülesande lahendamise pingetes lihtsustub oluliselt kui tuua sisse *Airy*' *pingefunktsioon*  $\varphi(x, y)$ , mis on seotud pingekomponentidega järgmisel kujul:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx, \quad (5.15)$$

kus  $X$  ja  $Y$  on konstantsed mahujõud. Alternatiivne võimalus siduda pingekomponendid ja pingefunktsioon:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (5.16)$$

Nii (5.15) kui (5.16) korral on tasakaaluvõrrandid (5.4) automaatselt rahuldatud. Pannes selliselt defineeritud pingekomponendid pidevustingimusse (5.14) saame *biharmoonilise võrrandi*

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0. \quad (5.17)$$

Lahti kirjutatult saab viimane kuju

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (5.18)$$

Funktsiooni, mis rahuldab biharmoonilist võrrandit (5.17) või (5.18) nimetatase *biharmooniliseks funktsiooniks*.

Kuna tasakaaluvõrrandid on antud juhul automaatselt rahuldatud, siis taandub tasandülesande lahendamine pingetes neljandat järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamisele. Siinjuures tuleb loomulikult arvesse võtta pingetes antud ääretingimusi. Peale pingefunktsiooni leidmist määratakse pingetensori komponendid (näiteks avaldistest (5.15)). Seejärel saab üldistatud Hooke'i seaduse abil leida deformatsioonikomponendid ja Cauchy seostest siirdekomponendid.

Tegelikult on pingefunktsiooni leidmine mitmel juhul suhteliselt lihtne. Vastavat meetodit võib nimetada *poolvastupidiseks meetodiks*. Selle põhjal antakse pingefunktsioon ette kas polünoomina või trigonomeetrilise reana, mis sisaldavad määramata konstante. Viimased määratakse ülesande lahendamise käigus ääretingimuste ja biharmoonilise võrrandi abil.

---

#### 5.5. Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides

156

### 5.5 Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides

Kui väljendada Airy funktsioon polünoomina

$$\begin{aligned} \varphi = & \left( \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2 \right) + \left( \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3 \right) + \\ & + \left( \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} xy^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4 \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

saab konstrueerida terve rea tasandülesande lahendusi. Vaadeldav lähenemiseviis on rakendatav kui uuritakse ristkülikulisi plaate või talasid. Mahujõud, k.a. keha kaal, hülgame. Käesolevas alajaotuses vaatleme talasid, mille pikkus on  $l$ , kõrgus  $2c$  ja laius 1. Tala teljeks on  $x$ -telg ja  $y$  telg on suunatud alla. Kuna lineaarses elastsusteoorias kehtib superpositsiooni printsiip, siis vaatleme algul polünoome kuni 5. astmeni eraldi. Järgmises alajaotuses konstrueerime saadud tulemuste abil erinevaid lahendeid.



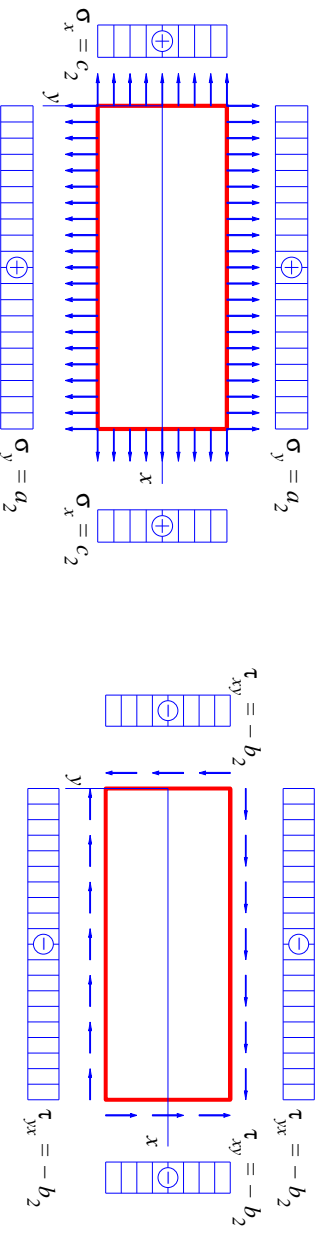
**A) Ruutpolünoom**

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2. \quad (5.20)$$

Sellise valiku puhul on biharmooniline võrrand (5.18) automaatselt rahuldatud. Mahujõude hülgamise puhul saame avaldistest (5.15) pingekomponendid kujul

$$\sigma_x = c_2; \quad \sigma_y = a_2; \quad \tau_{xy} = -b_2. \quad (5.21)$$

Selline pingeseisund tähendab  $a_2 > 0$ ,  $b_2 > 0$  ja  $c_2 > 0$  puhul ühtlast tõmmet kahes ristavas sihis koos ühtlase nihkega. Vastavad rajatingimused on esi-



Joonis 5.1: Ruutpolünoomile vastavad rajatingimused.

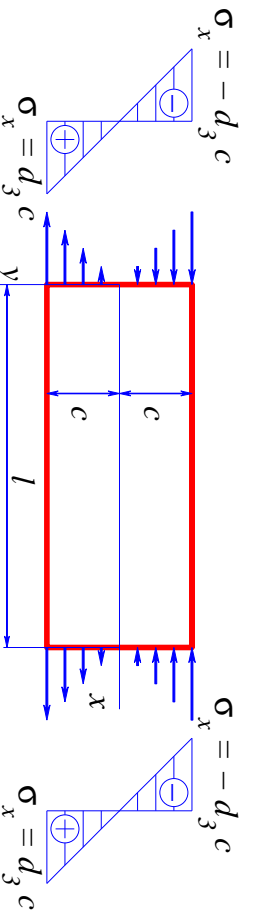
tatud joonisel 5.1. Võttes osa polünoomi koefitsente võrdseks nulliga, saab rajatingimusi varieerida.

**5.5. Biharmoonilise võrrandi lahendamise polünoomides****B) Kuuppolünoom**

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2}y^3. \quad (5.22)$$

Ka antud juhul on biharmooniline võrrand (5.18) automaatselt rahuldatud. Pingete avaldiste (5.15) põhjal aga

$$\sigma_x = c_3x + d_3y; \quad \sigma_y = a_3x + b_3y; \quad \tau_{xy} = -b_3x - c_3y. \quad (5.23)$$

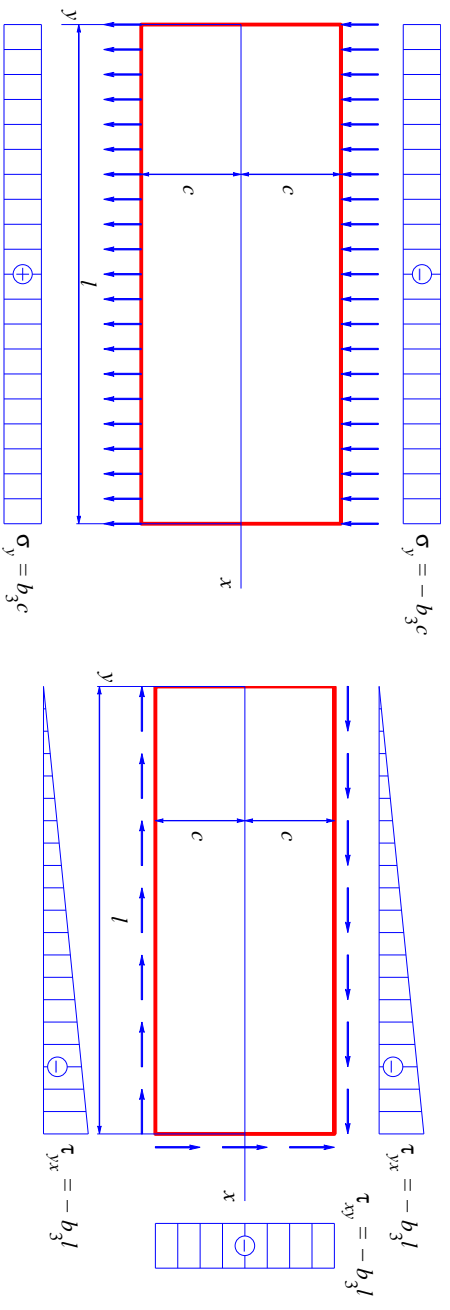


Valides vaid  $d_3 \neq 0$  saame puhtale paindele vastava pingeseisundi. Rajatingimused, mis vastavad juhule  $d_3 > 0$  on esi-

Joonis 5.2: Kuuppolünoomile vastavad rajatingimused:  $d_3 \neq 0$ ,  $a_3 = b_3 = c_3 = 0$ . tatud joonisel 5.2.

Valides vaid  $b_3 \neq 0$  saame pingeseisundi, mille korral pindadel  $y = \pm c$  mõjuvad pinged  $\sigma_y = \pm b_3c$  ja  $\tau_{yx} = -b_3x$  ning pinnal  $x = l$  pinge  $\tau_{xy} = -b_3l$ . Juhul  $b_3 > 0$  jaoks on vastavad rajatingimused esitatud joonisel 5.3.





Joonis 5.3: Kuuppolünoomile vastavad rajatingimused:  $b_3 \neq 0$ ,  $a_3 = c_3 = d_3 = 0$ .

Muud võimalused:

- Vaid  $c_3 \neq 0 \dots$
- Vaid  $a_3 \neq 0 \dots$
- Jne. ....

Teist ja kolmandat järku polünoomide puhul polnud vaja esitada täiendavaid

#### 5.5. Biharmoonilise võrrandi lahendamise polünoomides

kitsendusi polünoomide koefitsientidele, sest biharmooniline võrrand oli auto-maatselt rahuldatud. Kõrgemat järku polünoomide puhul pole asi aga enam nii lihtne.

#### C) Neljandat järku polünoom

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4. \quad (5.24)$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (5.18) rahuldatud vaid juhul kui

$$e_4 = -(2c_4 + a_4) \quad (5.25)$$

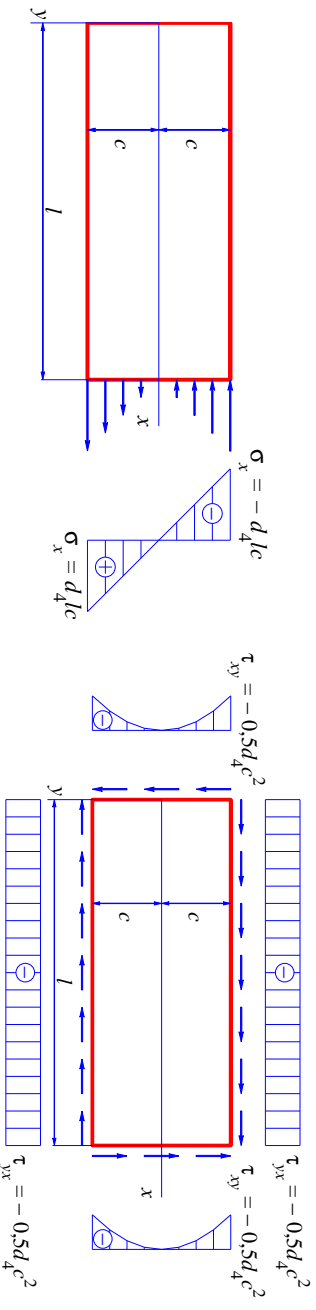
ning pingekomponendid (5.15) saavad kuju

$$\begin{cases} \sigma_x = c_4 x^2 + d_4 x y - (2c_4 + a_4) y^2; \\ \sigma_y = a_4 x^2 + b_4 x y + c_4 y^2; \\ \tau_{xy} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 x y - \frac{d_4}{2} y^2. \end{cases} \quad (5.26)$$

Kuna koefitsientide  $a_4, \dots, d_4$  valik on vaba, siis on (5.26) abil võimalik kirjeldada mitmesuguseid rajatingimusi.

Näiteks kui vaid  $d_4$  on nullist erinev polünoomi koefitsent, siis

$$\sigma_x = d_4xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2}y^2. \quad (5.27)$$



Joonis 5.4: Neljandat järku polünoomile vastavad rajatingimused juhul kui  $d_4 > 0$  ja  $a_4 = b_4 = c_4 = 0$ .

Juhule  $d_4 > 0$  vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} \tau_{yx} = -\frac{d_4}{2}c^2, & \text{kui } y = \pm c; \\ \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2}y^2, & \text{kui } x = 0; \\ \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2}y^2, & \sigma_x = d_4ly, & \text{kui } x = l; \end{cases} \quad (5.28)$$

on kujutatud joonisel 5.4.

### 5.5. Biharmoonilise võrrandi lahendamise polünoomides

Kui vaid  $c_4 > 0$  oleks nullist erinev polünoomi koefitsent, siis saaksime avaldistest (5.26)

$$\sigma_x = c_4x^2 - 2c_4y^2; \quad \sigma_y = c_4y^2; \quad \tau_{xy} = -2c_4xy. \quad (5.29)$$

Jne., jne.

### D) Viendat järku polünoom

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4}x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3}x^4y + \frac{c_5}{3 \cdot 2}x^3y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2}x^2y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3}xy^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4}y^5. \quad (5.30)$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (5.18) rahuldatud kui

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5) \text{ ja } f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5). \quad (5.31)$$

Pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} = \dots \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x^2} = \dots \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} = \dots \end{cases} \quad (5.32)$$

Valides vaid  $d_5 > 0$  nullist erinevaks polünoomikoefitsendiks, saame pinget jaotuse

$$\sigma_x = d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3), \quad \sigma_y = \frac{1}{3}d_5y^3, \quad \tau_{xy} = -d_5xy^2. \quad (5.33)$$

Viimasele vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} y = \pm c, & \sigma_y = \pm \frac{1}{3}d_5c^3, & \tau_{yx} = -d_5xc^2 \\ x = 0, & \sigma_x = -\frac{2d_5y^3}{3}, & \tau_{xy} = 0, \\ x = l, & \sigma_x = d_5(l^2y - \frac{2}{3}y^3), & \tau_{xy} = -d_5ly^2. \end{cases} \quad (5.34)$$

Kuna biharmooniline võrrand (5.18) on lineaarne diferentsiaalvõrrand, siis on tema lahendiks ka suvaline lahendite superpositsioon. Seega, liites eespool leitud elementaarlahendeid, saame leida meid huvitava probleemi lahendi.

### 5.5. Biharmoonilise võrrandi lahendamise polünoomides

Tala pinnal mõjuvate pingete (pindjõudude) peavektori ja peamomendi leidmine

- Vaatleme tala, mille pikkus on  $l$ , kõrgus  $2c$  ja laius 1.
- Eeldame, et tala kontuuril mõjuvad normaal- ja nihkepinged on positiivsed.
- Valime taandamistsentriks koordinaatide alguse.

Peavektori projektsioonid koordinaattelgedel  $x$  ja  $y$ :

$$\begin{aligned} R_x &= R_x(\sigma_x)|_{x=l} + R_x(\sigma_x)|_{x=0} + R_x(\tau_{yx})|_{y=c} - R_x(\tau_{yx})|_{y=-c} = \\ &= \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=l} dy - \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=0} dy + \int_0^l \tau_{yx}|_{y=c} dx - \int_0^l \tau_{yx}|_{y=-c} dx; \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} R_y &= R_y(\sigma_y)|_{y=c} + R_y(\sigma_y)|_{y=-c} + R_y(\tau_{xy})|_{x=0} + R_y(\tau_{xy})|_{x=l} = \\ &= \int_0^l \sigma_y|_{y=c} dx - \int_0^l \sigma_y|_{y=-c} dx - \int_{-c}^c \tau_{xy}|_{x=0} dy + \int_{-c}^c \tau_{xy}|_{x=l} dy. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Peamoment koordinaatide alguse suhtes<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 M_O &= M_O(\sigma_x)|_{x=0} + M_O(\sigma_x)|_{x=l} + M_O(\sigma_y)|_{y=c} + M_O(\sigma_y)|_{y=-c} + \\
 &+ M_O(\tau_{yx})|_{y=c} + M_O(\tau_{yx})|_{y=-c} + M_O(\tau_{xy})|_{x=l} = \\
 &= \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=0} y \, dy - \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=l} y \, dy + \\
 &+ \int_0^l \sigma_y|_{y=c} x \, dx - \int_0^l \sigma_y|_{y=-c} x \, dx - \\
 &- \int_0^l \tau_{yx}|_{y=c} c \, dx - \int_0^l \tau_{yx}|_{y=-c} c \, dx + \int_{-c}^c \tau_{xy}|_{x=l} l \, dy.
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

---

<sup>1</sup>Kuna  $y$  telg on suunatud alla, siis on positiivne moment päripäeva.