

Peatikk 7

Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades

7.1. Üldvõrrandid

318

Mõningaid selliseid ülesandeid olemme juba eespool vaadelnud (näiteks alajaotused 5.11 ja 5.12). Käesoleva peatüki kahes esimeses paragrahvis vaadeldakse telgsümmeetriliste ülesannete lahendamist Love'i pingefunktsiooni ja Legendre'i polünoomide abil vabalt toetatud ümarplaadi paindeülesande näitel. Saadud lahendid on lineaarse elastsusteooria mõttes täpsed lahendid, st. lahendamisel lähtutakse elastsusteooria põhivõrranditest. Sellisele lähenemisviisile «vastandub» nn. 0-järku teooria, mille korral lähtutakse tala elastse joone või plaadi elastse pinnal võrranditest. Sellist lähenemist ümarplaadi paindeülesande lahendamisele vaatleme kolmandas paragrahvis.

7.1 Üldvõrrandid

Käesolevas alajaotuses leiavad käsitlemist ülesanded, krus ei esine vääned. Siinlindriliste koordinaatide (r, ϑ, z) puhul tähendab see seda, et vastavatest siirdekompontidest $v = 0$ ja komponendid u ja w ei sõltu koordinaadist ϑ . See-ega ka pingekomponendid ei sõltu koordinaadist ϑ ja kaks neist $\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = 0$.

Nullist erinevad deformatsioonikomponendid avalduvad kujul

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (7.1)$$

Tasakaalvõrrandid saavad aga kujul

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + R = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

kus R ja Z on koordinaatide r ja z sihiliste mahujõudude intensiivsus (dimensioon N/m^3). Paljudel juhtudel on jällegi otstarbekas tuua sisse pingefunktsioon φ , mida siin nimetatakse Love'i pingefunktsiooniks.

Tasakaalvõrrandid on rahuldatud kui valida

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), & \sigma_\vartheta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], & \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{cases} \quad (7.3)$$

7.1. Üldõrrandid

320

Siinjuures peab φ rahuldama biharmonilist võrrandit

$$\nabla^4 \varphi = 0, \quad (7.4)$$

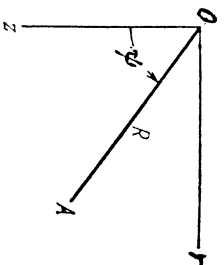
kus

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.5)$$

on Laplace'i operaator silindrilistes koordinaatides. Kuna antud juhul ei sõltu φ koordinaadist ϑ , siis langeb Laplace'i operaatoris (7.5) kolmas liige välja. Siirdekomponeendid u ja w määratakse avaldistega

$$2Gu = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad v = 0, \quad 2Gw = 2(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (7.6)$$

Mõnel juhul on silindriliste koordinaatide asemel mõistlik kasutada sfäärilisi koordinaate, st., r ja z asemel kasutatakse koordinaate R ja ψ . Nüüd on



Joonis 7.1: Sfäärilised koordinaadid.

vaja (7.5)-s asendada osatuletised r ja z järgi. See üleminek on omakorda analoogne DRK x ja y ja polaarkoordinaatide r ja ϑ vahelisele seosele. Saame

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}. \end{cases} \quad (7.7)$$

Seega omab biharmooniline võrrand (7.4) silindriliste koordinaatide puhul

7.1. Üldvõrrandid

322

kujul

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \varphi = 0 \quad (7.8)$$

ja sfääriliste puhul

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (7.9)$$

Võrrandi (7.9) lahend peab samal ajal rahuldama ka Laplace'i võrrandit, st,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (7.10)$$

Viimase erilahendit võib otsida kujul

$$\varphi_n = R^n \Psi_n, \quad (7.11)$$

kus Ψ_n on vaid muutuja φ funktsioon. Kokku saame viimasest kahest harilikku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} \right) + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad (7.12)$$

Kui tähistame $x = \cos \psi$ ja valime x uueks sõltumatuks muutujaks, siis saame (7.12)-st Legendre'i võrrandi

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} - 2x \frac{d\Psi_n}{dx} + n(n+1)\Psi_n = 0. \quad (7.13)$$

Selle võrrandi lahendid on esitatavad Legendre'i polünoomide $P_n(x)$ kaudu:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x, & P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots, \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{cases} \quad (7.14)$$

Neid polinoome võib kasutada funktsioonidena Ψ_n avaldises (7.11) kusjuures igat neist võib veel korrutada konstandiga A_n .

7.1. Üldvõrrandid

324

Kasutades valeneid

$$x = \cos \psi, \quad Rx = z \quad \text{ja} \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (7.15)$$

saab minna tagasi muutujatele r ja z . Seejuures saab võrrandi (7.9) lahend kuju

$$\begin{cases} \varphi_0 = A_0, & \varphi_1 = A_1 z, \\ \varphi_2 = A_2 \left[z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_3 = A_3 \left[z^3 - \frac{3}{5}z(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_4 = A_4 \left[z^4 - \frac{6}{7}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \varphi_5 = A_5 \left[z^5 - \frac{10}{9}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \dots \end{cases} \quad (7.16)$$

Toodud polinoomid on ka biharmoonilise võrrandi (7.4) lahendiks.

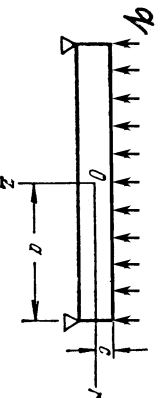
Saab näidata, et kui $R^n\Psi_n$ osutub harmoonilise võrrandi (7.10) lahendiks, siis $R^{n+2}\Psi_n$ rahuldab biharmonilist võrrandit (7.4) (kuid ei rahulda (7.10))

Korrutades (7.16) $R^2 = r^2 + z^2$, saame uued lahendid

$$\begin{cases} \varphi_2 = B_2(r^2 + z^2), \\ \varphi_3 = B_3z(r^2 + z^2), \\ \varphi_4 = B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2), \\ \varphi_5 = B_5(2z^3 - 3r^2z)(r^2 + z^2), \\ \dots \end{cases} \quad (7.17)$$

7.2. Ümarplaadi paine

7.2 Ümarplaadi paine



Joonis 7.2: Sümmetriliselt jaotatud põlkkroomusega kroomatud ja servadest vabalt toetatud ümarplaat.

Vaatleme sümmetriliselt kroomatud ümarplaati (joonis 7.2). Valides avaldistest (7.16) ja (7.17) kolmandat järku polünoomid, saame pingefunktsiooni esitada kujul

$$\varphi = A_3(2z^3 - 3r^2z) + B_3(r^2z + z^3). \quad (7.18)$$

Avaldiste (7.3) põhjal saame seejärel pingekomponendid kujul

$$\begin{cases} \sigma_r = -6A_3 + (10\nu - 2)B_3, \\ \sigma_\theta = -6A_3 + (10\nu - 2)B_3, \\ \sigma_z = -12A_3 + (14 - 10\nu)B_3, \\ \tau_{rz} = 0. \end{cases} \quad (7.19)$$

Seega osutuvad pingekomponendid kogu plaadi ulatuses konstantseteks. Valimites (7.19) olevate konstantide A_3 ja B_3 määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi σ_r ja σ_z jaoks. Kokkuvõttes: kolmandat järku polinoomide abil saab esitada lahendi, mis vastab olukorrale, kus plaadi pinnale on rakendatud telgsümmeetrilised konstantsed koormused.

Valides (7.16) ja (7.17) neljandat järku polinoomid, saame pingekomponentide jaoks avaldised

$$\begin{cases} \sigma_r = 96A_4z + 4B_4(14\nu - 1)z, \\ \sigma_z = -192A_4z + 4B_4(16 - 14\nu)z, \\ \tau_{rz} = 96A_4r - 2B_4(16 - 14\nu)r. \end{cases} \quad (7.20)$$

7.2. Ümarplaadi paine

Kui võtta $96A_4 - 2B_4(16 - 14\nu) = 0$, saame

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{ja} \quad \sigma_r = 28(1 + \nu)B_4z, \quad (7.21)$$

mis esitab plaadi puhast painet juhul kui ta servadesse on rakendatud ühtlaselt jaotatud momendid.

Ühtlaselt jaotatud koormusele allutatud plaadi lahendi saamiseks lähtutakse kuugendat järku polinoomidest. Vastavatele pingetele (mida siin ei esita, kuid mis sisaldavad konstante A_6 ja B_6) lisatakse lahend (7.20) juhul $B_4 = 0$ ja z -telje sihiline ühtlane tõmme $\sigma_z = b$ lahendist (7.19). Seega tuleb rajatingimustest

$$\begin{cases} \sigma_z = 0, & z = c; & \sigma_z = -q, & z = -c; \\ \tau_{rz} = 0, & z = \pm c; \end{cases} \quad (7.22)$$

määrata neli konstanti A_6, B_6, A_4 ja b .

Kokku saarne

$$\begin{cases} \sigma_r = q \left[\frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(3 + \nu) r^2 z}{32 c^3} - \frac{3z}{8c} \right], \\ \sigma_z = q \left[-\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3z}{4c} - \frac{1}{2} \right], \\ \tau_{rz} = -\frac{3qr}{8c^3} (c^2 - z^2). \end{cases} \quad (7.23)$$

Valemite (7.23) puhul on huvitav see, et esitatav pingeaotus on analoogiline pingete σ_y ja τ_{xy} jaotusega kitsa ristkülikulise tala puhul (võrdle valem (5.66) lk. 189). Tala valemite puhul tuleb arvestada, et sisse on toodud inertsimoment $I = 2c^3/3$. Radiaalsed pinged on esitatud paaritu funktsioonina koorinaadist z ja annavad servas tihhtlaselt jaotatud paindemomendi. Et saada lahendit servast vabalt toetatud plaadi jaoks, lisame pingeaeraldistele (7.23) lahendi (7.21) ja määrame konstandi b_4 rajatingimusest

$$\int_{-c}^c \sigma_r z dz = 0, \quad r = a. \quad (7.24)$$

7.2. Ümarplaadi paine

330

Seega saab vaba toetuse puhul radiaalse normaalpinge σ_r avaldis kuju

$$\sigma_r = q \left[\frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(3 + \nu) r^2 z}{32 c^3} - \frac{3(2 + \nu) z}{8 c} + \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32 c^3} \right]. \quad (7.25)$$

Kui võtta $r = 0$, saame pinge σ_r , mis mõjub plaadi tsentris. Elementaarooria puhul esitab pinget plaadi tsentris valem

$$\sigma_r = \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32 c^3}, \quad (7.26)$$

s.o. (7.25) viimane liige. Kui plaadi paksus $2c$ on väike võrreldes raadiusega a , siis osutuvad ka «parandusliikmed» väikesteks.

Puhtha painde lisamisega ja rajatingimuse (7.24) rakendamisega kõrvaldasime me küll paindemomendid vabas servas $r = a$, kuid ei vabanenud pingetest

$$\sigma_r|_{r=a} = q \left[\frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(2 + \nu) z}{5 c} \right]. \quad (7.27)$$

Nende pingete peavektor ja peamoment plaadi servas on nullid, seega tuleb lahendi täpsuse ja «kehitivuse» hindamisel rakendada Saint-Venant'i printsiipi.

Kui kasutada kuugendast kõrgemat järku polinome, saab leida lahendeid juhtude jaoks, kus $q = q(r)$. Teist liiki Legendre'i polinome ($Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, \dots$) kasutades saab leida lahendeid rõngasplaadi jaoks. Kõik need lahendid kehtivad juhul kui läbipainded on väikesed võrreldes paksusega $2c$. Suurte läbipainete puhul tuleb arvestada plaadi kesk-tasandi pikenenisega.

7.3 Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinnal diferentsiaalvõrrand.

Paragrahvis 6.1 toodud plaatide paindeteooria hüpoteesid saavad telgsümmeetrilisel juhul kuju

$$\begin{cases} w(r, z) = w(r), & u(r, z) = -z \frac{dw(r)}{dr}, & \sigma_z = 0, \\ R(r, z) = 0, & Z(r, z) = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(r). \end{cases} \quad (7.28)$$

7.3. Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinnal diferentsiaalvõrrand.

Seejärel saame tasakaaluvõrranditele (7.2) kuju

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \frac{\sigma_\theta}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{r}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sigma_\theta}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(r). \end{cases} \quad (7.29)$$

Vimmasest kahhest võrrandist saab elimineerida pinge τ_{rz} :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\sigma_r)}{\partial r^2} = \frac{zp}{i}, \quad i = \frac{h^3}{12} \quad (7.30)$$

kus i on inertsimomendi intensiivsus. Elastse pinnal diferentsiaalvõrrandi saamiseks tuleb nüüd deformatsioonid avaldada läbi siirete Cauchy seoste abil ning seejärel pinged deformatsioonide kaudu tildistatud Hooke'i seaduse abil. Tulemuseks on neljandat järku diferentsiaalvõrrand

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2d^3 w}{r dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p}{D}, \quad D = \frac{Ei}{1-\nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7.31)$$

Peale võrrandi (7.31) lahendamist saab leida normaalpinged

$$\begin{cases} \sigma_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \frac{z}{i}, \\ \sigma_\vartheta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \frac{z}{i}. \end{cases} \quad (7.32)$$

Nihkepinge τ_{rz} saame leida võrrandit (7.29)₁ integreerimisel z järgi:

$$\tau_{rz} = \int \left[\frac{\sigma_\vartheta}{r} - \frac{1}{r} (r\sigma_r) \right] dz = \dots, \quad (7.33)$$

kust peale rajatatingimuste $\tau_{rz}|_{z=\pm h/2} = 0$ rahuldamist saame

$$\tau_{rz} = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right). \quad (7.34)$$

Analoogiliselt valemitele (6.15) on pingete ja sisejõudude vahelised seosed kujul

$$\sigma_r = \frac{M_r z}{i}, \quad \sigma_\vartheta = \frac{M_\vartheta z}{i}, \quad \tau_{rz} = \frac{3Q_r}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad (7.35)$$

7.3. Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrandi.

334

kust saame

$$\begin{cases} M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_\vartheta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \\ Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \end{cases} \quad (7.36)$$

Diferentsiaalvõrrandi (7.31) saab kirjutada lahendamiseks sobivamale kujule:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{D}. \quad (7.37)$$

Juhul kui $p(r) = p_o = \text{const}$ saame viimasest

$$w(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 + \frac{p_o r^4}{64D}. \quad (7.38)$$

Konstantide C_1, \dots, C_4 määramiseks tuleb kasutada rajatatingimusi $w(r)$, $dw(r)/dr$, $M_r(r)$, $M_\vartheta(r)$ või $Q_r(r)$ jaoks. Vastavad avaldised omavad kuju

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dw(r)}{dr} &= 2C_1 r \ln r + C_1 r + 2C_2 r + \frac{C_3}{r} + \frac{p_o r^3}{16D}, \\ M_r(r) &= -D \left[2C_1(1+\nu) \ln r + C_1(3+\nu) + 2C_2(1+\nu) - \frac{C_3(1-\nu)}{r^2} \right] - \\ &\quad - (3+\nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ M_\theta(r) &= -D \left[2C_1(1+\nu) \ln r + C_1(1+3\nu) + 2C_2(1+\nu) + \frac{C_3(1-\nu)}{r^2} \right] - \\ &\quad - (1+3\nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ Q_r(r) &= -\frac{4DC_1}{r} - \frac{p_o r}{2}. \end{aligned} \right. \quad (7.39)$$

Suurstest (7.38) ja (7.39) on väliserval teada tavaliselt kaks. Rõngasplaadi puhul lisandub siseservas veel kaks tingimust, mis kokku võimaldavad määrata neli konstanti.

Ümar- ehk ringplaatide korral peab konstant $C_3 = 0$ — vastasel korral poleks

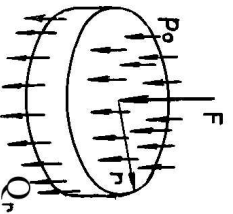
7.3. Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand.

siirded plaadi keskel lõplikud suurused, sest $\ln r \rightarrow -\infty$ kui $r \rightarrow 0$. Samas, $r^2 \ln r \rightarrow 0$, kui $r \rightarrow 0$. Konstandi C_1 määramiseks kasutame tingimust, et mööda suvalist kontsentrilist ringjoont mõjuv põikjõud peab tasakaalustama selle ringjoone sees mõjuva koormuse.

- *Ühtlane koormus* p_o . Eldades nii p kui Q_r jaoks positiivsed suunad (vt. joonis), saame

$$2\pi r Q_r + \pi r^2 p_o = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{p_o r}{2}. \quad (7.40)$$

Seega (7.39)₄ põhjal peab $C_1 = 0$.



- *Tsentris mõjuv koondatud jõud* F . Nüüd

$$2\pi r Q_r + F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{F}{2\pi r}. \quad (7.41)$$

Võttes avaldises (7.39)₄ koormuse $p_o = 0$ saame

$$Q_r = -\frac{4DC_1}{r} = -\frac{F}{2\pi r} \Rightarrow C_1 = \frac{F}{8D\pi}. \quad (7.42)$$

7.4 Näiteid ümar- ja rõngasplaatide paindeülesannetest.

7.4.1 Rajatingimused

- jäik kinnitus

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0; \quad (7.43)$$
- vaba toetus

$$w = 0, \quad M_r = 0; \quad (7.44)$$
- vaba serv

$$M_r = 0, \quad Q_r = 0. \quad (7.45)$$

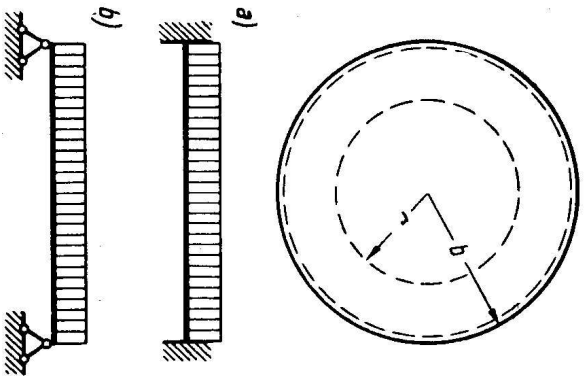
7.4.2. Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat

338

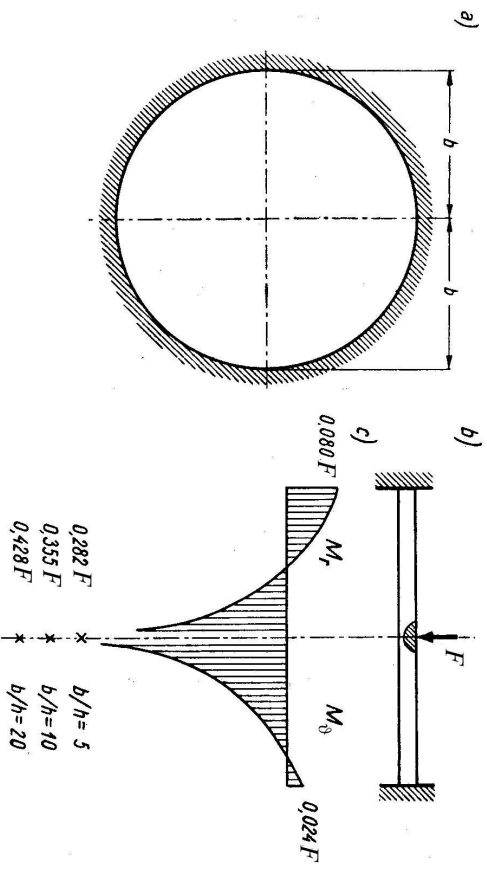
7.4.2 Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat (vt. joonis 7.3).

Konstandid $C_1 = C_3 = 0$ ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\begin{cases} w(r) = C_2 r^2 + C_4 + \frac{p_o r^4}{64D}. \\ \frac{dw(r)}{dr} = 2C_2 r + \frac{p_o r^3}{16D}, \\ M_r(r) = -2DC_2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{p_o r^2}{16}, \\ M_\theta(r) = -2DC_2(1+\nu) - (1+3\nu)\frac{p_o r^2}{16}, \\ Q_r(r) = -\frac{p_o r}{2}. \end{cases} \quad (7.46)$$



Joonis 7.3: Ühtlaselt koormatud ümarplaadi paine.



Joonis 7.4: Koondatud jõuga koormatud ümarplaadi paine.

7.4.2. Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat

340

a) Jäik kinnitus (vt. joonis 7.3 a))

Rajatingimused plaadi väliservas $r = b$ on antud kujul $w = 0$ ja $dw/dr = 0$. Kasutades viimaseid, saame määrata konstandid C_2 ja C_4 :

$$C_2 = -\frac{p_0 b^2}{32D}; \quad C_4 = \frac{p_0 b^4}{64D}. \quad (7.47)$$

Seega saavad siirete ja paindemomentide avaldised (7.46) lõpuks kujul

$$\begin{cases} w(r) = \frac{p_0}{64D} (b^2 - r^2)^2, \\ M_r(r) = \frac{p_0}{16} [b^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)], \\ M_\theta(r) = \frac{p_0}{16} [b^2(1 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \end{cases} \quad (7.48)$$

Vastavad ekstreemalsed väärtused

$$\begin{cases} r = 0: & w = \frac{p_0}{64D} b^4, \quad M_r = M_\theta = \frac{p_0 b^2}{16} (1 + \nu), \\ r = b: & M_r(r) = -\frac{p_0}{8} b^2, \quad M_\theta = -\frac{p_0 \nu}{8} b^2. \end{cases} \quad (7.49)$$

b) Vaba toetus (vt. joonis 7.3 b))

Kasutades rajatingimusi plaadi väliservas $r = b$ kujul $w = 0$ ja $M_r = 0$ saame määrata konstandid

$$C_2 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{p_0 b^2}{32D}, \quad C_4 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{p_0 b^4}{32D} - \frac{p_0 b^4}{64D}. \quad (7.50)$$

Pannes need väärtused avaldistesse (7.46) saame

$$\begin{cases} w(r) = \frac{p_0(b^2 - r^2)}{64D} \left(b^2 \frac{5+\nu}{1+\nu} - r^2 \right), \\ M_r(r) = \frac{p_0(3+\nu)}{16} (b^2 - r^2), \\ M_\theta(r) = \frac{p_0}{16} [b^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)]. \end{cases} \quad (7.51)$$

Ekstremaalsed väärtused on plaadi keskel, st.,

$$r = 0 : \quad w = \frac{5+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{p_0 b^4}{64D}, \quad M_r = M_\theta = \frac{p_0(3+\nu)}{16} b^2. \quad (7.52)$$

7.4.3. Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat**342****7.4.3 Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat (vt. joonis 7.4).**

Konstandid $C_1 = F/(8D\pi)$ ning $C_3 = 0$ ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\begin{cases} w(r) = \frac{F}{8D\pi} r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_4, \\ \frac{dw(r)}{dr} = \frac{F}{8D\pi} r (2 \ln r + 1) + 2C_2 r, \\ M_r(r) = -D \left\{ \frac{F}{8D\pi} [2(1+\nu) \ln r + (3+\nu)] + C_2(1+\nu) \right\}, \\ M_\theta(r) = -D \left\{ \frac{F}{8D\pi} [2(1+\nu) \ln r + (1+3\nu)] + C_2(1+\nu) \right\}, \\ Q_r(r) = -\frac{F}{2\pi r}. \end{cases} \quad (7.53)$$

a) Jäik kinnitus (vt. joonis 7.4)

Konstandid C_2 ja C_4 määratakse rajatingimustest $w = 0$ ja $dw/dr = 0$ plaadi välisservas $r = b$. Tulenus on

$$C_2 = -\frac{F(2 \ln b + 1)}{16D\pi}, \quad C_4 = \frac{Fb^2}{16D\pi}. \quad (7.54)$$

Siirded ja paindemomendid (7.53) saavad seejärel kuju

$$\begin{cases} w(r) = \frac{F}{16D\pi} \left(2r^2 \ln \frac{r}{b} - r^2 + b^2 \right), \\ M_r(r) = -\frac{F}{4\pi} \left[1 + (1 + \nu) \ln \frac{r}{b} \right], \\ M_\theta(r) = -\frac{F}{4\pi} \left[\nu + (1 + \nu) \ln \frac{r}{b} \right]. \end{cases} \quad (7.55)$$

Plaadi servas $r = b$ paindemomendid

$$M_r = -\frac{F}{4\pi}, \quad M_\theta = -\frac{F\nu}{4\pi}. \quad (7.56)$$

Läbipaine plaadi keskel on lõplik, st.

$$w = \frac{Fb^2}{16D\pi}, \quad \text{sest} \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \ln \frac{r}{b} = 0. \quad (7.57)$$

7.4.3. Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat**344**

Paindemomendid ei oma aga keskel lõplikke väärtusi: kui $r \rightarrow 0$ siis $\ln \rightarrow -\infty$ ning $M_r \rightarrow \infty$ ja $M_\theta \rightarrow \infty$. Täpsemad arvutusel koormuse rakenduspunkti ümbruses (3 – 4 plaadi paksust) paksude plaatide teooria põhjal näitavad, et pinged ületavad voolavuspääri vaid plaadi surutud osas — koormuse rakenduspunkti ümbruses tekib lokaalne voolamine. Plaadi tõmmatud kihitides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{F}{h^2} (1 + \nu) \left(0, 485 \ln \frac{b}{h} + 0, 52 \right) \quad (7.58)$$

ning neile saab vastavusse seada nn. fiktiivsed paindemomendid

$$M_r = M_\theta = \frac{F}{6} (1 + \nu) \left(0, 485 \ln \frac{b}{h} + 0, 52 \right). \quad (7.59)$$

Vt. joonis 7.4, kus on toodud paindemomentide epüürid juhul $\nu = 0, 3$. Ristikestega on tähistatud fiktiivsete paindemomentide väärtused kolme erineva raadiuse–paksuse suhte b/h jaoks. Kokkuvõttes pole olukord ohtlik kuni pinged (7.58) jäävad lubatud piiridesse.

b) Vaba toetus

Rajatingimused välisserval $r = b$ on $w = M_r = 0$, kust leiame

$$C_2 = -\frac{F}{16D\pi(1+\nu)} [2(1+\nu)\ln b + 3 + \nu], \quad C_4 = \frac{Fb^2(3+\nu)}{16D\pi(1+\nu)}. \quad (7.60)$$

Siirded ja paindemomendid (7.53) saavad seejärel kuju

$$\begin{cases} w(r) = \frac{F}{16D\pi(1+\nu)} [(3+\nu)(b^2-r^2) + 2(1+\nu)r^2 \ln \frac{r}{b}], \\ M_r(r) = -\frac{F(1+\nu)}{4\pi} \ln \frac{r}{b}, \\ M_\theta(r) = -\frac{F(1+\nu)}{4\pi} \left(\ln \frac{r}{b} + 1 + \nu \right). \end{cases} \quad (7.61)$$

Ekstremaalne läbipaine plaadi keskel on lõplik

$$w = \frac{Fb^2(3+\nu)}{16D\pi(1+\nu)}. \quad (7.62)$$

Paindemomendid plaadi keskel on aga avaldiste (7.61) põhjal lõpmata suured (kui $r \rightarrow 0$ siis $\ln \rightarrow -\infty$ ning $M_r \rightarrow \infty$ ja $M_\theta \rightarrow \infty$).

7.4.3. Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat

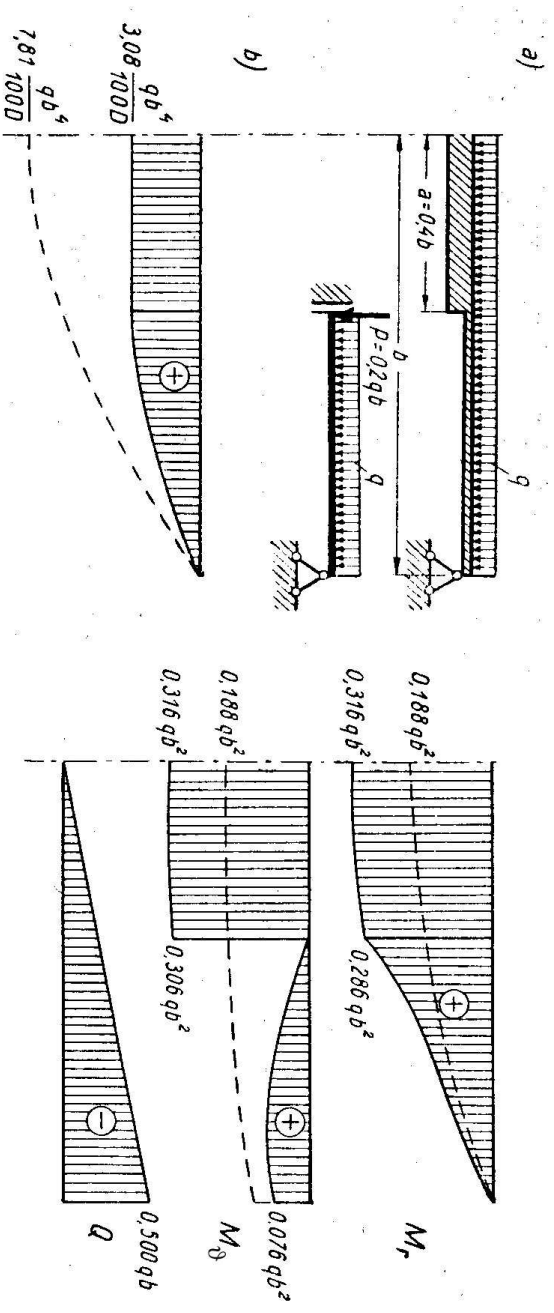
Analoogiliselt jäiga kinnitusega näitab ka siin täpsem uuring, et koormuse rakenduspunkti lähedal tekib lokaalne plastne tsoon kuid plaadi tõmmatud kihtides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{F}{h^2} \left[(1+\nu) \left(0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right) + 0,48 \right]. \quad (7.63)$$

Ka sel juhul pole olukord ohtlik kuni pinged (7.63) jäävad lubatud piiridesse.

7.4.4 Rõngasplaat

a) Jäiga südamikuga ümarplaat.

Joonis 7.5: Ühtlaselt koormatud rõngasplaadi paine. NB! Joonisel q , meil p_0 !

7.4.4. Rõngasplaat

Vaatleme vabalt toetatud astmelist ümarplaati, mille keskmise osa jäikus on suur võrreldes välise osaga (vt. joonis 7.5). Seetõttu käitub väline, st. väikese jäikusega osa kui rõngasplaat. Plaadile mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega p_0 . Lihtsuse mõttes eeldame, et sisemise osa raadius $a = 0,4b$ ja $\nu = 0$. Lisaks toome sisse m. dimensioonita raadiuse $\rho = r/b$.

Rajatingimused:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{välisserv, } \rho = 1 : \\ \quad w = 0, \\ \quad M_r = 0; \\ \text{siseserv, } \rho = 0,4 : \\ \quad \frac{dw}{dr} = 0, \\ \quad Q = -0,2bp_0, \end{array} \right. \quad \text{sest } |Q \cdot 2\pi a| = |\pi a^2 p_0|. \quad (7.64)$$

Kasutades viimaseid koos avaldistega (7.38) ja (7.39) saame määrata konstantid C_1, \dots, C_4 .

Saadud konstantide asendamisel võrrandisse (7.38) ja (7.39) saame siirete ja sisejõudude avaldised välise osa jaoks:

$$\begin{cases} w = p_0 b^4 (1, 562\rho^4 - 8, 151\rho^2 + 2, 448 \ln \rho + 6, 589,) / 100D \\ \frac{dw}{dr} = p_0 b^3 (6, 250\rho^3 - 16, 302\rho + 2, 448/\rho) / 100D, \\ M_r = p_0 b^2 (-18, 750\rho^2 + 2, 448/\rho^2 + 16, 302) / 100, \\ M_\theta = p_0 b^2 (-6, 250\rho^2 - 2, 448/\rho^2 + 16, 302) / 100, \\ Q = -0, 500p_0 b\rho. \end{cases} \quad (7.65)$$

Plaadi keskmine, st. jäigem osa, arvutatakse vastavalt timarplaadi valemitele. Siirete ja sisejõudude epiüürid on toodud joonisel 7.5. Vasakpoolne alumine joonis esitab läbipainde epiüüri ja parempoolsed sisejõudusid. Kriipsjoonega on esitatud ühtlase paksusega plaadi siirete ja sisejõudude epiüürid. On näha, et keskmise osa jäikuse suurendamine vähendab küll läbipaindeid, kui samas suurendab paindemomente nii jäigastatud kui jäigastamata osas. Kuna sellega kaasneb ka pingete kasv, siis ei saa sellist tüüpi konstruktsiooni lugeda heaks.

7.4.4. Rõngasplaat

350

Kui plaadi keskmise osa jäikus pole suur võrreldes äärmise osaga, siis on arvutus keerulisem, sest plaati tuleb vaadelda kui tervikut, võttes arvesse paksuse hüppelist muutust. Tuleb koostada siirete avaldised plaadi mõlema osa jaoks. Need avaldised sisaldavad 8 konstanti, millest kaks keskmisele osale vastavat on nullid. Ülejäänud 6 määratakse rajatingimustest väliserval, st. $\rho = 1$ on $w = M_r = 0$ ja pidevustingimustest siirete w ja sisejõudude Q, M_r ning M_θ jaoks kohal $r = a$.

b) Väliservast järgalt kinnitatud ja sisesevast vaba rõngasplaat.

Järgalt kinnitatud väliservas $r = b$ peavad $w = 0$ ja $dw/dr = 0$. Vabas siseseervas $r = a$ aga $M_r = 0$ ja $Q = 0$. Kasutades selliseid rajatingimusi saame avaldistest (7.38) ja (7.39) neli võrrandit konstantide C_1, \dots, C_4 määramiseks.

Kui konstandid on leitud saame omakorda leida siirete ja sisejõudude avaldised, milledest siinkohal esitame vaid siirete oma:

$$\begin{cases} w = \frac{p_0 a^4}{64D} [-1 + 2(1 - k - 2\beta^2)(1 - \rho^2) + \rho^4 - 4k \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho], \\ \rho = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \\ k = \frac{(1 - \nu)\beta^2 + (1 + \nu)(1 + 4\beta^2 \ln \beta)}{(1 - \nu) + (1 + \nu)\beta^2}. \end{cases} \quad (7.66)$$

Kokkuvõte. Rõngasplaatide korral on võimalikud väga mitmed jäiga kinnituse, vaba toetuse ja vaba serva kombinatsioonid. Kõigi nende puhul tuleb lähtudes avaldistest (7.38) ja (7.39) ning konkreetsetest rajatingimustest (7.43)–(7.45) koostada võrrandisüsteem konstantide C_1, \dots, C_4 määramiseks. Seejärel saadakse siirete ja sisejõudude avaldised.

7.5. Ümar- ja rõngasplaatide käitumine erinevate koormusskeemide ja toetusviiside korral. 352

7.5 Ümar- ja rõngasplaatide käitumine erinevate koormusskeemide ja toetusviiside korral.

7.5.1 Täiendusi alajaotusele 7.4

Alajaotuses 7.4 toodud valemitele lisaks esitatakse siin veel mõned praktilised valemid ja graafikud¹.

Ühtlaselt jaotatud koormusega järgalt kinnitatud ümarplaat.

Vastavalt valemitele (7.49) ja (7.48) *paindepinged² plaadi keskel*

$$\sigma_r|_{r=0} = \sigma_\theta|_{r=0} = \frac{3}{8}(1 + \nu)p_0 \left(\frac{b}{2c}\right)^2 \quad (7.67)$$

ja plaadi servas

$$\sigma_r|_{r=b} = -\frac{3}{4}p_0 \left(\frac{b}{2c}\right)^2, \quad \sigma_\theta|_{r=b} = \nu \sigma_r|_{r=b}. \quad (7.68)$$

¹Vt. ka A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

²Pingete-momentide vaheline seos: $\sigma = 12Mz/(2c)^3$, $\sigma_{\max} = 6M/(2c)^2$

Pingete suhe servas ja keskel Poisson'i teguri $\nu = 1/3$ korral

$$\left| \frac{\sigma_r|_{r=b}}{\sigma_r|_{r=0}} \right| = 1,5. \quad (7.69)$$

Ühtlaselt jaotatud koormusega vabalt toetatud ümarplaat.

- *Maksimaalne pinge plaadi keskel*

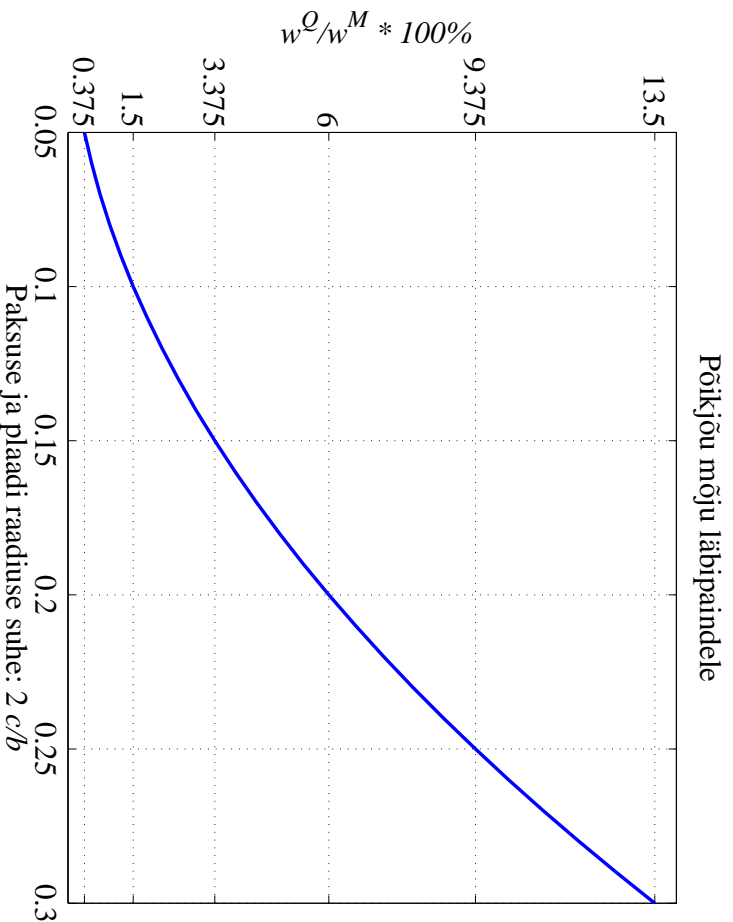
$$\sigma_r|_{r=0} = \sigma_\theta|_{r=0} = \frac{3}{8}(3 + \nu)p_0 \left(\frac{b}{2c} \right)^2. \quad (7.70)$$

- *Põikjõu mõju läbipaindele.* Põikjõust põhjustatud läbipainde w^Q ja paindemomendist põhjustatud läbipainde w^M suhe

$$\frac{w^Q}{w^M} = 1,5 \left(\frac{2c}{b} \right)^2. \quad (7.71)$$

Seega, mida suurem on plaadi paksuse suhe raadiusse, seda suuremat osatähtsust omab põikjõust põhjustatud läbipaine. Näiteks $2c/b = 0,1$ korral $w^Q/w^M = 0,015 = 1,5\%$, kuid $2c/b = 0,2$ korral juba $w^Q/w^M = 0,06 = 6\%$ (vt. joon. 7.6).

7.5.1. Täiendusi alajaotusele 7.4



Joonis 7.6: Põikjõust põhjustatud läbipainde w^Q ja paindemomendist põhjustatud läbipainde w^M suhe (protsentides) sõltuvana plaadi paksuse ja raadiuse suhtest.

Kahe toetusviisi pingete võrdlus. Poissoni tegur $\nu = 1/3$, ülemine indeks «j» tähistab jäika kinnitust ja «vt» vaba toetust.

$$\frac{\sigma_r^j|_{r=0}}{\sigma_r^{vt}|_{r=0}} = 0, 4; \quad \left| \frac{\sigma_r^j|_{r=b}}{\sigma_r^{vt}|_{r=0}} \right| = 0, 6. \quad (7.72)$$

7.5.2 Ümarplaadi paindeülesande lahendeid

Järgnevasse tabelisse³ on koondatud mitmed praktilist tähtsust omavad ümarplaadi paindeülesande lahendid. Vaatluse all on järgmised juhud:

1. Koormus: ühtlaselt mööda serva jaotunud moment M ; serv vabalt toetatud (või vaba).
2. Koormus: ühtlaselt mööda ringjoont raadiusega c jaotunud joonkoormus P_1 ; serv vabalt toetatud.
3. Koormus: tентrist kaugusel c mõjuv koondatud jõud P . Läbipaine w on vabalt toetatud serva korral ligikaudselt sama, mis juhul 2 ja jäigalt kinnitatud serva korral ligikaudu sama, mis juhul 6.

³Tabel on pärit õpikust A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

7.5.2. Ümarplaadi paindeülesande lahendeid

356

4. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinnna jaotunud koormus p_0 ; serv vabalt toetatud.
5. Koormus: ühtlaselt üle ringi (raadiusega c) jaotunud koormus p_0 ; serv vabalt toetatud.
6. Koormus: ühtlaselt mööda ringjoont raadiusega c jaotunud joonkoormus P_1 ; serv jäigalt kinnitatud.
7. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinnna jaotunud koormus p_0 ; serv jäigalt kinnitatud.
8. Koormus: ühtlaselt üle ringi (raadiusega c) jaotunud koormus p_0 ; serv jäigalt kinnitatud.

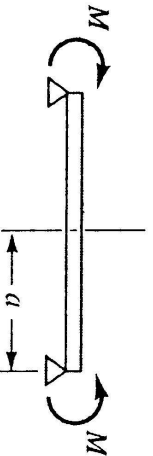
Kasutatud tähistused:

- a — plaadi raadius,
- t — plaadi paksus,
- p_0 — tihtlaselt jaotunud koormus (dim $p_0 = \text{N/m}^2$),
- P_1 — joonkoormus (dim $P_1 = \text{N/m}$), mis on tihtlaselt jaotunud mööda ringjoont raadiusega c ,
- P — koondatud jõud (dim $P = \text{N}$),
- M — tihtlaselt mööda plaadi väliserva jaotunud momentkoormus (dim $M = \text{N}$),
- σ — maksimaalne paindepinge,
- w — läbipaine plaadi keskel,
- θ — plaadi keskpinna kaldenurk plaadi servas,
- ν — Poisson'i tegur,
- E — Youngi moodul (elastsusmoodul).

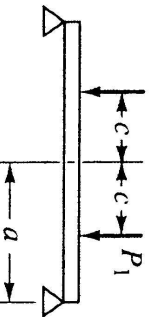
7.5.2. Ümarplaadi paindeülesande lahendeid

Tabel 7.1: Valenimid ümarplaadi paindel ilmnevate maksimaalsete pingete, läbipainete ja kaldenurkade arvutamiseks.

Nr.	Toetusviis ja koormuse skeem	σ_{\max} , w_{\max} , θ_{\max}
1.	Edge simply supported (or no support); load uniform along edge	$\sigma = 6 \frac{M}{t^2} \quad (\text{uniform})$ $w = 6(1 - \nu) \frac{Ma^2}{Et^3}$ $\theta = 12(1 - \nu) \frac{Ma}{Et^3}$



2. Edge simply supported;
load uniform along a
circle of radius c



$$\sigma = \frac{3 P_1 c}{2 t^2} \left[(1 - \nu) \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) + 2(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} \right]$$

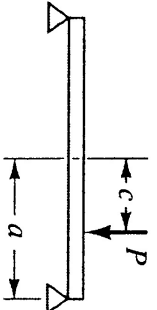
(at center)

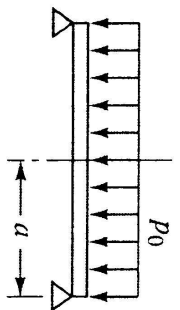
$$w = \frac{3(1 - \nu)}{2} \frac{P_1 c}{Et^3}$$

$$\times \left[(3 + \nu)(a^2 - c^2) - 2(1 + \nu)c^2 \ln \frac{a}{c} \right]$$

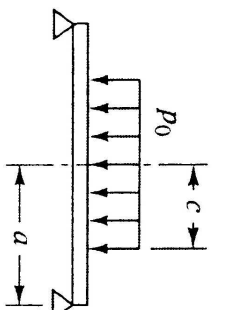
$$\theta = 6(1 - \nu) \frac{P_1 a c}{Et^3} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right)$$

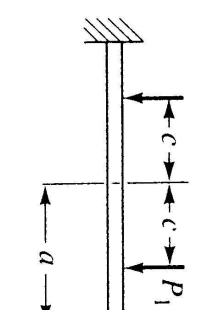
Tabel 7.1: jätksub

Nr.	Toetusviis ja koormuse skeem	σ_{\max} , w_{\max} , θ_{\max}
3.	<p>Concentrated load at a distance c from the center</p> 	<p>Deflection w at center approximately same as Case 2 for edge simply supported, and same as Case 6 for edge fixed.</p>

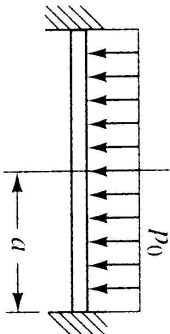
4.	<p>Edge simply supported; load uniform</p> 	$\sigma = \frac{3(3 + \nu)}{8} \frac{p_0 a^2}{r^2} \quad (\text{at center})$ $w = \frac{3(1 - \nu)(5 + \nu)}{16} \frac{p_0 a^4}{E r^3}$ $\theta = \frac{3(1 - \nu^2)}{2} \frac{p_0 a^3}{E r^3}$
----	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Tabel 7.1: jätksub

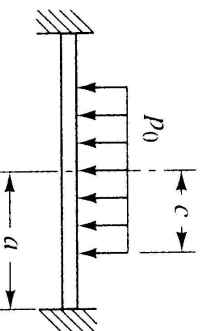
Nr.	Toetusviis ja koormuse skeem	σ_{\max} , w_{\max} , θ_{\max}
5.	<p>Edge simply supported; uniform load on circular area of radius c</p> 	$\sigma = \frac{3}{8} \frac{p_0 c^2}{r^2} \left[4 - (1 - \nu) \frac{c^2}{a^2} + 4(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} \right] \quad (\text{at center})$ $w = \frac{3(1 - \nu)}{16} \frac{p_0 c^2}{E r^3} \times \left[4(3 + \nu)a^2 - (7 + 3\nu)c^2 - 4(1 + \nu)c^2 \ln \frac{a}{c} \right]$ $\theta = \frac{3(1 - \nu)}{2} \frac{p_0 a c^2}{E r^3} \left(2 - \frac{c^2}{a^2} \right)$

6.	<p>Edge fixed; load uniform along a circle of radius c</p> 	$\sigma = \frac{3(1 + \nu)}{2} \frac{P_1 c}{r^2} \left(\frac{c^2}{a^2} + 2 \ln \frac{a}{c} - 1 \right) \quad (\text{at center})$ $\sigma = 3 \frac{P_1 c}{r^2} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) \quad (\text{at edge})$ $w = \frac{3(1 - \nu^2)}{2} \frac{P_1 c}{E r^3} \left(b^2 - c^2 - 2c^2 \ln \frac{a}{c} \right)$
----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Tabel 7.1: jätkub

Nr.	Toetusviis ja koormuse skeem	σ_{\max} , w_{\max} , θ_{\max}
7.	Edge fixed; load uniform 	$\sigma = \frac{3}{4} \frac{p_0 a^2}{t^2} \quad (\text{at edge})$ $w = \frac{3(1 - \nu^2)}{16} \frac{p_0 a^4}{Et^3}$
Juhul kui plaadi paksus $t > 0, 1a$, siis annab nn. modifitseeritud paindeteooria läbipaineks		
		$w = \frac{3\alpha(1 - \nu^2)}{16} \frac{p_0 a^4}{Et^3}, \quad \alpha = 1 + 5.72 \left(\frac{t}{a}\right)^2$

8. Edge fixed; load uniform over a circular area of radius c



$$\sigma = \frac{3(1 + \nu)}{8} \frac{p_0 c^2}{t^2} \left(\frac{c^2}{a^2} + 4 \ln \frac{a}{c} \right) \quad (\text{at center})$$

$$\sigma = \frac{3}{4} \frac{p_0 c^2}{t^2} \left(2 - \frac{c^2}{a^2} \right) \quad (\text{at edge})$$

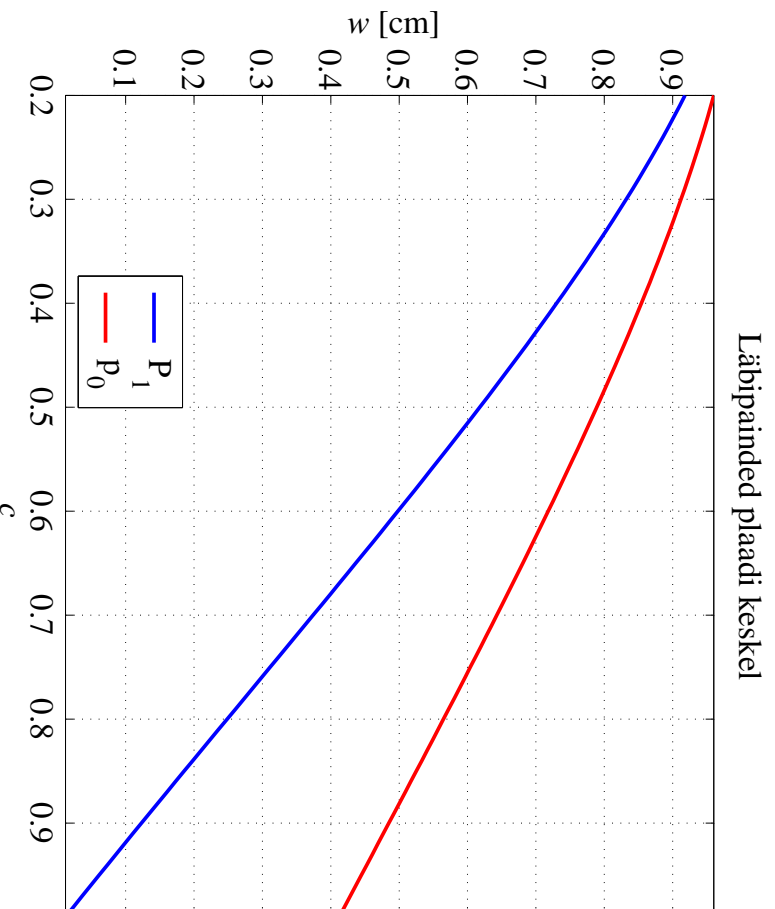
$$w = \frac{3(1 - \nu^2)}{4} \frac{p_0 c^2}{Et^3} \left(a^2 - \frac{3}{4} c^2 - c^2 \ln \frac{a}{c} \right)$$

7.5.2. Ümarplaadi paindeülesande lahendeid

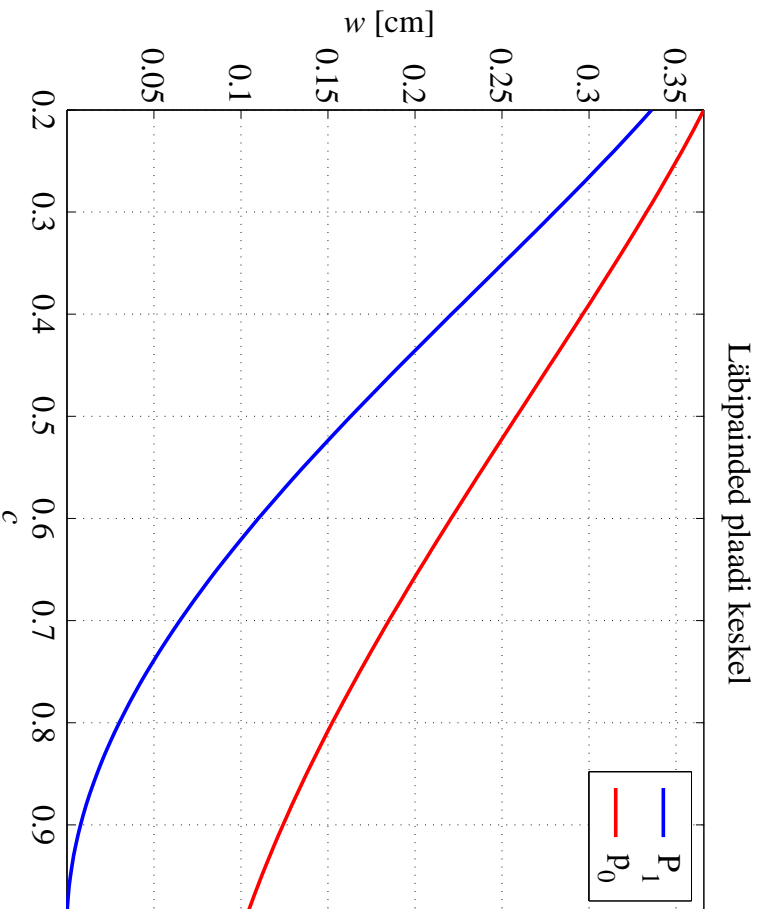
Järeldused

- Kõigil vaadeldud juhtudel on nii pinge kui läbipaine võrdeline rakendatud koormusega: suurendades (fikseeritud koormusskeemi korral) koormust 2 korda, suurenevad nii pinge kui läbipaine samuti 2 korda.
- Kõigil vaadeldud juhtudel on pinge pöördvõrdeline paksuse ruuduga: vähendades (fikseeritud koormusskeemi korral) plaadi paksust 2 korda, suureneb pinge $2^2 = 4$ korda ja vastupidi.
- Kõigil vaadeldud juhtudel on läbipaine pöördvõrdeline paksuse kuubiga: vähendades (fikseeritud koormusskeemi korral) plaadi paksust 2 korda, suureneb läbipaine $2^3 = 8$ korda ja vastupidi.
- Juhtudel 4 ja 7 on pinge võrdeline plaadi raadiuse ruuduga ja läbipaine plaadi raadiuse neljanda astmega.
- Juhtudel 2, 5, 6 ja 8 sõltub nii pinge kui läbipaine raadiusest c . Kuuna vastavad sõltuvused on mittelineaarsed, siis on mõistlik esitada nad graafiliselt.

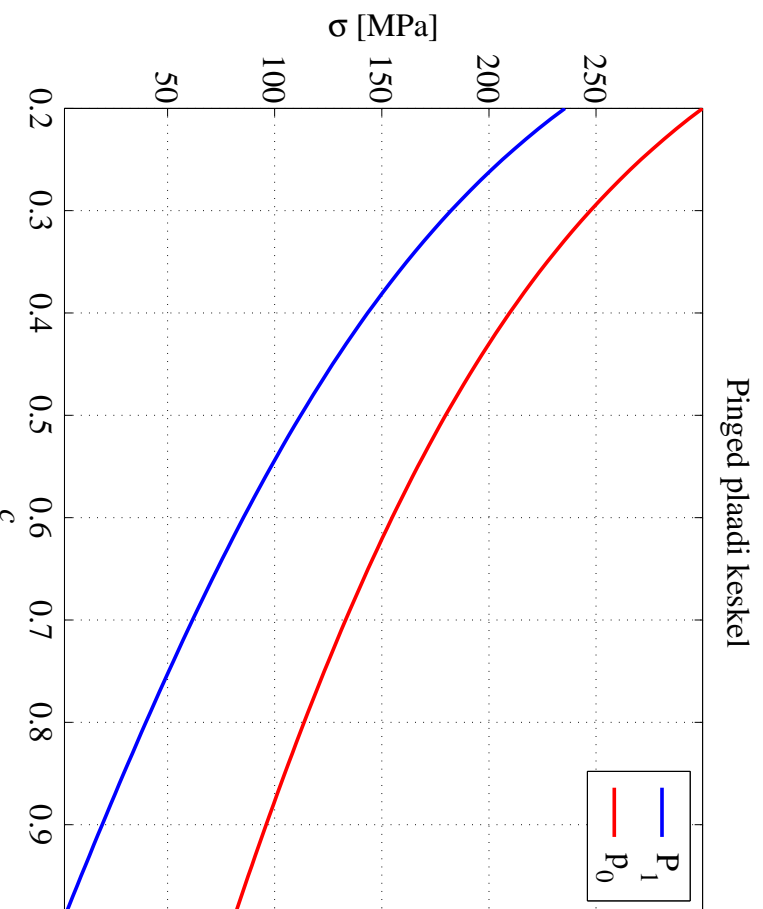
- Joonistel 7.7–7.12 esitatud graafikute koostamisel kasutati järgmisi andmeid: plaadi raadius $a = 1$; plaadi paksus $t = 0,05$; koormuse mõju määrava ringjoone raadius $0, 2 \leq c \leq 0,99$; ühtlaselt jaotunud koormus $p_0 = F/(\pi c^2)$; joonkoormus $P_1 = F/(2\pi c)$; summaarne koormus $F = 500\text{kN}$ oli fikseeritud; Youngi moodul $E = 210\text{GPa}$; Poisson'i tegur $\nu = 1/3$.
- Joonisel 7.7 on esitatud vabalt toetatud ja joonisel 7.8 järgalt kinnitatud ümarplaadi läbipainete graafikud.
- Joonisel 7.9 on esitatud pinged plaadi keskel vabalt toetatud ja joonisel 7.10 järgalt kinnitatud ümarplaadi jaoks.
- Joonisel 7.11 on esitatud pinged järgalt kinnitatud plaadi servas.
- Joonisel 7.12 on esitatud jaotatud koormuste P_1 ja p_0 ja raadiuse c vahelise sõltuvuse graafikud fikseeritud F jaoks.



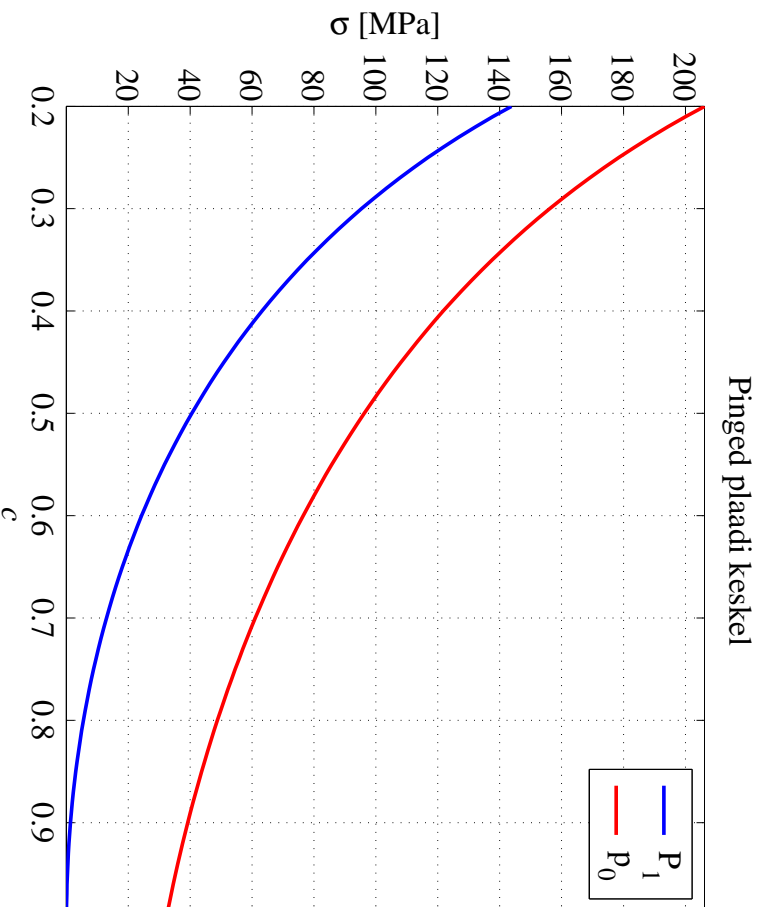
Joonis 7.7: Vabalt toetatud ümarplaadi läbipainete ja raadiuse c vaheline sõltuvus summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.



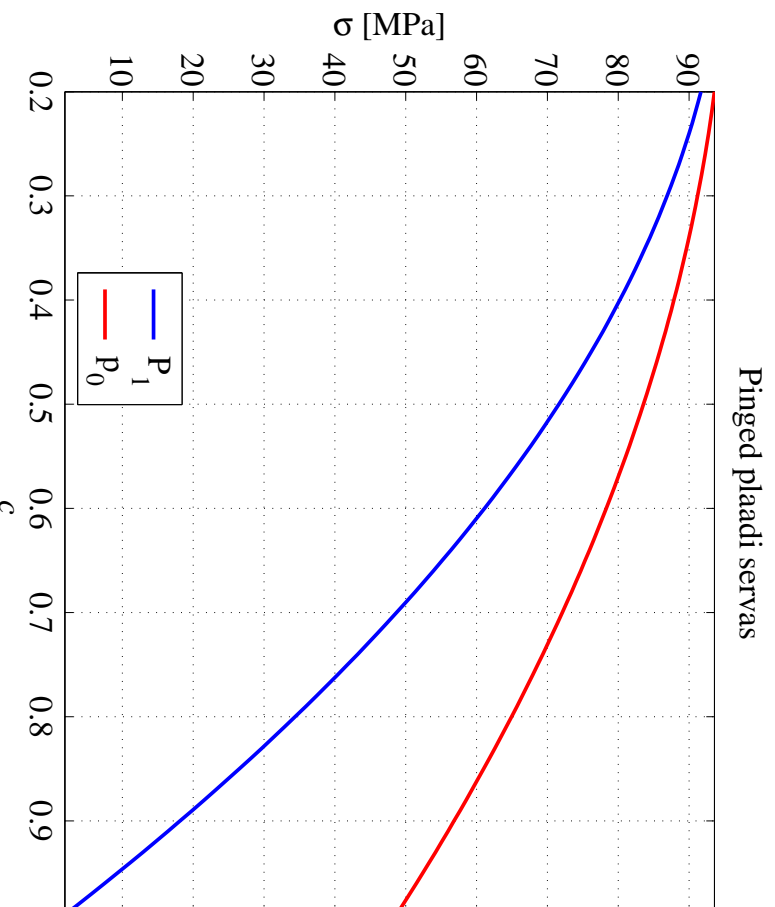
Joonis 7.8: Järgalt kinnitatud ümarplaadi läbipainete ja raadiuse c vaheline sõltuvus summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.



Joonis 7.9: Pinged vabalt toetatud ümarplaadi keskel sõltuvana raadiusest c summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.

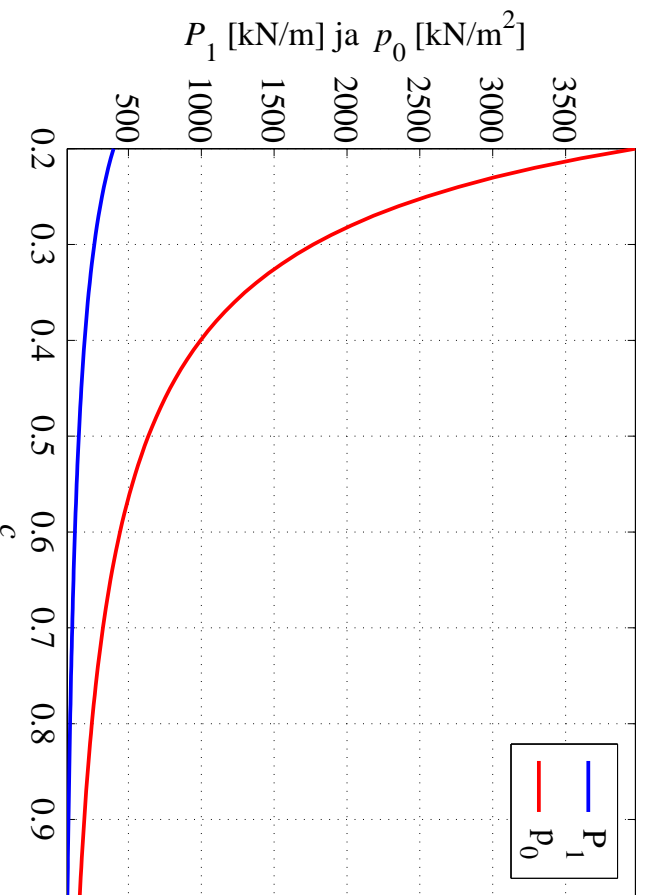


Joonis 7.10: Pinged järgalt kinnitatud ümarplaadi keskel sõltuvana raadiusest c summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.



Joonis 7.11: Pinged ümarplaadi järgalt kinnitatud servas sõltuvana raadiusest c summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.

Summaarsele koormusele $F = 500$ kN vastavad P_1 ja p_0



Joonis 7.12: Jaotatud koormused P_1 ja p_0 sõltuvana raadiusest c summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.

7.5.2. Ümarplaadi paindeülesande lahendeid

370

Märkusi koondatud jõu lokaalse mõju kohta⁴

- Plaadi keskel mõjuv koondatud jõud põhjustab määramatust pingete (ja momentide) avaldises.
- Koondatud jõud ei mõju tegelikult mitte kunagi ühes punktis, vaid ta on jaotunud üle mingi väikese pinna, mille raadiuse tähistame r_c .
- Selleks, et saada lahti koondatud jõu rakenduspunktis tekkivast määramatusest pingete (ja momentide) avaldises tuleb:
 1. raadius r_c asendada nn. ekvivalentraadiusega (vt. joonis 7.13)

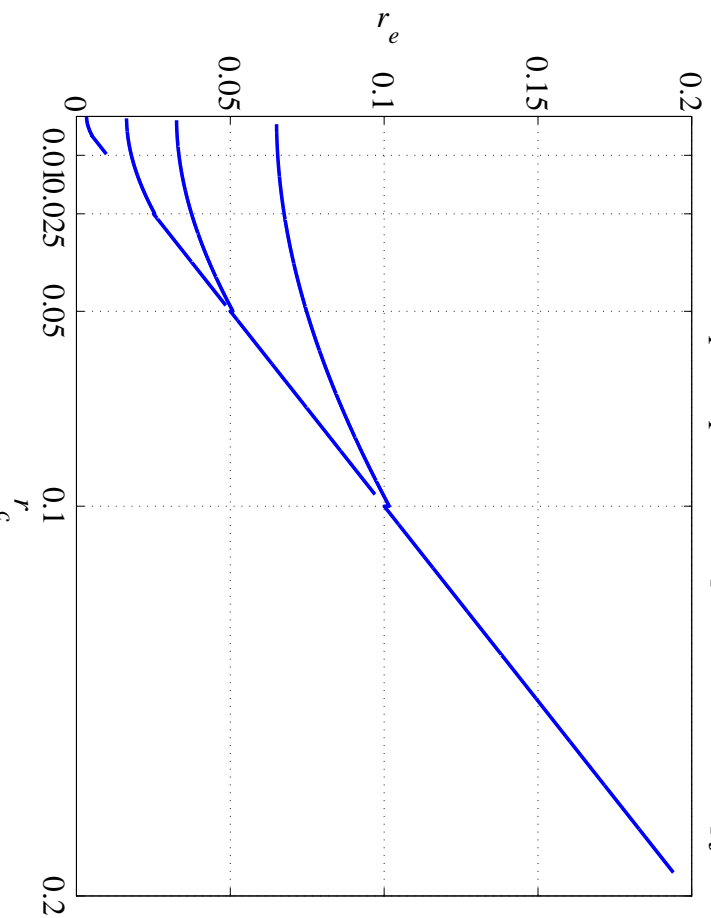
$$r_e = \begin{cases} \sqrt{1.6r_c^2 + t^2} - 0,675t, & r_c < 0,5t, \\ r_c, & r_c \geq 0,5t, \end{cases} \quad (7.73)$$

kus t on plaadi paksus (nagu eelnevates tabelites);

2. asendada koondatud jõud F ringis raadiusega $c = r_e$ mõjuva tihtlaselt jaotunud koormusega $p_0 = F/(\pi c^2)$ ning kasutada juhtudele 5 või 8 vastavaid valemeid.

⁴Vt. lisaks A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

Ekvivalentraadius plaadi paksuste $t = [0,01; 0,05; 0,1; 0,2]$ jaoks



Joonis 7.13: Ekvivalentraadius r_e vastavalt valemile (7.73) nelja erineva plaadi paksuse korral. Kõverad on joonistatud $0, 1t \leq r_c \leq 0, 97t$ jaoks.

7.5.3. Rõngasplaadi paindeülesande lahendeid

372

Järgnevasse tabelisse⁵ on koondatud mitmed praktilist tähtsust omavad rõngasplaadi paindeülesande lahendid. Vaatluse all on järgmised juhud:

1. Koormus: tihthlasel mööda välisserva jaotunud joonkoormus P ;
siseserv: järgalt kinnitatud; välisserv: vaba.
2. Koormus: tihthlasel üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0 ;
siseserv: järgalt kinnitatud; välisserv: vaba.
3. Koormus: tihthlasel mööda välisserva jaotunud joonkoormus P ;
siseserv: vabalt toetatud; välisserv: vaba.
4. Koormus: tihthlasel üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0 ;
siseserv: vabalt toetatud; välisserv: vaba.
5. Koormus: tihthlasel üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0 ;
siseserv: vaba; välisserv: vabalt toetatud.

⁵ Tabel on pärit õpikust A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

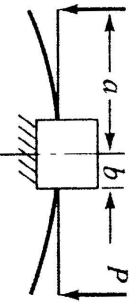
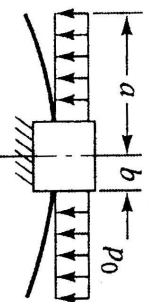
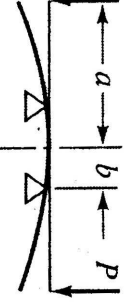
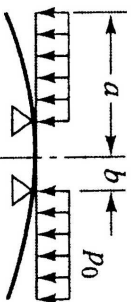
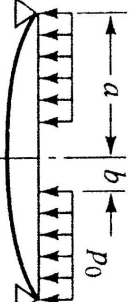
6. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinnal jaotunud koormus p_0 ; sisesev: pöörded keelatud; välissev: vabalt toetatud.
7. Koormus: ühtlaselt mööda välisserva jaotunud joonkoormus P ; sisesev: järgalt kinnitatud; välissev: pöörded keelatud.
8. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinnal jaotunud koormus p_0 ; sisesev: järgalt kinnitatud; välissev: pöörded keelatud.
9. Koormus: ühtlaselt mööda siseseva jaotunud joonkoormus P ; sisesev: vaba; välissev: järgalt kinnitatud.
10. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinnal jaotunud koormus p_0 ; sisesev: vaba; välissev: järgalt kinnitatud.

7.5.3. Rõngasplaadi paindeülesande lahendeid

Kasutatatud tähistused (NB! joonkoormuse tähistus on siin erinev võrreldes ümarplaadiga):

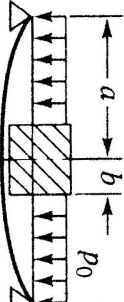
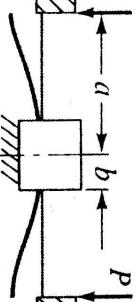
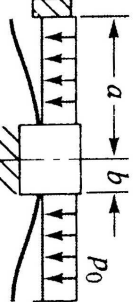
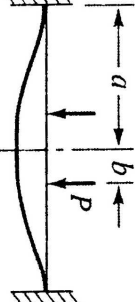
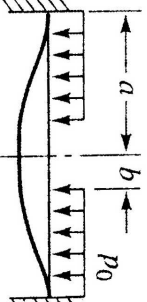
- a — plaadi välisraadius,
- b — plaadi siseradius,
- t — plaadi paksus,
- P — joonkoormus (dim $P = \text{N/m}$), mis on ühtlaselt jaotunud mööda sise- või välisserva,
- p_0 — ühtlaselt jaotunud koormus (dim $p_0 = \text{N/m}^2$),
- E — Youngi moodul (elastsusmoodul),
- σ_{\max} — maksimaalne pinge,
- w_{\max} — läbipaine sise- või välisservas.

Tabel 7.2: Valemid rõngasplaadi paindel ilmnevate pingete ja läbipainete arvutamiseks. Poisson'i tegur $\nu = 0,3$.

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	σ_{\max}	w_{\max}
1.	Inner edge fixed		$k_1 \frac{P}{t^2}$	$h_1 \frac{Pa^2}{Et^3}$
2.	Inner edge fixed		$k_2 \frac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_2 \frac{p_0 a^4}{Et^3}$
3.	Inner edge simply supported		$k_3 \frac{P}{t^2}$	$h_3 \frac{Pa^2}{Et^3}$
4.	Inner edge simply supported		$k_4 \frac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_4 \frac{p_0 a^4}{Et^3}$
5.	Outer edge simply supported		$k_5 \frac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_5 \frac{p_0 a^4}{Et^3}$

7.5.3. Rõngasplaadi paindeülesande lahendeid

Tabel 7.2: jätkub

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	σ_{\max}	w_{\max}
6.	Outer edge simply supported, inner-edge rotation prevented		$k_6 \frac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_6 \frac{p_0 a^4}{Et^3}$
7.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$k_7 \frac{P}{t^2}$	$h_7 \frac{Pa^2}{Et^3}$
8.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$k_8 \frac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_8 \frac{p_0 a^4}{Et^3}$
9.	Outer edge fixed		$k_9 \frac{P}{t^2}$	$h_9 \frac{Pa^2}{Et^3}$
10.	Outer edge fixed		$k_{10} \frac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_{10} \frac{p_0 a^4}{Et^3}$

Tabel 7.3: Konstantide k_i ja h_i väärtused sõltuvana välis- ja siseradiuse suhtest a/b .

a/b	1.25	1.50	2.00	3.00	4.00	5.00
k_1	0.227	0.428	0.753	1.205	1.514	1.745
h_1	0.0051	0.0249	0.0877	0.209	0.293	0.350
k_2	0.135	0.410	1.04	2.15	2.99	3.69
h_2	0.0023	0.0183	0.0938	0.2925	0.448	0.564
k_3	1.10	1.26	1.48	1.88	2.17	2.34
h_3	0.341	0.519	0.672	0.734	0.724	0.704
k_4	0.66	1.19	2.04	3.34	4.30	5.10
h_4	0.202	0.491	0.902	1.220	1.300	1.310
k_5	0.592	0.976	1.440	1.880	2.080	2.19
h_5	0.1841	0.4139	0.6640	0.8237	0.8296	0.813
k_6	0.122	0.336	0.74	1.21	1.45	1.59
h_6	0.0034	0.0313	0.1250	0.291	0.417	0.492
k_7	0.115	0.220	0.405	0.703	0.933	1.13
h_7	0.0013	0.0064	0.0237	0.0619	0.0923	0.114
k_8	0.090	0.273	0.71	1.54	2.23	2.80
h_8	0.0008	0.0062	0.0329	0.1096	0.1792	0.2338
k_9	0.194	0.320	0.454	0.673	1.021	1.305
h_9	0.00504	0.0242	0.0810	0.172	0.217	0.288
k_{10}	0.105	0.259	0.480	0.657	0.710	0.730
h_{10}	0.00199	0.0139	0.0575	0.130	0.162	0.175

7.5.3. Rõngasplaadi paindeülesande lahendeid

Järeldused:

- Joonkoormuse P korral on kõik avaldised kujul

$$\sigma_{\max} = k_i \frac{P}{t^2}, \quad w_{\max} = h_i \frac{Pa^2}{Et^3}. \quad (7.74)$$

- Pindkoormuse p_0 korral on kõik avaldised kujul

$$\sigma_{\max} = k_i \frac{p_0 a^2}{t^2}, \quad w_{\max} = h_i \frac{p_0 a^4}{Et^3}. \quad (7.75)$$

Tabel 7.4: Valemid lineaarselt muutuva ristlõikega rõngasplaadi paindel ilmnevale pingete ja läbipainete arvutamiseks. Juhtude numbrid vastavad tabelile 7.2; Poisson'i tegur $\nu = 0, 3$; plaadi paksus siseservas $t_1 = bt_2/a$.

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	σ_{\max}	w_{\max}
1.	Inner edge fixed		$\frac{P}{ka^2}$	$h_1 \frac{Pa^2}{Et_2^3}$
2.	Inner edge fixed		$\frac{P_0 a^2}{k_2 t_2^2}$	$h_2 \frac{P_0 a^4}{Et_2^3}$
6.	Outer edge simply supported, inner-edge rotation prevented		$\frac{P_0 a^2}{k_6 t_2^2}$	$h_6 \frac{P_0 a^4}{Et_2^3}$

Tabel 7.4: jätkub

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	σ_{\max}	w_{\max}
7.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$\frac{P}{k_7 \frac{t_2}{t_1}}$	$h_7 \frac{Pa^2}{Et_2^3}$
8.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$\frac{P_0 a^2}{k_8 t_2^2}$	$h_8 \frac{P_0 a^4}{Et_2^3}$

Tabel 7.5: Tabelis 7.4 esinevate konstantide k_i ja h_i väärtused sõltuvana välis- ja siseradiuse suhtest a/b .

a/b	1.25	1.50	2.00	3.00	4.00	5.00
k_1	0.353	0.933	2.63	6.88	11.47	16.51
h_1	0.0082	0.0583	0.345	1.358	2.39	3.27
k_2	0.249	0.638	3.96	13.64	26.0	40.6
h_2	0.0037	0.0453	0.401	2.12	4.25	6.28
k_6	0.149	0.991	2.23	5.57	7.78	9.16
h_6	0.0055	0.0564	0.412	1.673	2.79	3.57
k_7	0.159	0.396	0.091	3.31	6.55	10.78
h_7	0.0017	0.0112	0.0606	0.261	0.546	0.876
k_8	0.1275	0.515	2.05	7.97	17.35	30.0
h_8	0.0011	0.0115	0.0934	0.537	1.261	2.16