

# Peatükk 8

## Plaatide stabiilsus

---

### 8.1. Sissejuhatus

383

## 8.1 Sissejuhatus

Vaatleme plaati, millele mõjuv koormus on plaadi tasandis.

- Koormus suhteliselt väike
  - tasandülesanne — plaat jääb tasapinnaliseks
- Koormus ületab kriitilise piiri
  - Mõlgid (mõlkumine) — stabiilsuse kadu
  - Analooogia tala stabiilsuse kaoga — tala nõttke
  - Erinevus talast — stabiilsuse kadumisega koos ei pruugi kaduda plaadi kandevõime — painduvate plaatide teooria.

Vt. lisaks R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967 lk. 469–488.

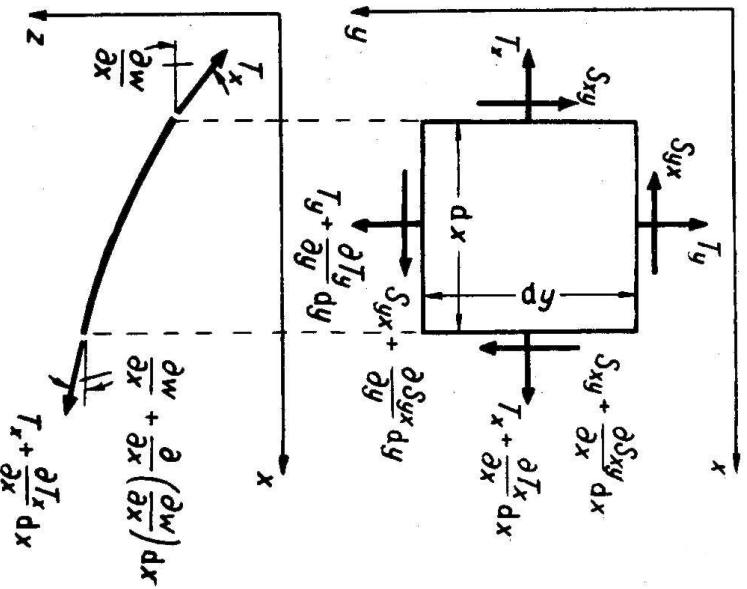
---

## 8.2 Kriitilise koormuse määramine staatilise tasakaalu meetodil

Seni oleme EPPDV tuletamisel arvesse võtnud vaid sisejõudusid (painde- ja vändemomente ning pöikjõudu), mis on põhjustatud plaadile mõjuvast pöikkoormusest. Hilijatud on olnud plaadi tasandis mõjuvad piki- ja nihkejõud ehk aheljõud. Stabiilsuse (ja suurte läbipainete) uurimisel tuleb aga needki arvesse võtta.

Idee:

- Plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrandisse (EPPDV) tuleb lisada liikmed, mis vastavad plaadi tasandis mõjuvatele jõududele.
- Tuleb leida plaadi läbipainde avaldis, mis rahuldaks nii EPPDV-t kui räjatingimusi.



Joonis 8.1: Plaadi element  $dx - dy - h$  ja talle mõjuvad jõud

Vaatleme plaadi elementi servapikkus-  
tega  $dx$ ,  $dy$  ja  $h$ , millele mõjuvad piki-  
jõud  $T_x$  ja  $T_y$  ning nihkejõud (tangent-  
siaaljõud)  $S_{xy} = S_{yx}$  (vt. joonis 8.1). Vas-  
tavad ahelpinged<sup>a</sup>  $\sigma_x = T_x/h$ ,  $\sigma_y = T_y/h$   
ja  $\tau_{xy} = S_{xy}/h$ .

Staatilise tasakaalu korral peavad vaa-  
deldavale elemendile mõjuvate summaar-  
sete jõudude projektsioonid koordinaat-  
telgedel olema nullid.

Eeldame, nagu eespoolgi, et pöörded on  
väikesed ja seega  $\cos \alpha \sim 1$  ning  $\sin \alpha \sim$   
 $\tan \alpha \sim \alpha$ .

<sup>a</sup>NBI! nagu teistelgi sisejõundudel on aheljõudude di-  
mensioon N/m

Kuna  $x$ - ja  $y$ -telgede sihis mõjuvad vaid sisejõud siis saavad tasakaaluvõrrandid kuju

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0. \quad (8.1)$$

Projekteerides jõud  $T_x$ ,  $T_y$  ja  $S_{xy} = S_{yx}$   $z$ -teljele saame n. täiendava jõu, mis tuleb lisada plaadi EPPDV-sse (6.10):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( p(x, y) + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (8.2)$$

Valides põkkkoormuse  $p = 0$ , saamegi võrrandi kriitilise koormuse leidmiseks:

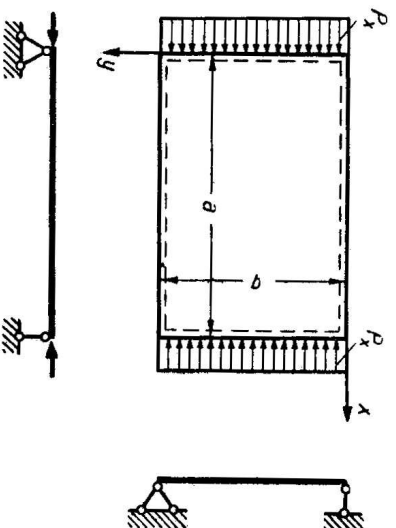
$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8.3)$$

### 8.2.1. Ristkülikplaadi kriitilise koormuse leidmine

387

#### 8.2.1 Ristkülikplaadi kriitilise koormuse leidmine

Jäigale kontuurile toetuv ühes sihis surutud plaat (joon. 8.2).



Joonis 8.2: Jäigale kontuurile toetuv ristkülikplaat.

- Koormus  $P_x$  on rakendatud plaadi servadel  $x = 0$  ja  $x = a$ .
- $T_x = -P_x$ ,  $T_y = S_{xy} = 0$
- Kriitilise koormuse määramise võrrand (8.3) lihtsustub

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (8.4)$$

- Lahendit otsime analoogiliselt Navier' meetodiga kujul

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.5)$$

- (8.5)  $\rightarrow$  (8.4)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - P_x \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (8.6)$$

- (8.6) peab kehtima iga  $x$  puhul  $\Rightarrow$  üksikud sõltumatud võrrandid

$$P_x = \pi^2 D \frac{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2}{m^2/a^2} = \pi^2 D \frac{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2}{m^2 a^2 b^4}. \quad (8.7)$$

- Fikseeritud  $m$  korral omab  $P_x$  minimaalset väärtust  $n = 1$  korral.
- Fikseeritud  $n$  korral sõltub minimaalset  $P_x$  tagav  $m$  väärtus suhtest  $a/b$ .

## 8.2.1. Riskütkiplaadi kriitilise koormuse leidmine

- $n = 1 \rightarrow$  (8.7)  $\Rightarrow$

$$P_x = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left( m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2. \quad (8.8)$$

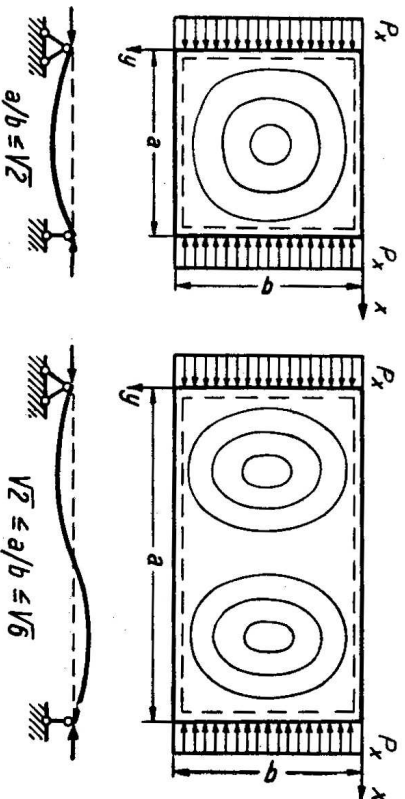
$P_x$  minimumile vastab

$$\frac{d}{dm} \left( m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right) = 1 - \frac{1}{m^2} \frac{a^2}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a}{b}. \quad (8.9)$$

- Kuna poollainete arv  $m$  saab olla vaid täisarv, kuid küljepikkuste suhe  $a/b$  ei pruugi olla täisarv, siis pole tulemus otseselt rakendatav.
  - Leiame millise  $a/b$  väärtuse korral annavad  $m$  ja  $m + 1$  poollainet sama kriitilise koormuse  $P_{kr}$ :  $m \ \& \ m + 1 \rightarrow$  (8.8)  $\Rightarrow$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m+1)} \quad (8.10)$$

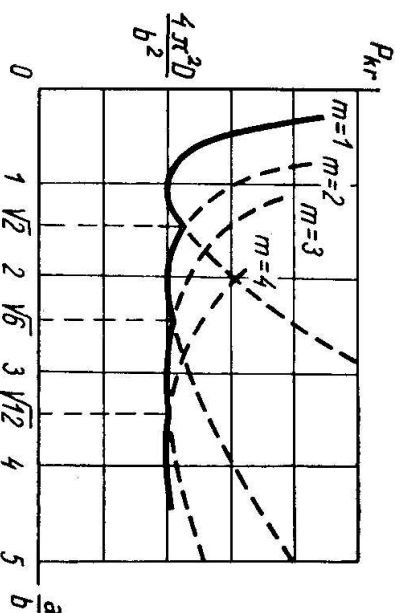
- Teisisõnu, piir ühe ja kahe poollaine vahel on  $a/b = \sqrt{2}$ , kahe ja kolme vahel  $a/b = \sqrt{6}$ , kolme ja nelja vahel  $a/b = \sqrt{12}$  jne. (vt. joonised 8.3 ja 8.4).



Joonis 8.3: Ühe ja kahe poolainega mõlkumiskujud.

- Üksikud kõverad joonisel 8.4 vastavad poolainete arvule  $m = 1, 2, 3, \dots$ . On selge, et kriitiline koormus  $P_{kr}$  omab minimaalset väärtust  $4\pi^2 D/b^2$  juhul kui  $a/b$  on täisarv. Viimase joonise põhjal on selge, et juhtude  $a/b \geq 1$  korral (koormus on rakendatud lühematele külgedele ja mõjub seega pikemate külgede sihis) sobib kriitiliseks koormuseks see sama minimaalne väärtus

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}. \quad (8.11)$$

Joonis 8.4: Kriitiline koormus sõltuvana suhtest  $a/b$ .

- Juhtudel kui  $a/b < 1$  (koormus on rakendatud pikematele külgedele ja mõjub seega lühemate külgede sihis) on  $m = n = 1$  ja valemist(8.8) saame

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2. \quad (8.12)$$

- Kui  $a/b \ll 1$ , siis saab viimane kuju

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2}. \quad (8.13)$$

Kriitilise pinge leidmiseks jagatakse kriitiline koormus plaadi paksusega  $h$ :

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{h}. \quad (8.14)$$

Arvestades, et  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$  saame pikemate külgede sihis surrutud plaadi ( $a/b > 1$ ) jaoks

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{3(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (8.15)$$

ja lühemate külgede sihis surrutud plaati ( $a/b < 1$ ) jaoks

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \quad (8.16)$$

# Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	3
1.1 Elastusteooria ehk elastsusõpetus	4
1.2 Mehaanika harud	6
1.2.1 Jäiga keha mehaanika	7
1.2.2 Pideva keskkonna mehaanika	8
1.2.3 Tehniline mehaanika	9

1.3	Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest . . . . .	10
1.3.1	Staatika . . . . .	10
1.3.2	Tugevusõpetus . . . . .	24
1.4	Elastusteooria ülesanded . . . . .	50
1.5	Klassikalise elastusteooria põhieeldused ja põhihüpoteesid . . . . .	51
<b>2</b>	<b>Pinge</b>	<b>54</b>
2.1	Jõud ja pinged . . . . .	55
2.2	Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid . . . . .	60
2.3	Pinged kaldpinnal, rajatingimused keha pinnal . . . . .	65
2.4	Peapinged, pinge invariantid . . . . .	68
2.5	Pingetensor . . . . .	73
2.6	Ülesanded . . . . .	76

<b>3</b>	<b>Deformatsioon</b>	<b>80</b>
3.1	Siire ja deformatsioon . . . . .	81
3.1.1	Cauchy seosed . . . . .	81
3.1.2	Orienteeritud lõigu pikenemine . . . . .	87
3.2	Deformatsioonitensor . . . . .	91
3.3	Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus . . . . .	92
3.4	Pidevustingimused . . . . .	93
3.5	Üldistatud Hooke'i seadus . . . . .	98
3.5.1	Deformatsioonide avaldamine pingete kaudu . . . . .	98
3.5.2	Hooke'i seadus ruumdeformatsiooni jaoks . . . . .	101
3.5.3	Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu . . . . .	102
3.5.4	Anisotroopsed kehad . . . . .	104
3.6	Elastsusjõu töö ja deformatsiooni potentsiaalne energia . . . . .	108

<b>4</b>	<b>Elastusteooria põhivõrrandid, nende lahendusmeetodid ja lihtsamad ruumilised ülesanded</b>	<b>113</b>
4.1	Elastusteooria põhivõrrandid . . . . .	114
4.2	Elastusteooria ülesannete lahendusmeetodid . . . . .	118
4.2.1	Elastusteooria ülesannete lahendamine sirretes . . . . .	119
4.2.2	Elastusteooria ülesande lahendamine pingetes . . . . .	122
4.3	Lihtsamad ruumilised ülesanded . . . . .	126
4.3.1	Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne . . . . .	127
4.3.2	Prismaatiliste varraste puhas paine . . . . .	132
4.3.3	Plaadi puhas paine . . . . .	136
4.3.4	Varda tõmme omakaalu mõjul . . . . .	139
4.3.5	Ülesanded . . . . .	142
<b>5</b>	<b>Elastusteooria tasandülesanne</b>	<b>143</b>
5.1	Tasandülesande mõiste . . . . .	144

5.2	Tasanddeformatsioon . . . . .	145
5.3	Tasandpingus . . . . .	150
5.4	Tasandülesande lahendamine pingetes . . . . .	151
5.5	Biharmoonilise võrrandi lahendamine polinoomides . . . . .	156
5.6	Konsooli paine . . . . .	166
5.7	Ühtlaselt koormatud tala paine . . . . .	186
5.8	Hüdrostaatilisel koormatud tugiseina arvutus. . . . .	196
5.9	Hüdrostaatilisel koormatud vertikaalne konsool . . . . .	202
5.10	Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides . . . . .	204
5.10.1	Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon . . . . .	204
5.10.2	Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides . . . . .	206
5.11	Kõvera tala paine . . . . .	207
5.12	Pöörlev ketas . . . . .	210
5.13	Radiaalne pingus. . . . .	214
5.14	Kiilu surve. . . . .	215



5.15	Koondatud jõu mõju poolruumile . . . . .	219
5.16	Näide: joonkoormuse mõju pooltasandile . . . . .	227

## 6 Õhukeste plaatide paine

**239**

6.1	Plaatide paindeteooria põhimõisted ja hüpoeesid . . . . .	239
6.2	Deformatsioonide avaldamine plaadi punkti siirete ja läbipainde kaudu. . . . .	246
6.3	Plaadi elastse pinna võrrand . . . . .	249
6.4	Sisejõud . . . . .	252
6.4.1	Toereaktsioonid . . . . .	256
6.5	Rajatingimused . . . . .	258
6.6	Ühtlaselt koormatud plaatide lihtsamad paindeülesanded . . . . .	263
6.6.1	Silindriline paine . . . . .	263
6.6.2	Ühtlaselt koormatud järgalt kinnitatud elliptiline plaat . . . . .	267
6.7	Elastse pinna võrrandi lahendamine ristkülikulise plaadi korral . . . . .	272

6.7.1	Navier' meetod — lahendus kahekordsetes trigonomeetrilistes ridades . . . . .	272
6.7.2	Võrgumeetod ehk lõplike vahede meetod . . . . .	290

## 7 Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördekehades

**317**

7.1	Üldvõrrandid . . . . .	318
7.2	Ümarplaadi paine . . . . .	326
7.3	Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand. . . . .	331
7.4	Näiteid ümar- ja rõngasplaatide paindeülesannetest. . . . .	337
7.4.1	Rajatingimused . . . . .	337
7.4.2	Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat . . . . .	338
7.4.3	Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat . . . . .	342
7.4.4	Rõngasplaat . . . . .	347
7.5	Ümar- ja rõngasplaatide käitumine erinevate koormusskeemide ja toetusviiside korral. . . . .	352

---

7.5.1	Täiendusi alajaotusele 7.4 . . . . .	352
7.5.2	Ümarplaadi paindeülesande lahendeid . . . . .	355
7.5.3	Rõngasplaadi paindeülesande lahendeid . . . . .	372
<b>8</b>	<b>Plaatide stabiilsus</b>	<b>382</b>
8.1	Sissejuhatus . . . . .	383
8.2	Kriitilise koormuse määramine staatilise tasakaalu meetodil . . . . .	384
8.2.1	Ristkülikplaadi kriitilise koormuse leidmine . . . . .	387

---