

Tallinna Tehnikaülikool  
Mehaanikainstituut  
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

# Lineaarne elastsusteooria

(Elastsusõpetus)

Loengukonsppekt

Tallinn 2009

## Eessõna

Käesolev loengukonsppekt on eeskätt mõeldud kasutamiseks Tallinna Tehnikaülikooli ehitusteaduskonna tiliopilastele lineaarse elastsusteooria kursuse (EMD0020) õppimisel. Kuni 2008. aastani õpetati sama koodiga ainet elastsusõpetuse nime all. Õppeaine laiendatud programm, «Lineaarne elastsusteooria, EMD0020 programm» (vt. <http://cens.ioc.ee/~salupere/loko>), kujutab endast antud loengukonsppekti lahutamatu lisa. Seal on esitatud õppeaine eesmärgid, maht, eeldusained ja soovitatav kirjandus ning kirjeldatud antud aine õppimisel kehtivat töökorraldust.

*Märksused:*

1. Loengukonsppekt on internetis aadressil <http://cens.ioc.ee/~salupere/loko>.
2. Loengukonsppekt pole mõeldud kasutamiseks iseseisva õpikuna. Seetõttu on õpitavast

ainest tervikliku tillevate saamiseks loengute külastamine ja vajalikus ulatuses konspekteerimine hädavajalik.

3. Teksti paremas servas olevad märgid (✓, ●, ★ jne.) tähistavad kohti, kus loengus esitaakse olulisi selgitavaid märkusi.
4. Loengukonspetti pisut ebariitlik väljanägemine (kaks A5 lehekülge on paigutatud ühele A4 lehele) on tingitud praktilistest kaalutlustest. Loengutel näidatakse materjali A5 lehekülgede kaupa.
5. Vabandan juba ette tekstis esineda võivate triikivigade pärast. Vastavasisulised märkused on terehulnud nii loengutes kui e-kirjade kujul aadressil [salupere@ioc.ee](mailto:salupere@ioc.ee).

Andrus Salupere

# Peatükk 1

## Sissejuhatus

---

## 1.1 Elastussteeooria ehk elastsusõpetus

Katsed on näidanud, välismõjude (pindkoormused, massjõud, soojendamise, jahutamise) toimel võivad tahked kehad deformeeruda. Kui deformatsioonid ei üleeta teatud piiri, siis välismõjude kõrvaldamisel keha taastab oma esialgse kuju. Sellist tahke keha omadust nimetatakse *elastsuseks*.

*Elastussteeooria ehk elastsusõpetus* uurib elastsete kehade deformatsioone ja liikumist. Sõltuvalt välismõjude kõrvaldamise kiirusest võivad siin kaasneda teatud võnkumised. Kui deformatsioonid aga ületavad teatava piiri, siis keha algne kuju ei taastu täielikult — osa deformatsioone säilib. Neid jäävaid deformatsioone nimetatakse *plastseteks deformatsioonideks*.

*Elastussteeooria* ülesandeks on määrata ja hinnata

- geomeetrilisi suurusi, mis iseloomustavad keha deformatsiooni: läbipained, siirded jne.;
- sisejõude ja pingeid, mis ilmnevad deformatsiooniprotsessis.

Selleks rakendatakse matemaatilisi meetodeid (matemaatiline analüüs, diferentsiaalvõrrandite teooria jne.).

---

### 1.1. *Elastussteeooria ehk elastsusõpetus*

### 5

Elastsussteooria põhineb pideva keskkonna mehaanikal<sup>1</sup>. Seega on vaja sisse tuua või määrata:

- Pideva keskkonna mõiste.
- Sisejõudude ja deformatsioonide vahelised seosed ehk olekuvõrrandid (viimased määratakse eksperimentidest).
- Geomeetrilised suurused, mis kirjeldavad keha deformatsioone.
- Sisejõud ja nende seos välismõjudega.

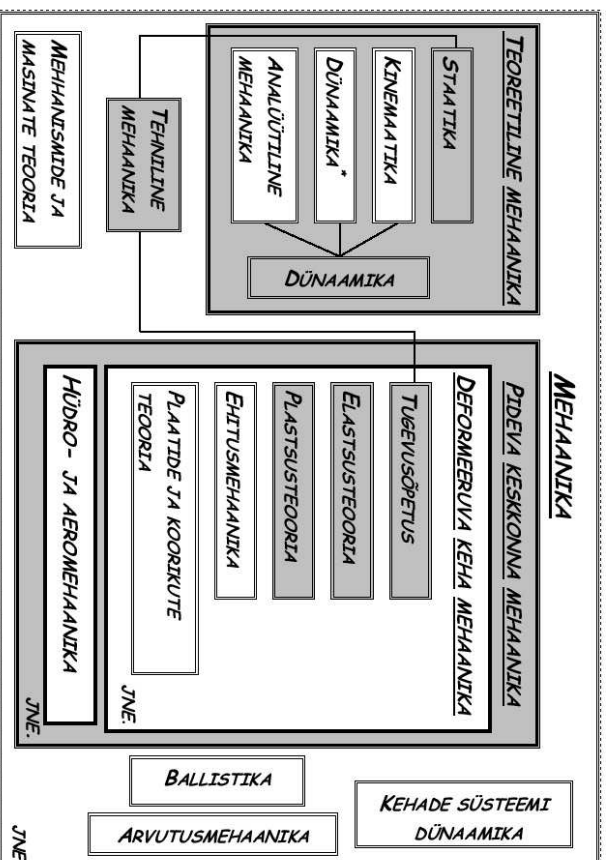
Käesoleva kursuse raames käsitletakse lineaarset elastsussteooriat.

---

<sup>1</sup>Pideva keskkonna mehaanika uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimel.

## 1.2 Mehaanika harud

*Mehaanika* on teadus, mis uurib tahkete kehade, vedelike ja gaaside liikumist, selle liikumise põhjusi ja tagajärgi.



Joonis 1.1: Mehaanika harud

### 1.2. Mehaanika harud

### 7

#### 1.2.1 Jäiga keha mehaanika

*Teoreetiline mehaanika* ehk absoluutselt jäiga keha mehaanika uurib absoluutselt jäikade kehade liikumist ja paigalseisu neile rakendatud jõudude toimel.

*Absoluutselt jäiga* keha mistahes kahe punkti vaheline kaugus on konstantne.

Laias laastus võib teoreetilise mehaanika jagada *staatikaks*, *kinemaatikaks* ja *dünaamikaks*.

- *Staatika* uurib:

1. kehade tasakaalu (täpsemalt öeldes kehadele rakendatud jõusüsteemide tasakaalu) ja
2. jõusüsteemide lihtsustamist ehk taandamist.

- *Kinemaatika* uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.

- *Klassikaline dünaamika* uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimel.

*Liikumisena* ehk mehaanikalise liikumisena mõistetakse vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes. Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega järgalt koordinaatsüsteem. Tulemust nimetatakse *taustsüsteemiks*.

*Punktmassiks* nimetatakse materiaalselt keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.

*Aeg* loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.

### 1.2.2 Pideva keskkonna mehaanika

*Pideva keskkonna mehaanika* (PKM) uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimel.

Palju harusid

---

#### 1.2. Mehaanika harud

- tahkise (deformeeruva keha) mehaanika
  - tugevusõpetus
  - elastsusteooria
  - plastusteooria
  - jne.
- hüdro- ja aeromehaanika
  - hüdrostaatika
  - hüdrodinaamika
  - jne.

### 1.2.3 Tehniline mehaanika

Tehniline mehaanika = staatika + tugevusõpetus.

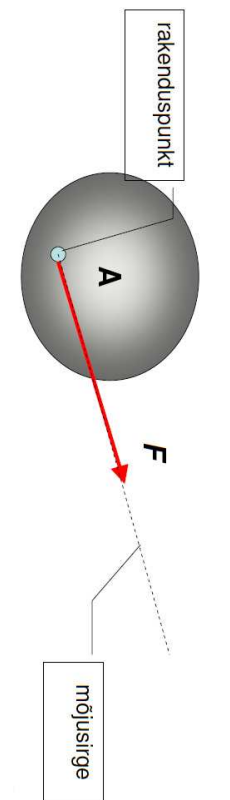
*Tugevusõpetus* on mehaanika haru, mis uurib konstruktsioonielementide piisava tugevuse, jäikuse ja stabiilsuse saavutamist võimalikult ökonoomsel moel.

---

## 1.3 Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

Täpsema ülevaate saamiseks on soovitatav lugeda professor Aleksander Klausoni loengukonspekte.

### 1.3.1 Staatika



Joonis 1.2: Jõud ja jõu mõjusirge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

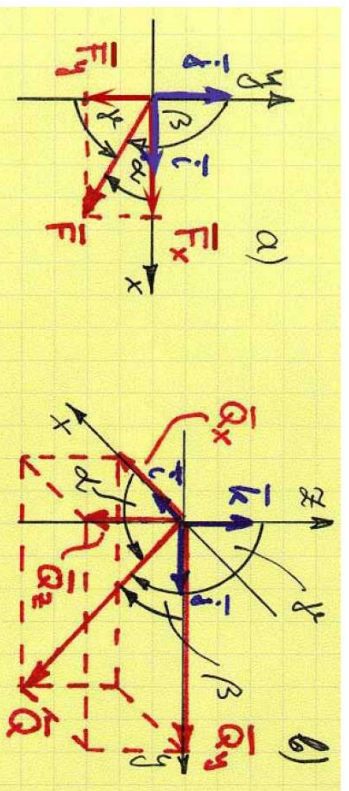
*Jõud* on kehade vastastikuse mõju mõõt. *Jõud on vektorialne suurus*. Jäiga keha mehaanikas (k.a. staatikas) on *jõud libisev vektor*. Teisisõnu, jäiga keha mehaanikas võib lugeda jõudu rakendatuks oma mõjusirge mistahes punkti.

*Jõusüsteem* on kehale mõjuvate jõudude kogum.

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

*Jõu projektatsioon* on skalaar: kui  $\mathbf{i}$  on  $x$  telje suunaline ühikvektor, siis projektatsioon  $F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = F \cos \alpha$ .

*Jõu komponent* on vektor:  $\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i}$ .



Joonis 1.3: Jõu projektioonid ja jõu komponendid.

*Vabaks kehaks* nimetatakse keha, mille liikumist ei piira mitte ükski tingimus.

Vaba keha saab antud asendist üle viia mistahes uude asendisse.

*Side* on keha liikumist kitsendav tingimus. Tavaliselt moodustab sideme mingi teine keha.

*Sidemereaktsioon* ehk *reaktsioonjõud* on jõud, millega sidet moodustav keha mõjub vaadeldavale kehale.

Inseneriülesannete puhul nimetatakse sidemeid tihti ka *tugedeks* ja vastavaid reaktsioonjõudusid *toereaktsioonideks*.

*Sidemetest vabastatavuse printsiip*: Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega.

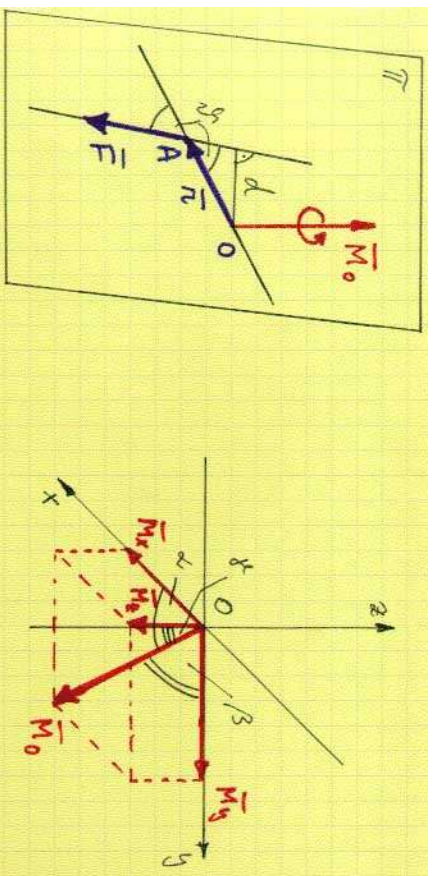
*Sidemete tüübid*: sile pind, kare pind, liikumatu liigend(tugi), liikuv liigend(tugi), kerge varras, painduv tihendus jne.

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüppotesidest ja võrranditest

*Jõu momentiks punkti suhtes* nimetatakse vektorit, mis võrdub jõu raken-  
duspunkti  $A$  kohavektori  $\mathbf{r}$  ja jõuvektori  $\mathbf{F}$  vektorikorrutisega.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M_O \equiv |\mathbf{M}_O| = Fr \sin \vartheta = Fd. \quad (1.1)$$

*Jõu moment iseloomustab jõu pööravat toimet.*



Joonis 1.4: Jõu moment punkti suhtes.

Momentvektori  $\mathbf{M}_O$  suurus (ehk moodul) ja suund sõltub punkti  $O$  valikust kuid ei sõltu punkti  $A$  valikust jõu mõjusirgel.

Momentvektori  $\mathbf{M}_O$  mõjusirge määrab telje, mille ümber jõud  $\mathbf{F}$  püüab tekitada pöörlemist.

Pöörde suund määratakse *kruiireeglaga* — kui (parema käe) kruvi teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga, siis keha pöörlemise suund ühtib kruvi pöörlemise suunaga. Ja vastupidi, kui kruvi pöörata keha pöörlemise suunas, siis tema teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga.

*Jõu moment telje suhtes* võrdub selle telje mistahes punkti suhtes leitud momentvektori projektsiooniga vaadeldaval teljel.

- See on üldlevinud määratlus ja selle põhjal on tegu skalaariga. Tegelikult võib ka jõu momenti telje suhtes käsitleda vektorina.
- Praktikas leitakse moment valemist  $M = \pm Fd$ , s.t. jõud korda jõu õlg, ning märk määratakse kruiireeglga.

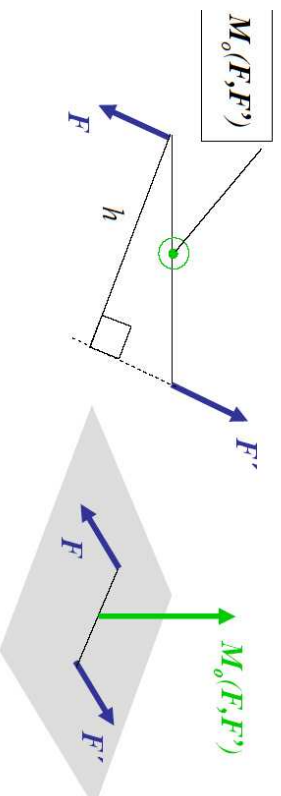
✓

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

15

*Jõupaari* moodustavad kaks võrdvastupidist jõudu  $\mathbf{F}$  ja  $-\mathbf{F}$  millel on erinev mõjusirge.

*Jõupaari moment* võrdub ilhe jõupaari moodustava jõu momendiga teise rakenduspunkti suhtes. Jõupaari moment on *vabavektor*.



Jõupaari moment on *vabavektor*, mille moodul  $M = Fh$ , kus  $h$  on jõupaari õlg.

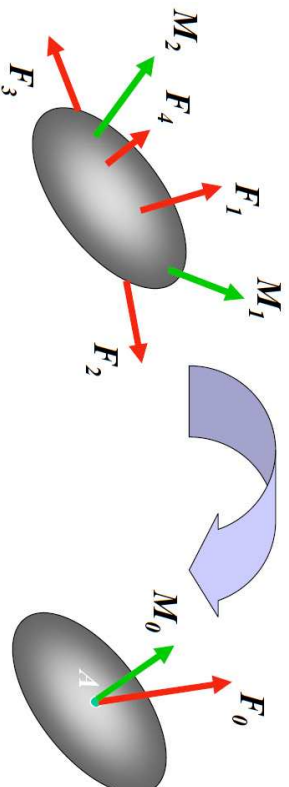
Joonis 1.5: Jõupaar ja jõupaari moment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengurakendusest.)



*Lemma jõu paralleelikkusest.* Jäiga keha mistahes punktis  $A$  rakendatud jõu võib paralleelselt tema mõjusirgega üle kanda uude rakenduspunkti  $B$  kui lisada punktis  $A$  rakendatud jõu moment punkti  $B$  suhtes.

*Staatika põhiteoreem (Poinsoot' teoreem):* Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab asendada taandamistsentrisse rakendatud jõusüsteemi peavektoriga ja jõusüsteemi peamomendiga taandamistsentri suhtes.



Joonis 1.6: Jõusüsteemi peavektor ja peamoment.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

*Jõusüsteemi peavektor:*  $\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$

*Jõusüsteemi peamoment:*  $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$ , kus punkti  $O$  nimetatakse *taandamistsentriks*. (Joonisel on kahjuks  $O$  asemel  $A$ .)

*Jõusüsteem on tasakaalus* parajasti siis kui peavektor  $\mathbf{F}_O$  ja mingi punkti  $O$  suhtes leitud peamoment  $\mathbf{M}_O$  on võrdsed nulliga:

$$\mathbf{F}_O = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (1.2)$$

*Skalaarsed tasakaalu tingimused:*

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & \sum_i F_{iy} = 0, & \sum_i F_{iz} = 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

*Tasapinnaline jõusüsteem*

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{Oz}(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (1.4)$$

Alternatiivsed võrrandid

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (1.5)$$

või

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (1.6)$$

või

$$\sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Cz}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad (1.7)$$

kus punktid  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ei asetse samal sirgel.

*1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest**Staatiliselt määratud ja staatiliselt määramata ülesanded:*

Kui on võimalik koostada nii sama palju tasakaaluvõrrandeid kui palju on tundmatuid toereaktsioone, siis on tegu *staatiliselt määratud ülesandega*. Vastupidisel juhul on tegu *staatiliselt määramata ülesandega*.

Mitmetes õpikutes kasutatakse antud kontekstis ka termineid *staatikaga määratud ülesanded* ja *staatikaga määramata ülesanded*.

*Raskuskese*

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int_V \mathbf{r} dV}{V}. \quad (1.8)$$

Skalaarkujul

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \quad (1.9)$$

*Masskese:* sarnased valemid, kuid  $V \rightarrow m$

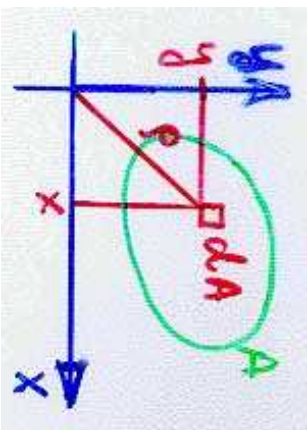
*Pinnakese:* sarnased valemid, kuid  $V \rightarrow A$

Pinnamomendid.

$n + m$  astme pinnamoment

$$\int_A x^m y^n dA \quad (1.10)$$

Nullastme pinnamoment — pindala:



Joonis 1.7: Tasapinnalise kujundi pinnamomendid.

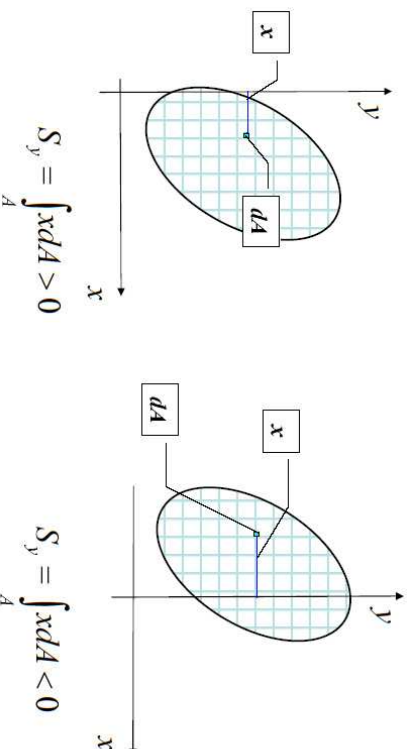
$$A = \int_A dA. \quad (1.11)$$

1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

21

*Esimese astme pinnamomendid — staatilised momendid:*

$$S_x = \int_A y dA \quad S_y = \int_A x dA. \quad (1.12)$$



Joonis 1.8: Staatiline moment.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

*Teise astme pinnamomendid — inertsimomendid momendid:*

*telginertsimomendid*

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad (1.13)$$

*polaarinertsimoment*

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA; \quad (1.14)$$

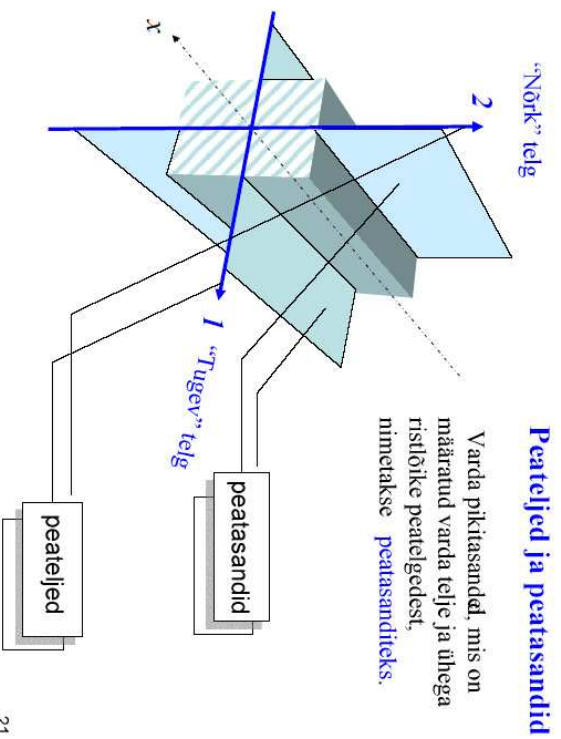
*tsentrifugaalinerstsimoment*

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (1.15)$$

*1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest*

*23*

*Ristlõike keskteljed ja peateljed. Peainertsimomendid. Peatasandid.*



21

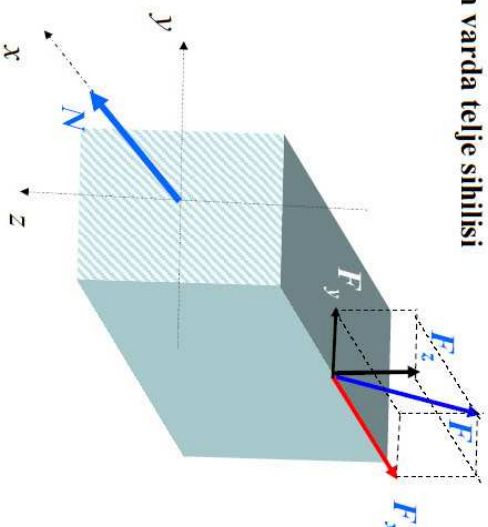
Joonis 1.9: Ristlõige.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengurakendusest.)

### 1.3.2 Tugevusõpetus

*Sisejõud:* pikijõud, vändemoment, põikjõud, paindemoment.

Pikijõud varda ristlõikes tekib siis, kui ühel pool lõiget rakendatud välisjõududel on varda telje suhtelisi komponente.

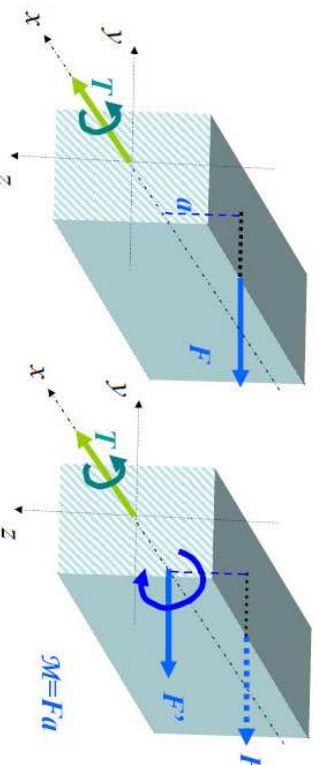


Joonis 1.10: Pikijõud

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

Vändemoment  $T$  varda ristlõikes tekib siis, kui mõnel ühel pool lõiget rakendatud välisjõul on varda  $x$ -telje suhtes õlg.



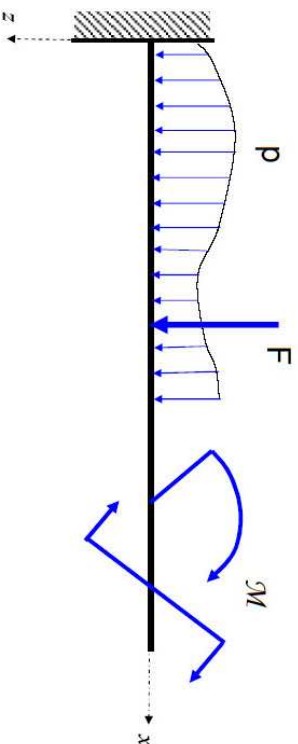
Taandades välisjõu  $F$  varda  $x$ -teljele saame välisjõu  $F'$  ja pöördemomendi  $\mathcal{M}$ .

15

Joonis 1.11: Vändemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsistist.)

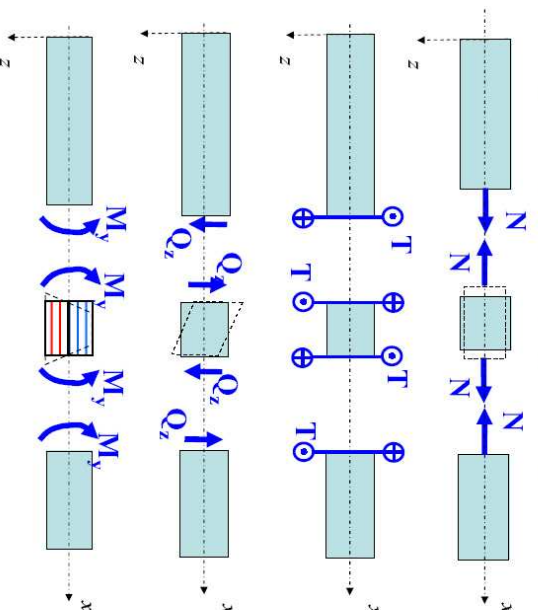
Vaatleme vardale ühes peatasandis (näiteks  $xz$ -tasandis) rakendatud koormust, mis koosneb teljega risti suunatud jõududest ja jõupaaridest .



Joonis 1.12: Põikjõud ja paindemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

Varda sisejõu märgireeglid (sisejõudude positiivsed suunad).

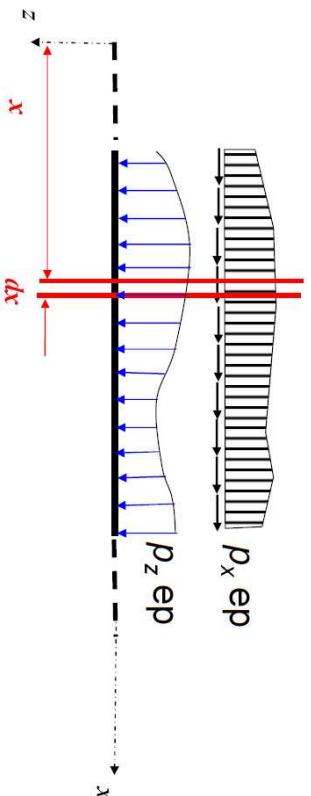


2

Joonis 1.13: Sisejõudude märgireeglid.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel



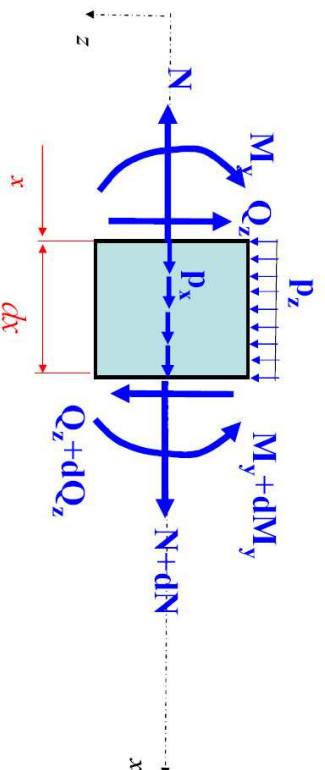
Joonis 1.14: Diferentsiaal- ja integraalseosed — lauskoormuse intensiivsuse (Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

$$\frac{dN}{dx} = N' = -p_x, \quad N(x) = N(a) - \int_a^x p_x(x) dx, \quad (1.16)$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = Q'_z = -p_z, \quad Q_z(x) = Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx, \quad (1.17)$$

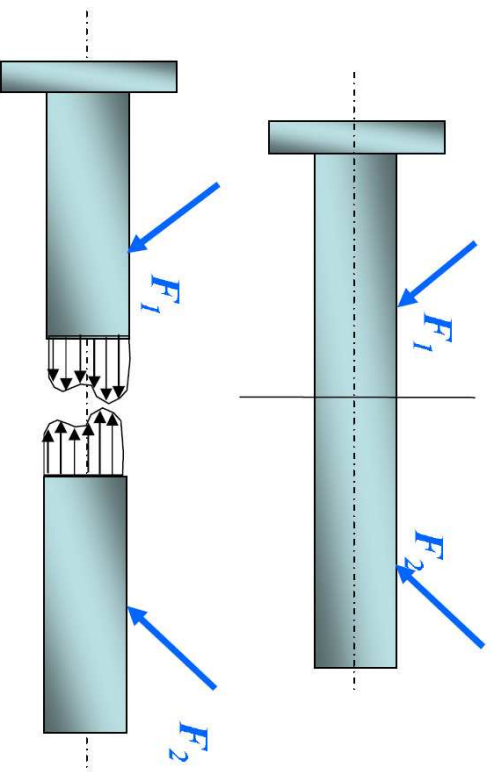
$$\frac{dM_y}{dx} = M'_y = Q_z, \quad M_y(x) = M_y(a) - \int_a^x Q_z(x) dx. \quad (1.18)$$

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest



Joonis 1.15: Diferentsiaal- ja integraalseosed — sisejõud (Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### Lõikemeetod, pinged varda ristlõikes



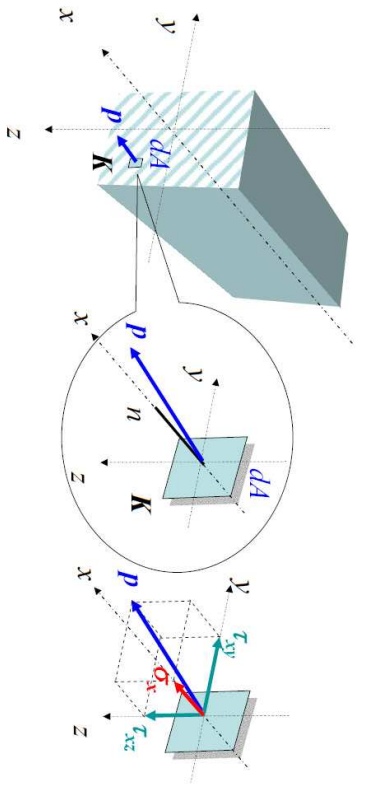
Joonis 1.16: Lõikemeetod ja pinged varda ristlõikes

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

*Pinged varda punktis.* Vaatleme varda punkti  $K$ , mida läbib pind normaalliga  $\mathbf{n}$ . Seal mõjub pingevektor  $\mathbf{p}$ . Viimane omab normaalkomponenti  $\sigma_x$  ja tangentsiaalkomponente  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$ .

- $\sigma_x$  — normaalpinge — märgireegel analoogne pikijõuga
- $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  — nihkepinge ehk tangentsiaalpinge — märgireegel analoogne põikjõuga



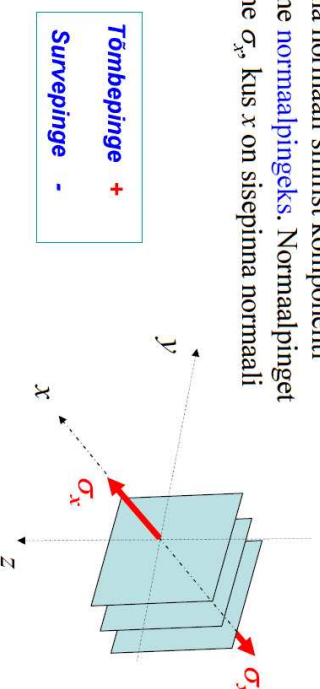
Joonis 1.17: Pinge varda punktis

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)



### Normaalpinge $\sigma$

Sisepinna normaali sihilist komponenti nimetame **normaalpingeks**. Normaalpinget tähistame  $\sigma_x$ , kus  $x$  on sisepinna normaali siht.

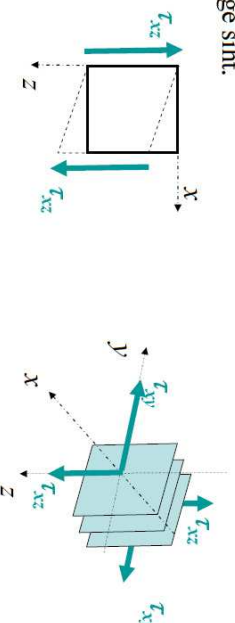


Joonis 1.18: Normaalpinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### Tangentsiaalpinge $\tau$

Sisepinna puutuja sihilisi komponente nimetame **tangentsiaalpingeteks**. Tangentsiaalpinget tähistame  $\tau_{xy}$ , kus  $x$  on sisepinna normaali siht ja  $y$  – pinge siht.



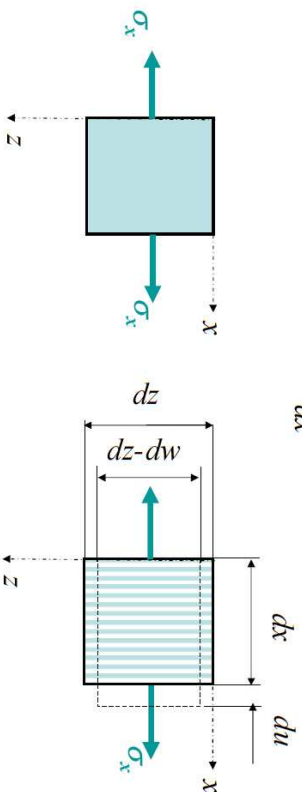
Tangentsiaalpinge (**nihkepinge**) iseloomustab jõudude intensiivsust, mis püüavad sisepinnaga paralleelseid materjalikihte omavahel nihutada. **Positiivne nihkepinge** mõjub positiivsel sisepinnal telgedele positiivses suunas. Joonisel on toodud positiivsed nihkepinged.

Joonis 1.19: Nihekepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### Normaaldeformatsioon (normaalnoone)

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$



Tõmbel kaasneb pikideformatsiooniga vastasmärgiline pöikideformatsioon:

$$\varepsilon_z = -\frac{dw}{dz}$$

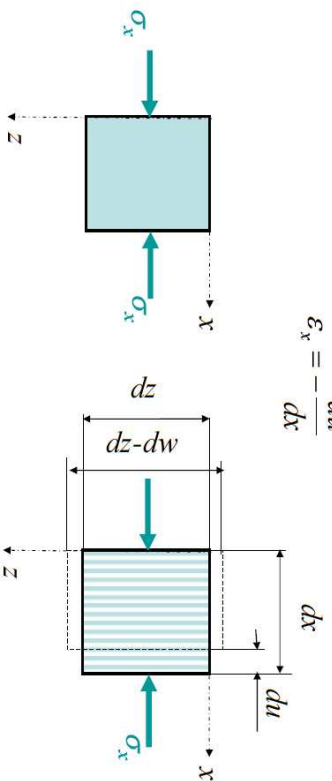
~

Joonis 1.20: Normaaldeformatsioon:  $\sigma > 0$

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

$$\varepsilon_x = -\frac{du}{dx}$$



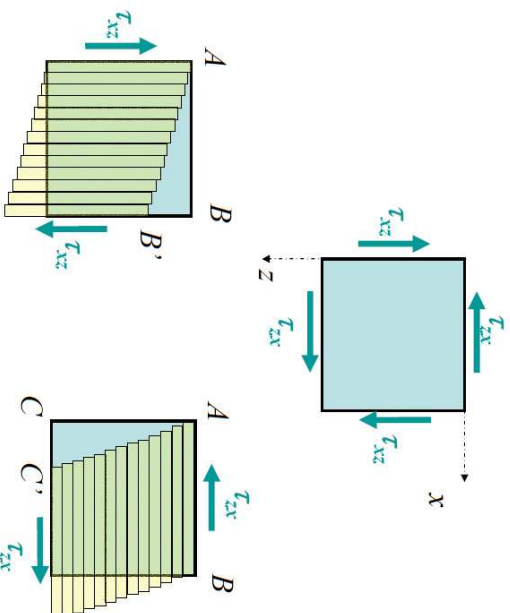
Survel pikideformatsiooniga kaasneb vastasmärgiline pöikideformatsioon:

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}$$

Joonis 1.21: Normaaldeformatsioon:  $\sigma < 0$

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.)

## Nihkedeformatsioon ehk nihe ehk nihkemoone

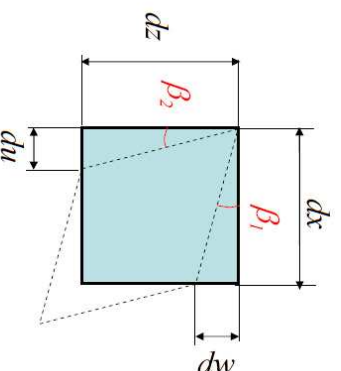


Joonis 1.22: Nihkedeformatsioon

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.)

## 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

Kuna tangentsiaalpinged  $\tau_{xz}$  ja  $\tau_{zx}$  mõjuvad ainult koos, siis kirjeldatakse elementaarriistahuka kogu deformatsiooni osanihete summamana:



$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \omega_{xz} + \omega_{zx} = \tan \beta_1 + \tan \beta_2 = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \approx \beta_1 + \beta_2$$

See summa on suhteline nihkedeformatsioon ehk nihkemoone.

Joonis 1.23: Nihkedeformatsioon

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.)

*Elastsuskonstandid:*

- $E$  — Youngi moodul ehk (normaal)elastsusmoodul;
  - $G$  — nihkeelastsusmoodul;
  - $\nu$  — Poissoni tegur;
  -
- $$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.19)$$

*Pingete ja deformatsioonide (moonete) vahelised seosed:*

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \dots, \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x \quad (1.20)$$

---

*1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest*

*Deformatsioonienergia* Vaatleme vedru, mille elastsusjõu moodul  $F = kx$ .

- Elastsusjõu elementaartöö  $dW = F dx = kx dx$
- Elastsusjõu töö lõplikul deformatsioonil ongi võrdne vedru deformatsioonil «tekkinnud» potentsiaalse energiaga

$$U = W = \int_0^{x_1} dW = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{kx_1^2}{2}. \quad (1.21)$$

Analoogiliselt vedruga leitakse elastsel deformatsioonil akumulleeruvat energiat. Viimane esitatakse tavaliselt energia tihedusena. Näiteks

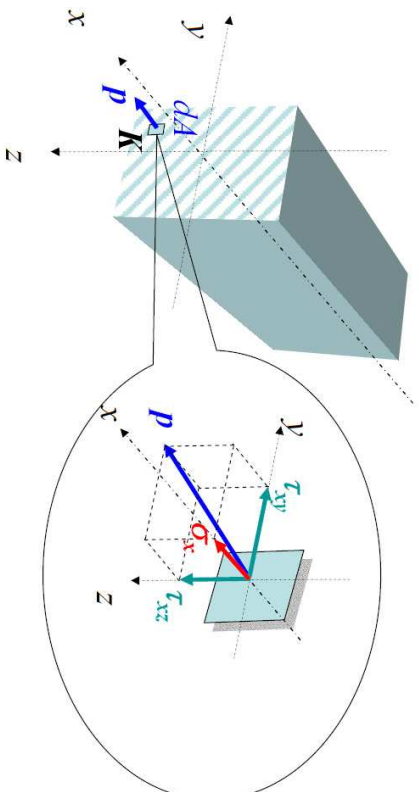
$$u_\sigma = \frac{dU}{dV} = F \frac{\epsilon_x^2}{2} = \frac{\epsilon_x \sigma_x}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2E}, \quad u_\tau = \frac{dU}{dV} = G \frac{\gamma_{xy}^2}{2} = \frac{\gamma_{xy} \tau_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \quad (1.22)$$

ja summaarne deformatsioonienergia tihedus

$$u = u_\sigma + u_\tau. \quad (1.23)$$


---

## Seos pingete ja sisejõudude vahel

Joonis 1.24: Pinged varda ristlõike elementaarpinnaal  $dA$ .(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

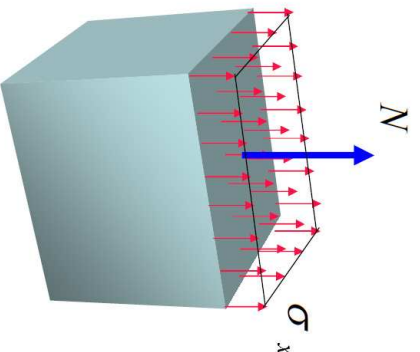
$$N = \int_A \sigma_x dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA; \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA; \quad (1.24)$$

$$M_y = \int_A z \sigma_x dA; \quad M_z = \int_A y \sigma_x dA; \quad T = \int_A (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA. \quad (1.25)$$

## 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

## Pikkepinge

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (1.26)$$



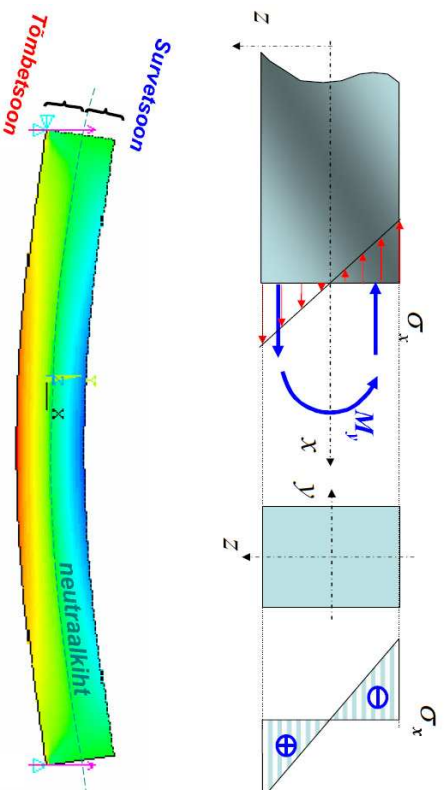
Joonis 1.25: Pikkepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsistist.)

## Paindepinge

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

(1.27)



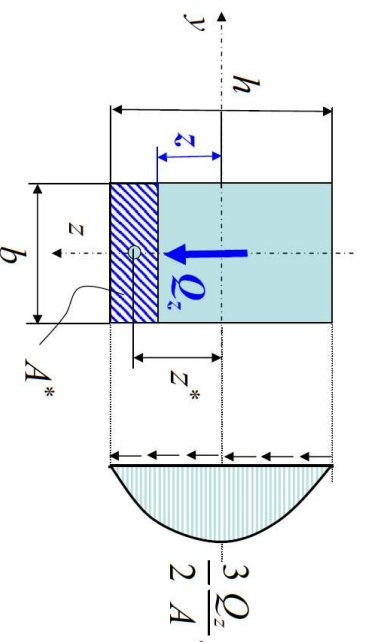
Joonis 1.26: Paindepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetkist.)

## Nihkepinge ehk lõikepinge

$$\max \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{A}$$

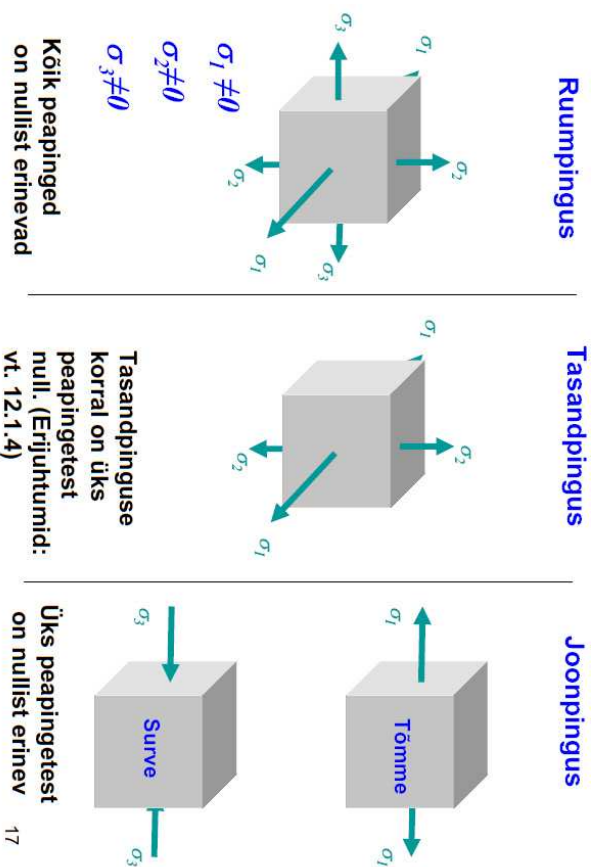
(1.28)



Joonis 1.27: Lõikepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetkist.)

### Pinguste liigid



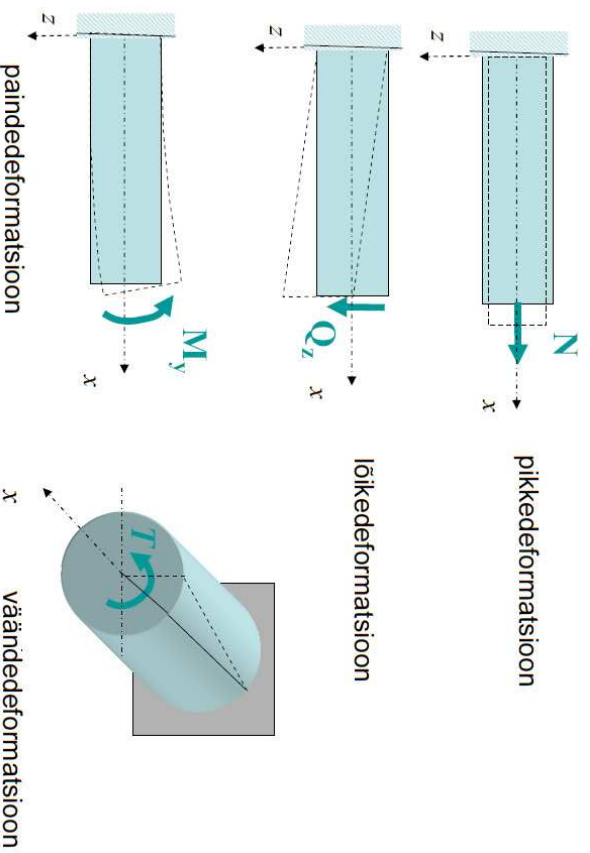
Joonis 1.28: Pinguste liigid

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

#### Varda põhideformatsioonid.

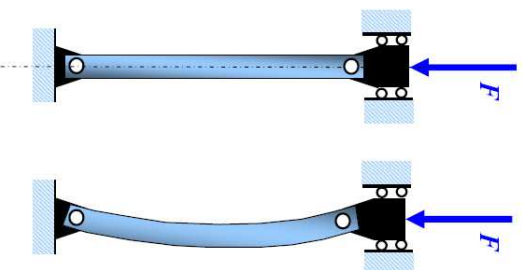
Erinevad sisejõud põhjustavad vardas erinevaid deformatsioone, siirdeid ja pöörideid.



Joonis 1.29: Varda põhideformatsioonid

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsistist.)

Surrutud sirge saleda varda stabiilsus.

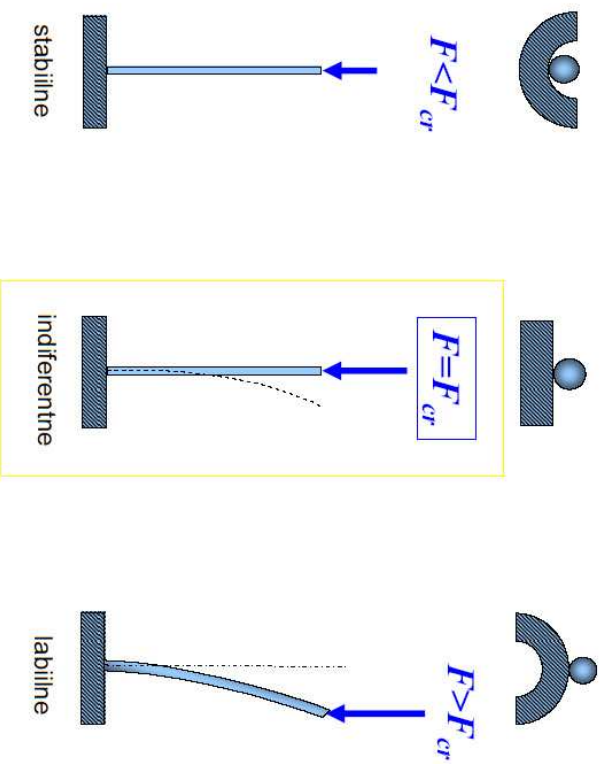


Joonis 1.30: Varda nõtkke ja stabiilsuse kadu

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengurakendusest.)

1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

Kriitiline jõud – vähim jõud, mille juures on võimalik stabiilsuse kadu.

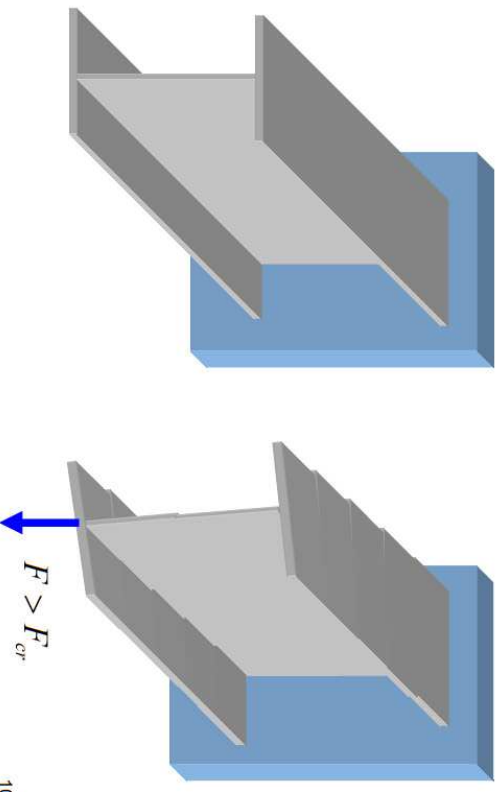


Joonis 1.31: Kriitiline jõud ja stabiilsuse kadu

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengurakendusest.)



### Stabiilsuse kadu paindel ja kiive



Joonis 1.32: Kiive

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhinõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

#### Dünaamiline koormus

- Inertsjõud, D'Alembert'i printsip, kvaasistaatilised ülesanded
- Võnkumine
- Löök

#### Alajaotuse 1.3 kokkuvõte

- Kuna tugevusõpetus põhineb lineaarsel elastusteoorial, siis on neil kahel ainel väga palju ühist — materjalid on lineaarselt elastsed, homogeenused, isotroopsed; kehtib Saint Venant'i printsip<sup>2</sup>, jne.
- Teisest küljest on tugevusõpetuse puhul tegu maksimaalselt lihtsustatud teooriaga — seega leiavad paljud probleemid lineaarses elastusteoorias käsitlemist vähem lihtsustatud kujul. Näiteks talade paine.
- Mõned järgnevates peatükikides uuritavad probleemid pole aga tildse tugevusõpetuse uurimisobjektiks, näiteks plaadid.

<sup>2</sup>Koormuse rakenduskohast piisavalt kaugel ei sõltu pinge koormuse iseloomust (rakendusviisist).

## 1.4 Elastusteooria ülesanded

*Elastusteooria põhieelained*ks on elastses kehas välismõjude toimel tekivate pingete ja deformatsioonide määramine.

- Elastusteooria meetodid
  - võimaldavad lahendada ülesandeid, mida pole tugevusõpetuse meetoditega võimalik lahendada;
  - võimaldavad hinnata tugevusõpetuses saadud lahendite täpsust.
- Käesolevas kursuses vaadeldakse
  - välismõjudena vaid välisjõudusid;
  - lineaarset ehk klassikalist elastusteooriat.
    - \* pingete ja deformatsioonide vahelised seosed on lineaarsed
    - \* siirded (ehk paigutised) on väikesed võrreldes kehade joonmootmetega ning suhtelised deformatsioonid (suhtelised pikenemised ja nihkenurgad) on väikesed võrreldes ühega.

---

### 1.5. Klassikalise elastusteooria põhieelused ja põhihüpoeesid

## 1.5 Klassikalise elastusteooria põhieelused ja põhihüpoeesid

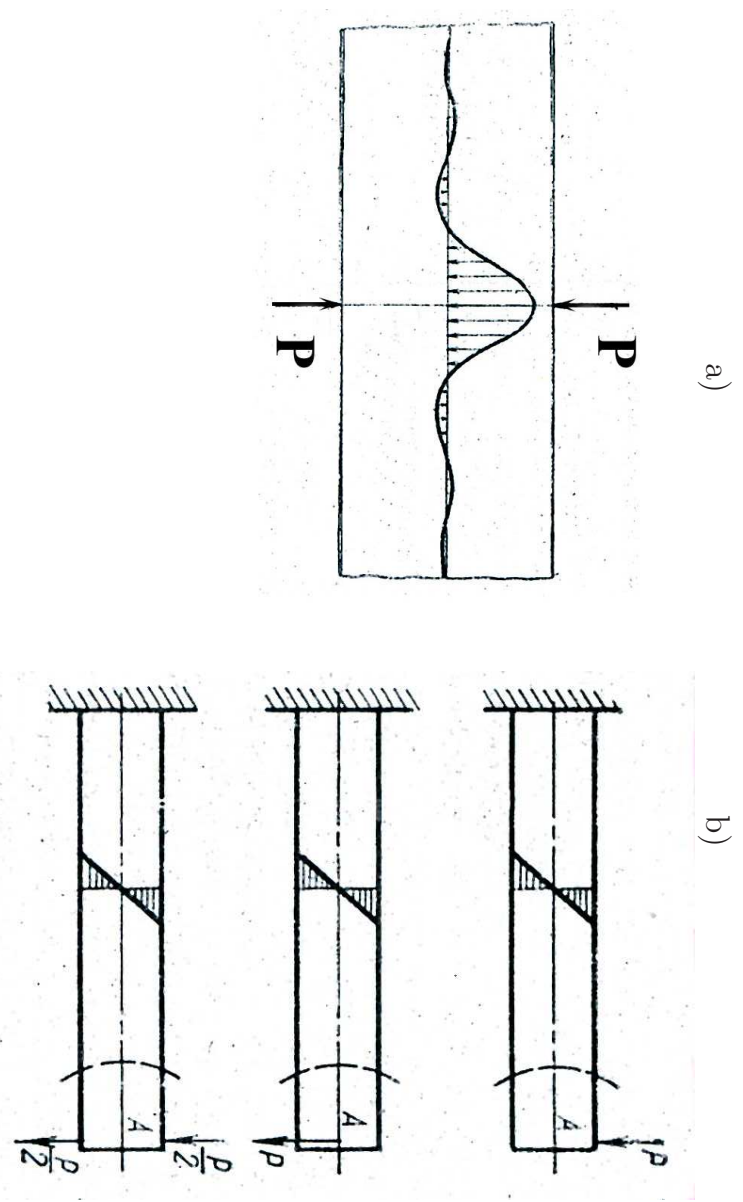
*Uurimisobjekt*: ideaalselt (täielikult) elastne keha.

- *Ideaalset elastne keha* taastab täielikult oma algse kuju ja mahu pärast välisjõudude mõju kõrvaldamist.
  - Defineeritakse nn. *algoteks*: välisjõudude puudumisel puuduvad kehas pinged ja deformatsioonid.

### *Hüpoteesid ja eeldused*

- *Pidevuse hüpotees*: eeldame, et uuritavad tahked kehad koosnevad ainest, mis täidab ruumi pidevalt
  - Keha mistahes mahus puuduvad tühimikud või katkevused.
- Eeldatakse, et ideaalselt elastne keha on *homogeenne*.
  - Pinge–deformatsiooni seosed on kõigis keha punktides samad.

- Eldatakse, et ideaalselt elastne keha on *isotroopne*.
  - Keha elastsed omadused on samad kõigis suundades.
- *Superpositsiooni printsiip* ehk *jõudude mõju sõltumatuse printsiip*.
  - Lineaarne teooria: lineaarsed seosed ja väikesed deformatsioonid
    - \* Selle asemel, et uurida jõusüsteemi tervikmõju kehale võib uurida iga üksikjõu mõju eraldi ja tulemused liita. Teisisõnu, lineaarses elastsusteoorias loetakse erinevate lahendite summa alati lahendiks.
- *Saint Venant'i printsiip*. Kaks sõnastust:
  1. Tasakaalus olevate jõudude rakendamise mingil väikesel keha osal kutsub esile vaid lokaalseid pingeid rakenduskoha lähimbruses (Joon. 1.33).
  2. Koormuse rakenduspunktiist piisavalt kaugel ei sõltu pinged oluliselt koormuse rakendusviisist, st. jaotusest keha pinnal .



Joonis 1.33: Saint Venant'i printsiip: a) kahe tasakaalus oleva jõu poolt põhjustatud normaalpingete epiüür; b) kolm erinevat jaotunud koormust, millel on sama peavektor.