

Peatükk 6

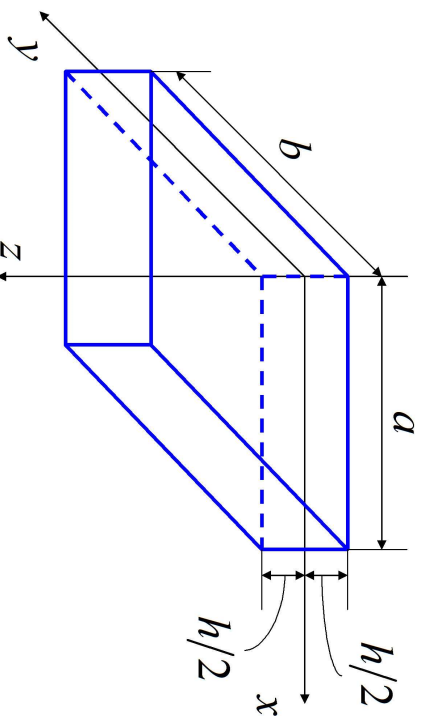
Õhukeste plaatide paine

6.1 Plaatide paindeteooria põhimõisted ja hüpoteesid

6.1. Plaatide paindeteooria põhimõisted ja hüpoteesid

240

Plaat on prismaatiline või silindriline keha, mille kõrgus on väike võrreldes teiste dimensioonidega.¹ Harilikult nimetame seda kõrgust *plaadi paksuseks* ja tähistame h . Käesolevas peatükis vaatleme ristkülikplaate, järgmises aga ka ümar- ja rõngasplaate.



Joonis 6.1: Plaadi mõõtmed ja koordinaattasandite valik.

¹Tihti defineeritakse plaat kui kooriku erijuht. *Koorik* on konstruktsioonelement, mille üks mõõde on teistega võrreldes väike. *Plaat* on koorik, mille kõverus on null, st. mida ümbritsevatest pindadest kaaks on paralleelsed tasandid.

Pinda, mis jagab plaadi paksuse kaheks võrdsesks osaks, nimetatakse plaadi *keskpinnaks*. Koordinaatteljed valime nii, et x ja y teljed on kesktasandil ning z telg on suunatud alla (vt. joonis 6.1). Plaadi laiuse tähistame a ja pikkuse b .

Plaadile mõjuva koormuse saab alati lahutada kaheks komponendiks.

- Plaadi keskpinnaga ristuv koormus ehk põikkoormus
 - Plaadi paine
- Plaadi keskpinna sihis mõjuv koormus
 - Stabiilsus — kriitiline koormus — mõlkumine

*6.1. Plaatide paindeteooria põhimõistest ja hüpoteesid***Plaatide liigitus.***Paksuse järgi.*

- Paksus võib olla nii konstantne kui muutuv.
- Õhukesed ja paksud. Eegi ja Poveruse² järgi loetakse õhukeseks plaati, mille lühema külje pikkus a on vähemalt viis korda suurem kui paksus h , st., $a/h \geq 5$, Ugurali³ järgi aga kui $a/h \geq 20$.

Materjali omaduste järgi.

- isotroopsed plaadid — metallplaadid
- anisotroopsed plaadid
 - ortotroopsed plaadid — vineer, ristsarrusega raudbetoonplaat (nõrgalt ortotroopne)

²R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967³A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

Painde iseloomu järvi.

- *Jäigad plaadid.* Kui plaadi maksimaalne läbipaine on võrreldes plaadi paksusega väike, siis võtavad enamuse väliskooormusest vastu paindemomendid ja põikjõud. Selliseid plaate nimetatakse jäikadeks. Metsaveere⁴ põhjal on väike läbipaine 10% paksusest, Eegi ja Poveruse⁵ põhjal 1/3 Ugurali⁶ põhjal aga 1/2.
- *Membraanid.* Kui läbipainded ületavad mitmekordselt (Eek & Poverus: 5 korda) plaadi paksuse, siis võtavad enamuse kooormusest vastu plaadi kesktasandis tekivad pikijõud — m. aheljõud. Selliseid plaate nimetatakse membraanideks.
- *Painduvad plaadid.* Plaat, mis pole ei jäigad ega membraanid nimetatakse painduvateks.

Jäikade plaatide puhul hüljatakse ahelpinged, membraanide puhul paindepinged. Painduvate plaatide korral tuleb aga arvesse võtta mõlemad. Kuna mak-

⁴J. Metsaveer, Plaatide arvutus ja tasandülesanne, Tallinn, 1987

⁵R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967

⁶A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

*6.1. Plaatide paindeteooria põhimõistest ja hüpoteesid**244*

simaalne läbipaine sõltub mõjuvast kooormusest, siis võib sama plaat töötada nii jäigana, painduvana kui membraanina.

Käesolevas kursuses vaatleme vaid õhukesi ühtlase paksusega isotroopseid jätku plaate. Sellise plaadi töö kooormuse vastuvõtmisel on paljuski sarnane tala tööle. Samas aga on sisejõudude ja toereaktsioonide leidmisel olulisi erinevusi.

Õhukeste jäikade plaatide paindeteoorias on kasutusel terve rida lihtsustavaid hüpoteese, mis on sarnased tugevusõpetuses kasutatavatele. Samas ei käsitleta plaate tugevusõpetuse vaid hoopis elastsusõpetuse raames ülesannete keerukuse tõttu.

Märkus: Paljud autorid ei kasutata jäiga ja painduva plaadi mõistet, vaid ütlevad, et esimesel juhul loetakse läbipainded väikeseks ning kasutatakse klassikalist plaatide teooriat. Teisel juhul aga on tegu lõplikele ehk suurtele läbipainetele vastava teooriaga.

Hüpoteesid

1. Plaadi keskpind ei pikene ega lühene vaid ainult paindub (kõverdub).
 - See viitab jäiga plaadi definitsioonile.
 - Kesktasandi punktide siirded on vaid z telje sihis, plaadi pinna sihis on siirded nullid.
2. Sirged, mis enne paindumist olid keskpinnaga risti, jäävad ka peale paindumist keskpinnaga ristuvateks sirgeteks.
 - Analoogia talade juures kasutatava ristlõigete tasandilisuse hüpoteesiga.
3. Paindumisel ei muutu plaadi mõtteliste kihtide vahelised kaugused paksuse sihis.
 - Plaadi keskpinna siire $w = w(x, y)$.
4. Plaadi paksuse sihilised normaalpinged hüljatakse väiksuse tõttu, st. $\sigma_z = 0$.

6.2. *Deformatsioonide avaldamine plaadi punkti siirete ja läbipainde kaudu.*

246

- Kuna plaat on õhuke, siis ei mõjuta see lihtsusstus oluliselt lahendit.
5. Koormus mõjub plaadi pinnaga risti ja on esitatud ruumjõuna:

$$Z(x, y, z) = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) p(x, y). \quad (6.1)$$

- Selline koormusseedus annab välispinnale $z = \pm 0, 5h$ nullise koormuse, plaadi keskpinna ühiku kohta aga summaarse koormuse

$$\int_{-h/2}^{h/2} Z(x, y, z) dz = \dots = p(x, y). \quad (6.2)$$

- Tavaliselt vaadeldaksegi plaadi keskpinnal mõjuvat koormust kujul $p(x, y)$.

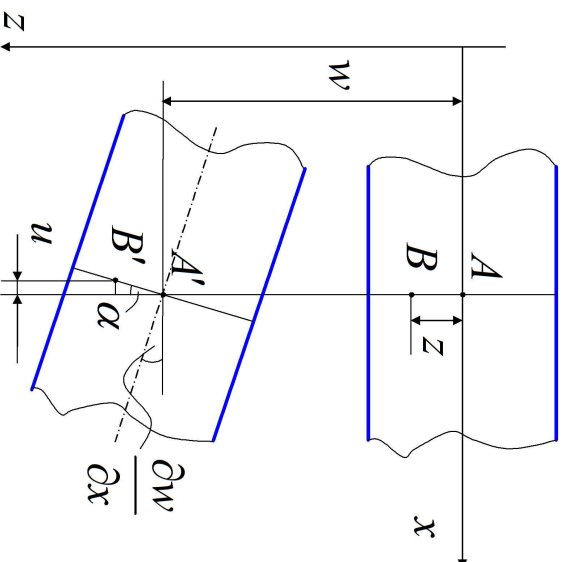
6.2 Deformatsioonide avaldamine plaadi punkti siirete ja läbipainde kaudu.

Plaadi kesktasandi punktide vertikaalsiiret $w(x, y)$ nimetatakse *läbipaindeks*.

Esimese kolme hüpoteesi põhjal on võimalik avaldada plaadi suvalise punkti

siirdekomponeendid u ja v läbipaande $w(x, y)$ kaudu.

Vaatleme plaadi keskpinna normaali punktide A ja B liikumist paindel (joonis 6.2) ja leiame siirdekomponeentide u ja w vahelise seose.



Joonis 6.2: Plaadi keskpinna normaali punktide A ja B liikumine paindel.

6.2. Deformatsioonide avaldamine plaadi punkti siirete ja läbipaande kaudu.

- Vastavalt tehtud hüpoteesidele saab keskpinna punkt A liikuda vaid vertikaalselt. Kesktasandi normaal peab aga jääma ka peale deformatsiooni risti keskpinnaga, seejuures $AB = A'B' = z = \text{const}$.
- Plaadi keskpind punktis A pöörduv nurga α võrra. Sama nurga võrra pöördub ka sirge AB .
 - Seega punkti B siire x telje suhtes $u = -z \sin \alpha$.
 - Kuna nurk α on väike, siis

$$\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (6.3)$$

- Analooiliselt saame siduda ka siirdekomponeendid v ja w . Kokkuvõttes oleme saanud valemid

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{ja} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6.4)$$

Cauchy seoste (3.6) ja valemite (6.4) põhjal

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.5)$$

6.3 Plaadi elastse pinnavaõrrand

Lähtume tasakaalu diferentsiaalvaõrranditest (2.6)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

- Diferentseerime esimest tasakaaluvaõrrandit x järgi, teist y järgi ja kolmandat z järgi.

6.3. Plaadi elastse pinnavaõrrand

250

- Arvestades nihkepingete paarsusseadust saame ellimineerida τ_{yz} ja τ_{xz} .
- Arvestades et $\sigma_z = X = Y = 0$ ja Z on antud avaldisega (6.1) saame lõpuks vaõrrandi

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = - \frac{z p(x, y)}{i}, \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \text{kus suurus} \\ i = \frac{h^3}{12} \end{aligned} \quad (6.7)$$

kujutab endast plaadi ristlõike inertsimomenti pikkusühiku kohta, st., inertsimomendi intensiivsust.

Selleks, et tuletada pingete ja läbipainete vahelised seosed kasutame Hooke'i seadust kujul

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad (6.8)$$

ning asendame viimasesse seosed (6.5). Tulemus on järgmine:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \end{cases} \quad (6.9)$$

Pannes viimased pingevaldised võrrandisse (6.6) saamegi plaadi elastse pinnu võrrandi

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (6.10)$$

Suurust

$$D = \frac{Ei}{1-\nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6.11)$$

nimetatakse *silindriliseks paindejätkuseks*. Suurust $E/(1-\nu^2)$ võib siinjuures nimetada *plaadi taandatud elastsusmooduliks*. Võrrand (6.10) on jällegi *biharmooniline võrrand*.

6.4. Sisejõud

252

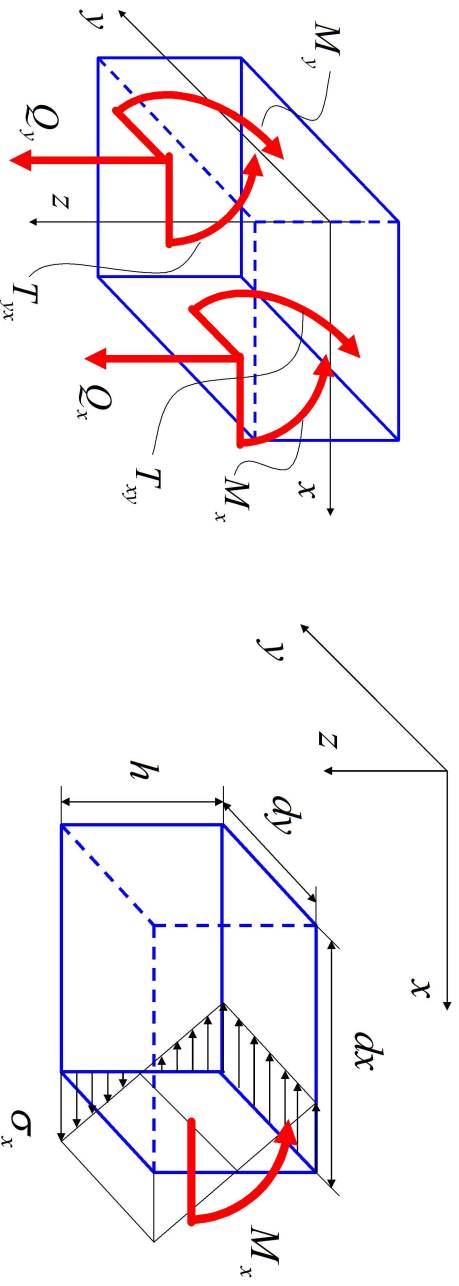
Plaadis mõjuvate pingete leidmiseks tuleb seega kõigepealt lahendada biharmooniline võrrand (6.10). Tulemusena saame plaadi läbipainde avaldise $w(x, y)$. Seejärel saame seoste (6.9) abil leida pinged σ_x , σ_y ja τ_{xy} . Nihkepingered τ_{yz} ja τ_{xz} määramiseks tuleb kasutada kahte esimest tasakaaluvõrrandit, kust saab avaldada osatuletised $\partial\tau_{xz}/\partial z$ ja $\partial\tau_{yz}/\partial z$. Peale integreerimist z järgi rajatingimustel $\tau_{xz}|_{z=\pm 0,5h} = \tau_{yz}|_{z=\pm 0,5h} = 0$ saame

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ \tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right). \end{cases} \quad (6.12)$$

6.4 Sisejõud

Talade korral mõisteti sisejõudusid kogu tala laiuse ulatuses, st., sisejõuks nimetati mingis ristlõikes mõjuvat summaarset jõudu või momenti. Plaatide korral on kasutused teistsugune lähenemine. Siin nimetatakse sisejõuks hoopis

sisejõu intensiivsust. Teisisõnu, painde- ja väändmomentide ning põikjõu asemel vaadeldakse vastavaid suurusi pikkusühiku kohta.



Joonis 6.3: Plaadi sisejõud.

Taladest erinev on ka paindemomentide ja põikjõu tähistus (joonis 6.3). Plaatide puhul on kombeks tähistada pinge σ_x poolt põhjustatud paindemomenti M_x ja σ_y poolt põhjustatud M_y . Pingest τ_{xz} ja τ_{yz} põhjustatud põikjõudu- sid tähistatakse vastavalt Q_x ja Q_y . Seega viitab plaatide korral painde- momendi ja põikjõu tähistes olev indeks vaadeldava ristloike normaali sibile.

6.4. Sisejõud

254

Väändmomentid $T_{xy} = T_{yx}$ on põhjustatud nihkepingetest $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Painde- ja väändmomentid. Momentide arvutamine käib tavapärasel moel ning arvestades avaldisi (6.9) saame painde- ja väändmomentid esitada läbipainde w kaudu:

$$\begin{cases} M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_x dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_y dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ T_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{xy} dz = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (6.13)$$

Põikjõudude jaoks saame avaldised

$$\begin{cases} Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right). \end{cases} \quad (6.14)$$

Märgireeglid kattuvad talade juures kasutatavatega. Positiivne paindemoment põhjustab positiivsete kihtide ($z > 0$) tõmmet. Positiivne põikjõud mõjub positiivsel pinnal z telje positiivses suunas.

Vastupidised seosed:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \sigma_x = \frac{M_x}{I} z, & \sigma_y = \frac{M_y}{I} z, & \tau_{xy} = \frac{T_{xy}}{I} z, \\ \tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right), & \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \end{array} \right. \quad (6.15)$$

On selge, et paindepinged σ_x ja σ_y ning nihkepinge (väändepinge) τ_{xy} muutuvad ristlõikes lineaarse seaduse põhjal ning omavad ekstreemseid väärtusi kohal $z = \pm 0, 5h$. Nihkepinged τ_{xz} ja τ_{yz} muutuvad aga ruutparaboolse seduse järgi omades maksimumi kohal $z = 0$.

6.4.1. Toereaktsioonid

256

6.4.1 Toereaktsioonid

Talade korral on reaktsioonjõud arvuliselt võrdsed põikjõuga toe kõrval. Plaatide puhul on olukord aga pisut komplitseeritum, sest reaktsioonjõud R_x (mõjub x telje sihilise normaaliga pinnal) ja R_y peavad tasakaalustama ka plaadis tekkinud väändemomendi mõju ja näitaks reaktsioonjõud

$$R_x = Q_x + Q'_x, \quad (6.16)$$

kus Q'_x on väändemomendi poolt tekitatud nn. täiendav põikjõud. Eelmise valemi põhjal on selge, et analoogiliselt põikjõuga, esitatakse ka reaktsioonjõud R_x ja R_y plaadi serva pikkusühiku kohta.

Selgituseks vaatleme kahte kõrvutist võrdse laiussega dy elementaarriistkülikut ristlõikes, mille normaal on x telje sihiline (joonis loengus). Parempoolsel ristkülikul mõjub summaarne väändemoment $T_{xy} dy$ ja vasakpoolsel ($T_{xy} + (\partial T_{xy} / \partial y) dy$). Asendame need väändemendid jõupaaridega ($F_x, -F_x$) ja ($F'_x, -F'_x$), kus $F_x = T_{xy}$ ja $F'_x = T_{xy} + (\partial T_{xy} / \partial y) dy$. On selge, et kahe elementaarriistküliku ühisel serval on nii tekkinud täiendav põikjõud $dF = F'_x - F_x = (\partial T_{xy} / \partial y) dy$. Selline täiendav põikjõud tekib igas elementaarriistkülikus laiu-

✓
pin-
gete
epüüri

sega dy . Tähistame selle jõu intensiivsuse $Q'_x = dF/dy = \partial T_{xy}/\partial y$. Korrates sama protseduuri y telje sihilise normaaliga ristlõike jaoks saame täiendava põikjõu intensiivsusega $Q'_y = dF/dx = \partial T_{xy}/\partial x$. Reaktsioonjõud on seega

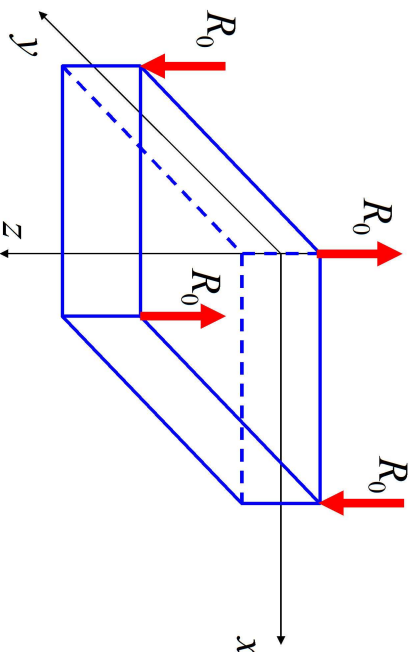
$$\begin{cases} R_x = Q_x + Q'_x = Q_x + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ R_y = Q_y + Q'_y = Q_y + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{cases} \quad (6.17)$$

Sellisel sisse toodud jõupaarid annavad aga lisaks mööda külgi jaotunud reaktsioonjõule (reaktsioonjõu intensiivsusele) veel täiendavad koondatud reaktsioonjõud

$$R_o = T_{xy} + T_{yx} = 2T_{xy} \quad (6.18)$$

plaadi nurkadesse. Vastavate reaktsioonjõudude positiivsed suunad on näidatud joonisel 6.4. Nende koondatud reaktsioonide sissetoomise vajadus tuleneb faktist, et plaadi nurgapunktides puuduvad vaadeldud elementaar-ristkülikutel tasakaalustavad naaberristkülikud.

6.5. Rajatingimused

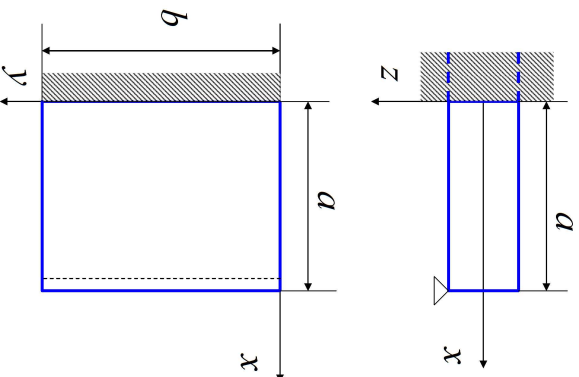


Joonis 6.4: Reaktsioonjõudude positiivsed suunad.

6.5 Rajatingimused

Biharmonilise võrrandi lahendamiseks on vaja teada vajalikul hulgal *raja- ehk serva- ehk ääretingimusi*. Kuna võrrandi järk on mõlema koordinaadi (x ja y) järgi neli, siis on vaja mõlema koordinaadi järgi ka neli rajatingimust. Teisisõnu, iga plaadi serva jaoks kaks tingimust. Füüsikaliselt peavad need tingimused vastama plaadi serva kinnituvile.

Kolm tüüpilist plaadi serva kinnitustviisi ja vastavad tähistused on esitatud joonisel 6.5. Serv $x = 0$ on järgalt kinnitatud, serv $x = a$ vabalt toetatud (liigendiga kinnitatud) ning servad $y = 0$ ja $y = b$ vabad.



Joonis 6.5: Plaadi serva kinnitustviisid ja vastavad tähistused.

6.5. Rajatingimused

Vaatleme järgnevalt nelja juhtu.

1. Järgalt kinnitatud serv ehk kinnisserv. Sellise kinnitustviisi korral ei saa plaadi serv omandada deformatsiooni käigus ei pöörideid ega siirdeid ja ääretingimused on esitatavad kujul

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{ja/või} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (6.19)$$

2. Vabalt toetatud serv või liigendiga kinnitatud serv. Antud juhul ei saa plaadi servapunktid siirdeid, kui pööride on lubatud. Sellisel toetatud plaadi serv ei võta vastu momente ja ääretingimused saavad kuju

$$w = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{ja/või} \quad M_y = 0. \quad (6.20)$$

Avaldise (6.13) põhjal $M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$. Kuna mööda sirget serva tuletis $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ (sirge teine tuletis on alati null), siis saavad ääretingimused kuju (kasutades M_y jaoks analoogset lähenemist)

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ja/või} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (6.21)$$

Siin valem (6.21)₂ vastab tingimusele $M_x = 0$ ja (6.21)₃ vastab tingimusele $M_y = 0$.

3. Vaba serv. Sellise serva punktid võivad saada nii siirdeid kui pööride. Arvestades ääretingimuste füüsikalist sisu peavad nii paindemoment kui reaktsioonjõud olema vabas servas nullid.

$$R_x = 0 \quad \text{ning} \quad M_x = 0 \quad \text{ja/või} \quad R_y = 0 \quad \text{ning} \quad M_y = 0. \quad (6.22)$$

Arvestades reaktsioonjõudude ja paindemomentide avaldise saame viimase esitada kujul

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \text{ja/või} & \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Kuna algne sirge vaba serv ei pruugi deformeerudes jääda sirgeks, siis siin pole võimalik enam täiendavaid lihtsustusi teha.

6.5. Rajatingimused

262

4. Sümmetriatelge. Kui plaat ja koormus omavad tihist sümmetriatelge ja toetusviis on samuti sümmetriline, siis on ka läbipaine w sümmetriline. Sel juhul piisab kui lahendada plaadi võrrand vaid ühel pool sümmetriatelge. Sümmetriatelge ennast aga vaadelda kui tinglikku (virtuaalset) serva, kus rajatingimused juhul kui sümmetriateljeks on x ja/või y telg avalduvad kujul

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad Q_x = 0 \quad \text{ja/või} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad Q_y = 0. \quad (6.24)$$

Arvestades põikjõu avaldise (6.14) saame viimastele kujul

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{ja/või} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0. \quad (6.25)$$