6.6 Ühtlaselt koormatud plaatide lihtsamad paindeülesanded

6.6.1 Silindriline paine

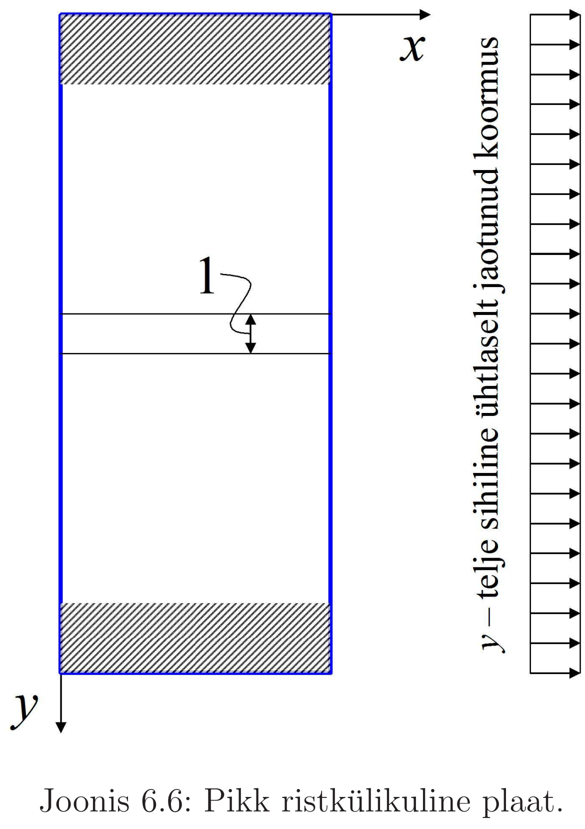
Kui ristkülikuline plaat on «pika ristküliku» kujuline ja koormus on pikkade külgede sihis konstantne, siis plaadi keskosa (vt. joonis 6.6) elstne pind on silindrilise kujuga (silindri moodustaja on paralleelne y teljega). Teisisõnu, plaadi keskosas siirded $w = w(x)$. Sellist plaadi deformatsiooni nimetatakse *silindriliseks paindeks.*

Olgu plaat välja venitatud y telje sihis ja koormus ühtlaselt jaotunud üle kogu plaadi pinna, st., $p(x, y) = p = const.$ (joon. 6.6). Plaadi elastse pinna võrrand (6.10) saab sel juhul kuju

$$D \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = p. \tag{6.26}$$

See võrrand on väga sarnane tugevusõpetusest tuntud tala elastse joone võrrandiga

$$EI \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = p. \tag{6.27}$$



Joonis 6.6: Pikk ristkülikuline plaat.

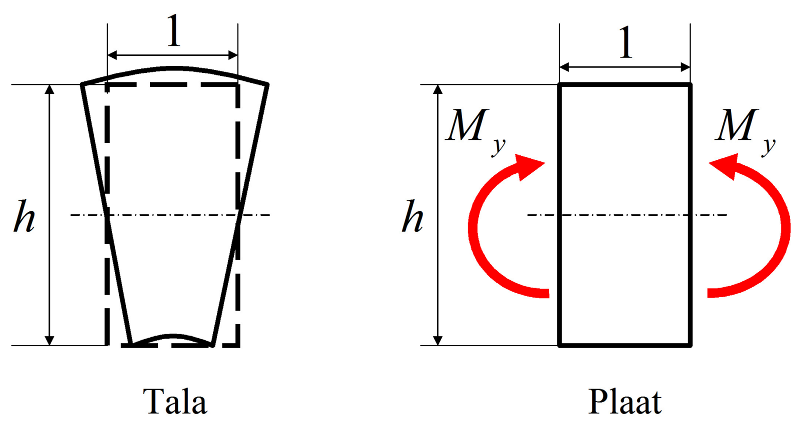
Läbipainete võrdlemiseks tuleb võrrelda plaadi paindejäikust $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ühikulise laiusega tala[7] paindejäikusega $EI = Eh^3/12$. Kuna plaadi paindejäikus on tala omast suurem, siis on plaadi läbipaine tala omast väiksem.

Sisejõud määratakse seostest (6.13) ja (6.14). Kuna $w = w(x)$, siis ka paindemomendid ja põikjõud on vaid koordinaadi x funktsioonid.

$$M_x = -D\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}, \qquad M_y = -\nu D\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = \nu M_x. \tag{6.28}$$

Võrreldes taladega tekivad seega plaadis ka paindemomendid M_y. Talas neid ei teki kuna tala ristlõiked saavad vabalt deformeeruda (joon. 6.7). On ilmselge, et paindemomendid M_y põhjustavad pingeid σ_y, mida tuleb arvesse võtta näiteks raudbetoonplaatide sarrustamisel: plaat tuleb kindlasti sarrustada ka pikisuunas.

[7] Plaadi koormus on antud pinna ühiku kohta, talal aga pikkusühiku kohta



Joonis 6.7: Paindemomendid M_y.

6.6.2 Ühtlaselt koormatud jäigalt kinnitatud elliptiline plaat

See on üks vähestest plaadi painde ülesannetest, millele on võimalik leida analüütiline (täpne) lahend.

Vaatleme ellpitilist plaati (joon. 6.8), millele koordinaatteljed x ja y on sümmeetriatelgedeks. Sellisel juhul saame elliptilise plaadi kontuuri võrrandile kuju

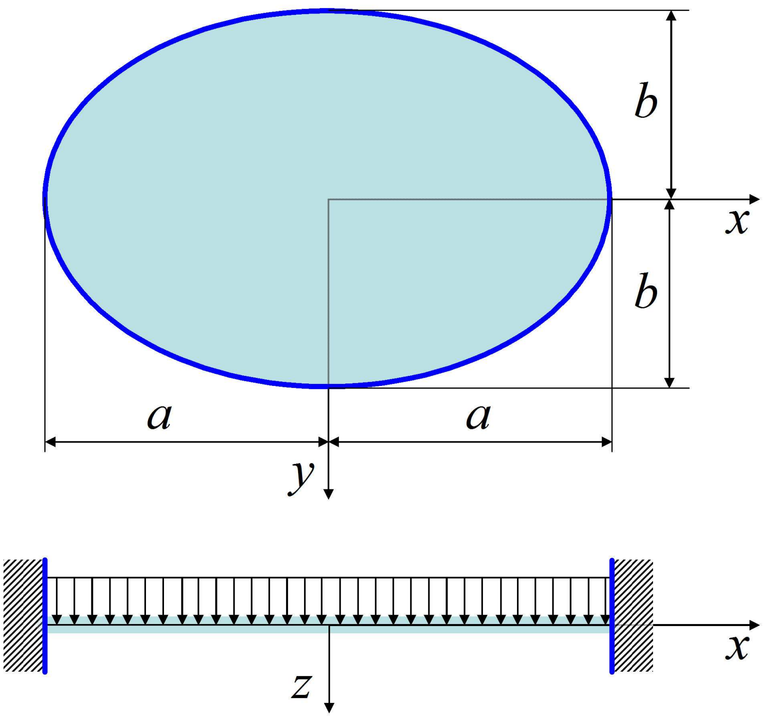
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6.29}$$

Näitame, et plaadi elastse pinna (keskpinna vertikaasiirete) avaldis kujul

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2, \tag{6.30}$$

kus w_0 on plaadi läbipaine koordinaatide alguses, rahuldab plaadi elastse pinna (diferentsiaal)võrrandit (6.10)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}$$



Joonis 6.8: Elliptiline plaat.

ja ääretingimusi jäigalt kinnitatud servas (6.19)

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \tag{6.31}$$

kus n on plaadi kontuuri normaal. On ilmselge, et plaadi kontuuril on esimene neist rahuldatud. Kuna plaadi kontuuril tuletised $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$, siis on tuletised suvalises suunas, kaasa arvatud normaal n, nullid ja ääretingimused (6.31) rahuldatud.

Nüüd leiame avaldisest (6.30) vajalikud osatuletised, paneme need elastse pinna võrrandisse (6.10) ja avaldame läbipande plaadi keskel —

$$w_0 = \frac{p}{D\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2b^2} + \frac{24}{b^4}\right)}. \tag{6.32}$$

Seega saab plaadi elastse pinna avaldis (6.30) kuju

$$w = \frac{p}{D} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2b^2} + \frac{24}{b^4}\right)}. \tag{6.33}$$

Kuna avaldis (6.33) rahuldab nii elastse pinna võrrandit kui ääretingimusi, siis on ta vaadeldava ülesande täpseks lahendiks.

Edasi on võimalik leida paindemomentide avaldised, kasutades valemeid (6.13)

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \\ \quad = \dfrac{pa^2}{6 + 4\frac{a^2}{b^2} + 6\frac{a^4}{b^4}} \left[\left(1 - 3\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right) + \nu \dfrac{a^2}{b^2}\left(1 - 3\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2}\right)\right], \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \\ \quad = \dfrac{pb^2}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}} \left[\left(1 - 3\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2}\right) + \nu \dfrac{b^2}{a^2}\left(1 - 3\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)\right]. \end{cases} \tag{6.34}$$

Plaadi keskel, kus $x = y = 0$ saavad paindemomendid seega väärtuse

$$M_x = \frac{pa^2\left(1 + \nu\frac{a^2}{b^2}\right)}{6 + 4\frac{a^2}{b^2} + 6\frac{a^4}{b^4}}, \qquad M_y = \frac{pb^2\left(1 + \nu\frac{b^2}{a^2}\right)}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}}. \tag{6.35}$$

Vaadeldava kinnitusviisi tõttu on plaadi servas paindemomendid nullist erinevad. Eeldusel, et $a > b$ saame maksimaalse momendi plaadi servas kohal $x = 0$, $y = \pm b$:

$$\max M_k = -\frac{2pb^2}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}}. \tag{6.36}$$

Erijuhul $a = b = r$ saame ellipsist ringi, st., elliptilise plaadi asemel vaatleme ringikujulist plaati ehk ümarplaati, mille korral momendid plaadi keskel ja servas saavad väärtuse

$$M_0 = \frac{pr^2}{16}(1 + \nu), \qquad M_k = -\frac{pr^2}{8}. \tag{6.37}$$

Et saada maksimaalset paindepinget plaadi ristlõikes, st., $\sigma(\pm h/2)$ tuleb saadud momendiavaldised jagada vastupanumomendiga $W = h^2/3$.

6.7 Elastse pinna võrrandi lahendamine ristkülikulise plaadi korral

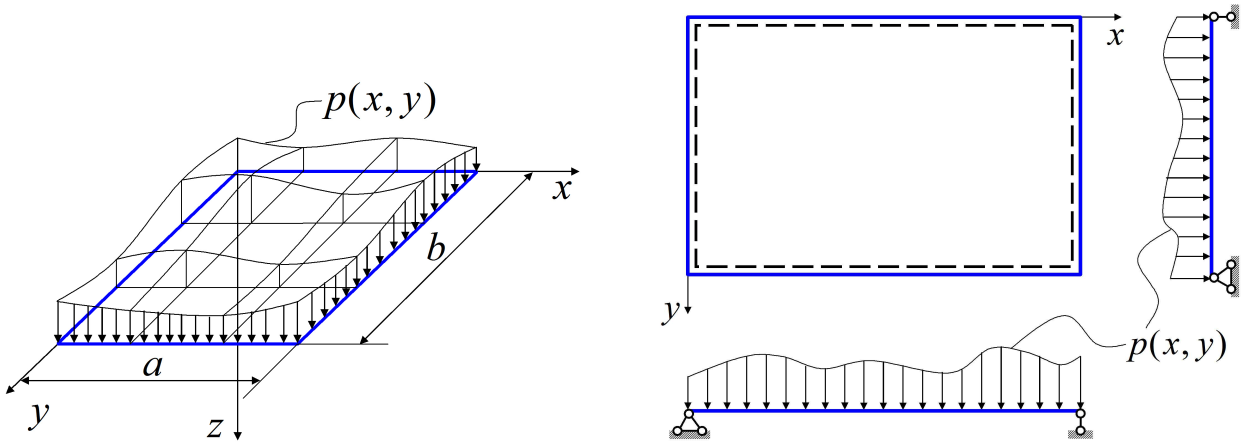
Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tuleb üldjuhul kasutada ligikaudseid meetodeid. Selliseid meetodeid on välja töötatud suhteliselt palju. järgmistes peatükkides vaatleme neist mõningaid.

6.7.1 Navier' meetod — lahendus kahekordsetes trigonomeetrilistes ridades

Vaatleme kõikidest servadest vabalt toetatud ristkülikplaati, mis on koormatud meelevaldse ristkoormusega $p(x, y)$. Vabalt toetatud plaadi elastset pinda saab kirjeldada kahekordse trigonomeetrilise rea abil:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.38}$$

Selle rea iga liige rahuldab ääretingimusi (6.21)



Joonis 6.9: Vabalt toetatud ristkülikplaat.

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \tag{6.39}$$

seega ka kogu rea puhul on ääretingimused rahuldatud.

Plaadile rakendatud koormus arendatakse Fourier ritta, st.

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.40}$$

Tegurid B_{mn} leitakse matemaatilisest analüüsist tuntud valemite abil

$$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy. \tag{6.41}$$

Järgmise sammuna tuleb siire w ja koormus p asendada plaadi elastse pinna võrrandisse (6.10):

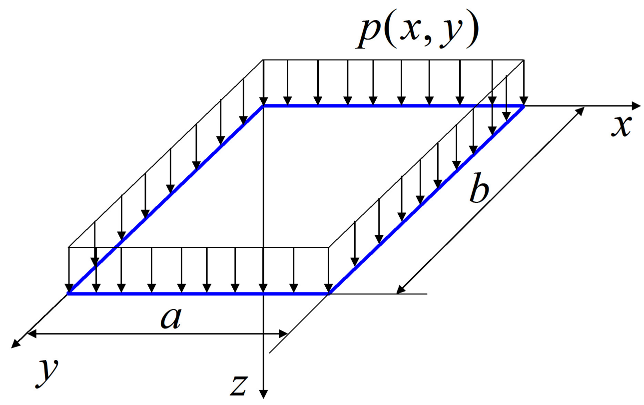
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} =$$
$$= \frac{1}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.42}$$

Kuna viimane võrrand peab kehtima iga m ja n korral, siis

$$C_{mn} = \frac{B_{mn}}{\pi^4 D\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]^2}. \tag{6.43}$$

Kokku oleme saanud plaadi elastse pinna jaoks avaldise

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{mn}}{\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.44}$$



Joonis 6.10: Ühtlaselt koormatud ristkülikplaat.

Ühtlaselt jaotatud koormuse juht. Elastse pinna avaldise (6.44) rakendamise näitena vaatleme ühtlaselt koormatud plaati. Sellisel juhul kordajad

$$B_{mn} = \frac{4p}{ab}\int_0^a \int_0^b \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy. \tag{6.45}$$

Kuna integraal

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}dx = \begin{cases} 2a/m\pi, & \text{kui} \quad m = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & \text{kui} \quad m = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \tag{6.46}$$

siis

$$B_{mn} = \frac{4p}{ab}\frac{2a}{m\pi}\frac{2b}{n\pi} = \frac{16p}{\pi^2 mn}, \qquad m, n, = 1, 3, 5, \ldots. \tag{6.47}$$

Elastse pinna avaldis saab antud juhul kuju

$$w(x,y) = \frac{16p}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{mn\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.48}$$

Kui tähistada plaadi külgede pikkuste suhe $b/a = \beta$ (s.t. asendame $b = a\beta$), siis saame viimasele anda kasutamiseks mugavama kuju

$$w(x,y) = \frac{16pa^4}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{mn\left[m^2 + (n/\beta)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a\beta}. \tag{6.49}$$

Sisejõudude leidmiseks tuleb viimasest avaldisest võtta piisaval arvul osatuletisi ning kasutada valemeid (6.13) ja (6.14):

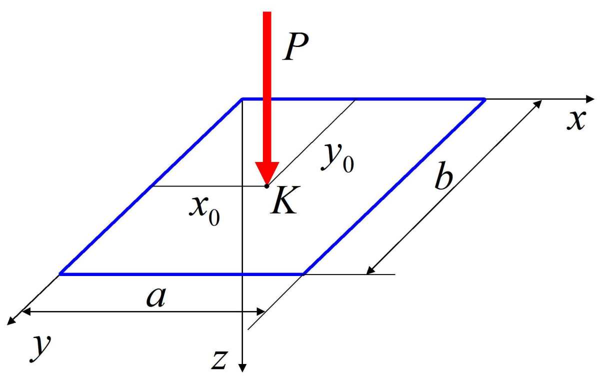
$$
\left\{
\begin{aligned}
M_x &= \frac{16pa^2}{\pi^4}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{m^2+\nu(n/\beta)^2}{mn\left[m^2+(n/\beta)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a\beta},\\
M_y &= \frac{16pa^2}{\pi^4}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{\nu m^2+(n/\beta)^2}{mn\left[m^2+(n/\beta)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a\beta},\\
T_{xy} &= -\frac{16(1-\nu)pa^2}{\pi^4\beta}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{\left[m^2+(n/\beta)^2\right]^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a\beta},\\
Q_x &= \frac{16pa}{\pi^3}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n\left[m^2+(n/\beta)^2\right]}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a\beta},\\
Q_y &= \frac{16pa}{\pi^3\beta}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{m\left[m^2+(n/\beta)^2\right]}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a\beta}.
\end{aligned}
\right.
\tag{6.50}
$$

Kui on vaja leida toereaktsioonid, siis tuleb kasutada valemeid (6.17) ja (6.18).

Et välja selgitada, mitu liiget ülaltoodud trigonomeetrilistes ridades tuleb

võtta, tuleb uurida ridade koonduvust. Selgub, et kõige kiiremini koondub läbipainde avaldis (6.49). Pisut aeglasemalt koonduvad momentide avaldised ja veelgi aeglasemalt põikjõu ja toereaktsioonide avaldised.

Koondatud jõu juht. Olgu koondatud jõud P rakendatud plaadi punktis



Joonis 6.11: Koondatud jõuga koormatud ristkülikplaat.

K koordinaatidega x_0, y_0. Valemite tuletamiseks eeldame, et see jõud on jaotunud lõpmata väikesele pinnale $dxdy$ punkti K ümbruses:

$$p(x,y)=\frac{P}{dxdy}. \tag{6.51}$$

Tegurid B_{mn} leitakse valemi (6.41) abil. Siin esineva kahekordse integraali arvutamisel tuleb arvestada, et see integraal on null kõikjal peale punkti K, kus ta omab väärtust

$$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy = \frac{4P}{ab}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}. \tag{6.52}$$

Kasutades nüüd valemit (6.44) saame avaldise

$$w(x,y) = \frac{4P}{Dab\pi^4}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}}{\left[(m/a)^2+(n/b)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.53}$$

Teades läbipainet, saame leida sise- ja reaktsioonjõud kasutades vastavaid avaldisi (6.13), (6.14), (6.17) ja (6.18).

Kuna rida (6.53) koondub aeglasemalt kui rida (6.49) ning tema abil saadud sise- ja reaktsioonjõude esitavad read aeglasemalt kui ühtlaselt jaotatud koormusele vastavad read, siis tuleb koondatud jõudude puhul olla ettevaatlik. Teisisõnu, aktsepteeritava tulemuse saamiseks tuleb siin valida tunduvalt pikemad read kui ühtlaselt jaotatud koormuse korral.

Näide. Vaatleme ruutplaati, st. $b/a = \beta = 1$, millel Poissoni tegur $\nu = 0,3$ ja millele mõjub ühtlaselt jaotunud koormus $p(x,y) = p$. Leiame plaadi läbipainde, sisejõud ja toereaktsioonid mõnedes iseloomulikes punktides piirdudes vaid trigonomeetriliste ridade nelja esimese liikmega, st., $m, n = 1, 3$.

Läbipaine plaadi keskel, st. punktis $x = 0,5a$ ja $y = 0,5b = 0,5a$.
Kasutame valemit (6.49). Vaja on leida järgmised suurused:

- $\sin(m\pi x/a), \ldots$
- $1/\left\{mn\left[m^2+(n/\beta)^2\right]^2\right\}$, $m, n = 1, 3$
- w avaldis arvestades, et $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$.

Tulemusena saame

$$w = 0,0443pa^4/Eh^3. \tag{6.54}$$

Paindemomendid plaadi keskel. Analoogiline protseduur annab tulemuseks

$$M_x = M_y = 0,0470pa^2. \tag{6.55}$$

Väändemoment plaadi nurgas $x = y = 0$ avaldub kujul

$$T_{xy} = -0,0315pa^2, \tag{6.56}$$

ning *põikjõud ja toereaktsioon külje $x = 0$ keskel*

$$Q_x = 0,28pa; \qquad R_x = 0,36pa. \tag{6.57}$$

- Positiivsed paindemomendid viitavad sellele, et plaadi alumine pool on tõmmatud.
- Vastavalt valemile (6.18) põhjustab väändemoment plaadi nurkades nn. täiendava koondatud reaktsioonjõu $R_o = 2T_{xy} = -0,0630pa^2$. Kuna nurgas $x = y = 0$ on R_o positiivne suund üles (vt. vastavat joonist), siis antud juhul on R_o suunatud alla. See omakorda tähendab seda, et plaadi nurk püüab üles tõusta.
- Küljel $x = 0$ (välisnormaal on suunatud x-telje negatiivses suunas) on positiivsed Q_x ja R_x suunatud üles, st. z telje negatiivses suunas.

Tabelite kasutamisest. Samasugused arvutused saab läbi viia ka ühest erinevate β väärtuste jaoks ja suuremate liikmete arvuga ridade jaoks. Tulemused erinevad eeltoodud näitest vaid kordajate väärtuste poolest. Seega saab plaatide arvutamisel kasutatavatele valemitele (mis esitavad läbipaindeid, sisejõudusid jne.) anda järgmise kuju:
läbipaine ja paindemomendid plaadi keskel

$$w = k_1 \frac{pa^4}{Eh^3}; \qquad M_x = k_2 pa^2; \qquad M_y = k_3 pa^2; \tag{6.58}$$

põikjõud ja toereaktsioonid pikema külje keskel

$$Q_x = k_4 pa; \qquad R_x = k_6 pa; \tag{6.59}$$

põikjõud ja toereaktsioonid lühema külje keskel

$$Q_y = k_5 pa; \qquad R_y = k_7 pa; \tag{6.60}$$

koondatud reaktsioonjõud plaadi nurkades

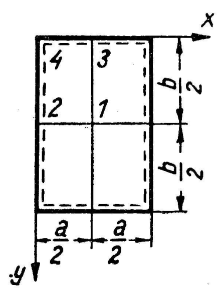
$$R_o = k_8 pab. \tag{6.61}$$

Kuna Poissoni teguri fikseeritud väärtuse (näiteks $\nu = 0,3$) korral sõltuvad konstantide $k_1, \ldots, k_8$ väärtused vaid suhtest β, siis on mõistlik koondada need konstantide väärtused tabelisse, eeldades seejuures, et $b > a$.

Äsjavaadeldud näite korral on konstantidel tabeli 6.1 põhjal järgmised väärtused: $k_1 = 0,0443$, $k_2 = 0,0479$, $k_3 = 0,0479$, $k_4 = 0,338$, $k_5 = 0,338$, $k_6 = 0,420$, $k_7 = 0,420$ ja $k_8 = 0,065$. Seega on näha, et läbipainde ja paindemomentide leidmisel piisabki vaid neljast esimesest rea liikmest (viga jääb alla 2%), kuid näiteks põikjõu korral oleks vaja rohkem liikmeid.

Taolised tabelid on koostatud ka teiste kinnitustingimuste ja koormusskeemide jaoks. Vastavalt ääretingimustele on seejuures kasutatud ka Navier meetodist erinevaid meetodeid. Järgnevalt on esitatud kuus tabelit, mille põhjal on võimalik arvutada läbipaindeid, sise- ja reaktsioonjõudusid ühtlasele koormusele allutatud ristkülikulise plaadi jaoks. Tabelid pärinevad õpikust «R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967 ».

Vabalt toetatud servadega plaat



$w^{(1)} = k_1 \dfrac{qa^4}{Eh^3}$ $\quad Q_x^{(2)} = k_4 qa$

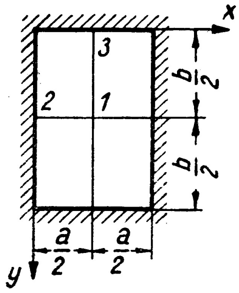
$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$ $\quad Q_y^{(3)} = k_5 qa$

$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$ $\quad R_x^{(2)} = k_6 qa$

$P_R = k_8 qab$ $\quad R_y^{(3)} = k_7 qa$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,0530	0,0554	0,0493	0,360	0,347	0,440	0,440	0,070
1,2	0,0616	0,0627	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453	0,074
1,3	0,0697	0,0694	0,0503	0,397	0,357	0,468	0,464	0,079
1,4	0,0770	0,0755	0,0502	0,411	0,361	0,478	0,471	0,083
1,5	0,0843	0,0812	0,0498	0,424	0,363	0,486	0,480	0,085
1,6	0,0906	0,0862	0,0492	0,435	0,365	0,491	0,485	0,086
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488	0,088
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491	0,090
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494	0,091
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496	0,092
3,0	0,1336	0,1189	0,0406	0,493	0,372	0,505	0,498	0,093
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500	0,094
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500	0,095
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500	0,095

Tabel 6.1: NB! Tabeli q on meil p ja tabeli P_R on meil R_0.



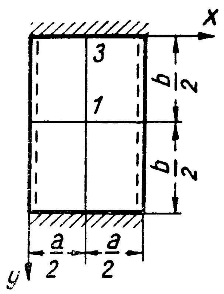
$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$
$$M_x^{(2)} = -k_4 qa^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_5 qa^2$$
$$Q_x^{(2)} = k_6 qa$$
$$Q_y^{(3)} = k_7 qa$$
$$R_x^{(2)} = k_8 qa$$
$$R_y^{(3)} = k_9 qa$$

Jäigalt kinnitatud servadega plaat

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1,0	0,0138	0,0231	0,0231	0,0513	0,0513	0,452	0,452	0,440	0,440
1,1	0,0165	0,0264	0,0231	0,0581	0,0538	0,448	0,412	0,473	0,450
1,2	0,0191	0,0299	0,0228	0,0639	0,0554	0,471	0,381	0,493	0,457
1,3	0,0210	0,0327	0,0222	0,0687	0,0563	0,491	0,352	0,505	0,462
1,4	0,0227	0,0349	0,0212	0,0726	0,0568	0,505	0,327	0,510	0,464
1,5	0,0241	0,0368	0,0203	0,0757	0,0570	0,517	0,305	0,515	0,465
1,6	0,0251	0,0381	0,0193	0,0780	0,0571	—	—	—	—
1,7	0,0260	0,0392	0,0182	0,0799	0,0571	—	—	—	—
1,8	0,0267	0,0401	0,0174	0,0812	0,0571	—	—	—	—
1,9	0,0272	0,0407	0,0165	0,0822	0,0571	—	—	—	—
2,0	0,0276	0,0412	0,0158	0,0829	0,0571	—	—	—	—
∞	0,0284	0,0417	0,0125	0,0833	0,0571	—	—	0,500	0,465

Tabel 6.2: NB! Tabeli q on meil p.

Kahel vastasserval vabalt toetatud, kahel jäigalt kinnitatud plaat



Kui $a \geqslant b$:

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qb^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qb^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qb^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_4 qb^2$$

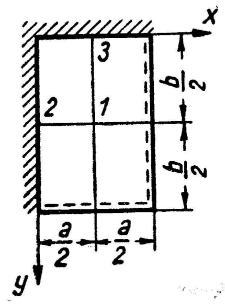
Kui $a \leqslant b$:

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_4 qa^2$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0,0284	0,0125	0,0417	0,0833
1/2	0,0284	0,0142	0,0420	0,0842
1/1,5	0,0270	0,0179	0,0406	0,0822
1/1,4	0,0262	0,0192	0,0399	0,0810
1/1,3	0,0255	0,0203	0,0388	0,0794
1/1,2	0,0243	0,0215	0,0375	0,0771
1/1,1	0,0228	0,0230	0,0355	0,0739
1	0,0214	0,0244	0,0332	0,0697
1,1	0,0276	0,0307	0,0371	0,0787
1,2	0,0349	0,0376	0,0400	0,0868
1,3	0,0425	0,0446	0,0426	0,0938
1,4	0,0504	0,0514	0,0448	0,0998
1,5	0,0582	0,0585	0,0460	0,1049
1,6	0,0658	0,0650	0,0469	0,1090
1,7	0,0730	0,0712	0,0475	0,1122
1,8	0,0799	0,0768	0,0477	0,1152
1,9	0,0863	0,0821	0,0476	0,1174
2	0,0987	0,0869	0,0474	0,1191
3	0,1276	0,1144	0,0419	0,1246
4	0,1383	0,1223	0,0390	0,1250
5	0,1412	0,1243	0,0379	0,1250
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,1250

Tabel 6.3: NB! Tabeli q on meil p.

Kahel naaberserval vabalt toetatud, kahel jäigalt kinnitatud plaat



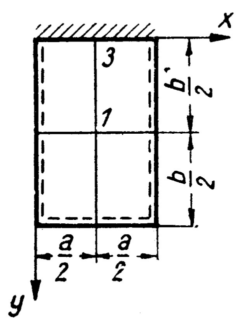
$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$
$$M_x^{(2)} = -k_4 qa^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_5 qa^2$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
1,0	0,0229	0,0304	0,0304	0,0678	0,0678
1,1	0,0276	0,0353	0,0311	0,0766	0,0709
1,2	0,0318	0,0397	0,0312	0,0845	0,0736
1,3	0,0353	0,0435	0,0308	0,0915	0,0754
1,4	0,0384	0,0469	0,0302	0,0975	0,0765
1,5	0,0415	0,0497	0,0293	0,1028	0,0772
1,6	0,0441	0,0521	0,0284	0,1068	0,0778
1,7	0,0463	0,0541	0,0274	0,1104	0,0782
1,8	0,0482	0,0557	0,0265	0,1134	0,0785
1,9	0,0497	0,0570	0,0256	0,1159	0,0786
2,0	0,0511	0,0582	0,0247	0,1180	0,0787
∞	0,0560	0,0625	0,0188	0,1250	—

Märkus. Maksimaalne väljamoment on paindemomendist $M_x^{(1)}$ 9—16% suurem.

Tabel 6.4: NB! Tabeli q on meil p.

Ühel serval jäigalt kinnitatud, teistel vabalt toetatud plaat



Kui $a \geqslant b$:

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qb^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qb^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qb^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_4 qb^2$$

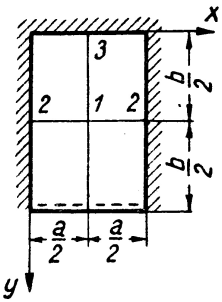
Kui $a \leqslant b$:

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_4 qa^2$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0,0569	0,0188	0,0625	0,1250
0,5	0,0530	0,0235	0,0601	0,1210
0,6	0,0489	0,0268	0,0573	0,1156
0,7	0,0444	0,0297	0,0529	0,1086
0,8	0,0399	0,0315	0,0484	0,1009
0,9	0,0352	0,0331	0,0437	0,0922
1,0	0,0304	0,0339	0,0391	0,0840
1,1	0,0387	0,0411	0,0422	0,0916
1,2	0,0468	0,0484	0,0443	0,0983
1,3	0,0549	0,0557	0,0461	0,1040
1,4	0,0627	0,0625	0,0471	0,1084
1,5	0,0702	0,0691	0,0478	0,1121
1,6	0,0774	0,0750	0,0481	0,1148
1,7	0,0842	0,0806	0,0481	0,1172
1,8	0,0903	0,0855	0,0477	0,1189
1,9	0,0961	0,0901	0,0473	0,1204
2,0	0,1012	0,0942	0,0470	0,1216
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,1250

Tabel 6.5: NB! Tabeli q on meil p.

Ühel serval vabalt toetatud, teistel jäigalt kinnitatud plaat



Kui $a \geqslant b$:

$w^{(1)} = k_1 \dfrac{qb^4}{Eh^3}$

$M_x^{(1)} = k_2 qb^2$

$M_y^{(1)} = k_3 qb^2$

$M_x^{(2)} = -k_4 qb^2$

$M_y^{(3)} = -k_5 qb^2$

Kui $a \leqslant b$:

$w^{(1)} = k_1 \dfrac{qa^4}{Eh^3}$

$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$

$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$

$M_x^{(2)} = -k_4 qa^2$

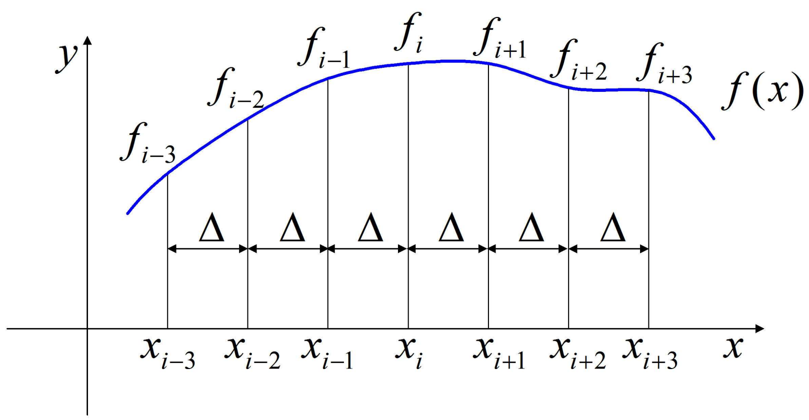
$M_y^{(3)} = -k_5 qa^2$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0	0,0569	0,0188	0,0625	—	0,1250
0,5	0,0491	0,0259	0,0558	0,0783	0,1140
0,6	0,0419	0,0290	0,0496	0,0773	0,1020
0,7	0,0346	0,0305	0,0428	0,0749	0,0907
0,8	0,0282	0,0306	0,0352	0,0708	0,0778
0,9	0,0223	0,0297	0,0294	0,0657	0,0658
1,0	0,0172	0,0278	0,0236	0,0600	0,0547
1,1	0,0197	0,0309	0,0230	0,0659	0,0566
1,2	0,0216	0,0336	0,0222	0,0705	0,0573
1,3	0,0230	0,0357	0,0211	0,0743	0,0574
1,4	0,0241	0,0374	0,0200	0,0770	0,0576
1,5	0,0251	0,0386	0,0190	0,0788	0,0569
1,6	0,0260	0,0397	0,0181	0,0803	0,0568
1,7	0,0266	0,0404	0,0172	0,0815	0,0567
1,8	0,0271	0,0410	0,0165	0,0825	0,0567
1,9	0,0274	0,0414	0,0158	0,0831	0,0566
2,0	0,0277	0,0417	0,0151	0,0833	0,0566
∞	0,0284	0,0417	0,0125	0,0833	0,0566

Tabel 6.6: NB! Tabeli q on meil p.

6.7.2 Võrgumeetod ehk lõplike vahede meetod

Võrgumeetod ehk lõplike vahede meetod on üks diferentsiaalvõrrandite numbrilise (arvulise) lahendamise meetoditest.



Joonis 6.12: Funktsioon $f(x)$ ja tema väärtused võrgusõlmedes $f(x_i) = f_i$.

Meetodi idee: tuletised leitakse nn. lõplike vahede abil.

- Vaatleme ühe muutuja funktsiooni $f(x)$ (vt. joonis 6.12)
- Jagame x telje osadeks võrdse sammuga $\Delta \equiv \Delta_x$ — saame 1D võrgu, mille $i-$ndas punktis $x = x_i$ ja $f(x_i) = f_i$.
- Tuletised punktis x_i leitakse valemite abil, mis põhinevad tuletise definitsioonil:

$$f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}, \qquad f''(x) = [f'(x)]', \ldots \tag{6.62}$$

-

$$f'(x_i) = f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta},$$

$$\begin{aligned} f''(x_i) = f''_i = \frac{f'_{i+1} - f'_{i-1}}{2\Delta} &= \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta^2} = \\ = \frac{f'_{i+1/2} - f'_{i-1/2}}{\Delta} &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta^2}, \end{aligned}$$

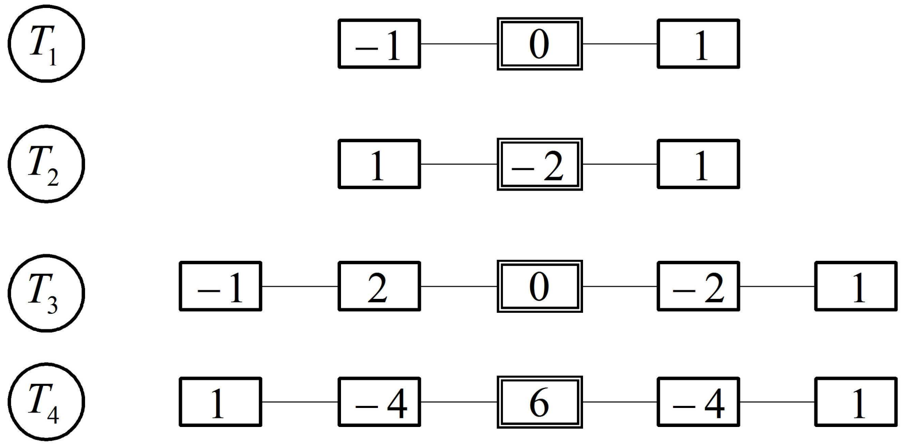
$$f'''(x_i) = f'''_i = \frac{f''_{i+1} - f''_{i-1}}{2\Delta} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta^3},$$

$$\begin{aligned} f''''(x_i) = f''''_i = f^{IV}_i = \frac{f'''_{i+1} - f'''_{i-1}}{2\Delta} &= \frac{f''_{i+1} - 2f''_i + f''_{i-1}}{\Delta^2} = \\ &= \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta^4}. \end{aligned} \tag{6.63}$$

- Tihti esitatakse need ja nendega sarnased valemid nn. graafiliste operaatorite abil (vt. joonis 6.13), mis esitavad võrgu sõlmedes leitud funktsiooni väärtuste $f_{i-2}, f_{i-1}, \ldots$ kordajaid.
- Olles näiteks tähistanud $i-$ndale tuletisele vastava graafilise operaatori T_i, saame funktsiooni f tuletiste leidmiseks valemid

$$f'_i = \frac{T_1 f}{2\Delta}, \quad f''_i = \frac{T_2 f}{\Delta^2}, \quad f'''_i = \frac{T_3 f}{2\Delta^3}, \quad f''''_i = \frac{T_4 f}{\Delta^4}. \tag{6.64}$$

- Nimetatud graafilised operaartorid on kui trafaretid, millega liigutakse mööda võrku ja määratakse $f_{i-2}, f_{i-1}, \ldots$ kordajad $i-$ndas sõlmes.



Joonis 6.13: Graafilised operaatorid funktsiooni $f(x)$ tuletiste $f_i' \ldots f_i''''$ numbriliseks leidmiseks.

Plaadi elastse pinna siirded, sisejõud ja toereaktsioond on kahe muutuja, x ja y, funktsioonid. Seega on nende korral vaja numbriliselt määrata osatuletisi nii x kui y järgi. Vastavad valemid on analoogilised ühe muutuja funktsioonide juures kasutatutega. Nüüd tuleb vaid kasutada kahte indeksit, näiteks punktis $x = x_i$ ja $y = y_k$ osatuletis

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{f_{i+1,k} - f_{i-1,k}}{2\Delta_x} \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{f_{i,k+1} - f_{i,k-1}}{2\Delta_y}, \tag{6.65}$$

kus Δ_x ja Δ_y on vastavalt võrgusammud $x-$ ja $y-$teljel.

- Kuna vaatleme ristkülikplaate, siis pole vaja osadeks jagada kogu x ja y telge — piirdume vaid plaadi külgede pikkuste lõikudega (joonis loengus). Teisisõnu, vaatlema lõike $0 \leq x \leq a$ ja $0 \leq y \leq b$, mille jagame osadeks sammudega

$$\Delta_x = \frac{a}{m}, \qquad \Delta_y = \frac{b}{n}, \tag{6.66}$$

- Vaatleme plaadi elastse pinna (diferentsiaal)võrrandit (6.10)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}$$

Tuues sisse tähistuse $W(x,y) = Dw(x,y)$, Saame viimasele kuju

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = p(x,y) \qquad \text{ehk} \qquad \nabla^2\left(\nabla^2 W\right) = p. \quad (6.67)$$

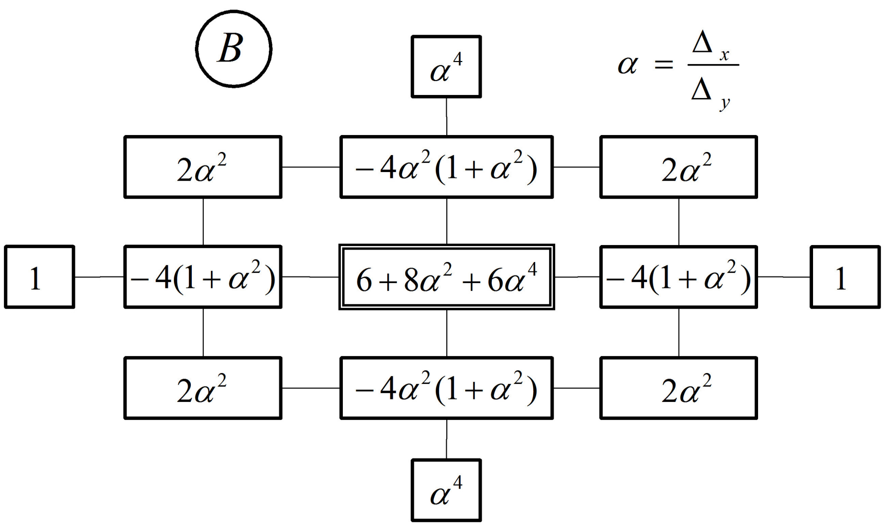
Viimases võrrandis on vaja leida neljandat järku osatuletised x ja y järgi ning samuti neljandat järku segaosatuletis.

- Võrrandi (6.67) vasakut poolt saab kujutada graafilise operaatori B abil (vt. joonis 6.14). Selleks tuleb liita võrrandi liikmetele vastavad graafilised operaatorid ning tuua sisse tähistus

$$\alpha = \frac{\Delta_x}{\Delta_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta_y} = \frac{\alpha}{\Delta_x}. \quad (6.68)$$

- Seejärel saab biharmooniline võrrand (6.67), st. plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand, kuju

$$BW = p\Delta_x^4. \quad (6.69)$$



Joonis 6.14: Biharmoonilise võrrandi graafiline operaator B.

- **Võrgupunktide liigitus.** Vastavalt valemitele (6.66) oleme katnud ristkülikplaadi võrguga kus on $(m+1)(n+1)$ punkti ehk sõlme (joonis loengus).
  - Võrgupunkte, mis asetsevad plaadi servadel nimetame *servapunktideks ehk rajapunktideks*.
  - Võrgupunkte, mis asetsevad servapunktidest seespool nimetame *avapunktideks*.
  - Kuna neljanda tuletise arvutamise valemeis on vaja teada funktsiooni väärtusi kahes naaberreas või naaberveerus, siis tuleb sisse tuua nn. *välis- ehk lisapunktid*, mis asuvad väljaspool plaati. Funktsiooni väärtused neis punktides määratakse rajatingimustest. Tavaliselt on võimalik piirduda ühe rea välispunktidega.
  - Punktide arv plaadil on $(m+1)(n+1)$, neist $(m-1)(n-1)$ on avapunktid ja $(m+1)(n+1)-(m-1)(n-1)=2(m+n)$ serva- ehk rajapunktid.

- **Plaadi paindeülesande lahendamiseks** tuleb lõplikes vahedes esitatud biharmooniline võrrand kujul (6.69) lahti kirjutada igas avapunktis.
  - Tulemusena saame võrrandisüsteemi, kus on avapunktide arvuga võrdne arv algebralisi võrrandeid. Saadud süsteemi lahend annabki meile plaadi elastse pinna siirded (läbipainded) avapunktides.
  - Servapunktide siirded on esitatud rajatingimuste abil.
- Kui siirded on leitud, siis nende abil saame leida sisejõud vastavalt valemitele (6.13)

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) = \dfrac{\mathcal{M}_x W}{\Delta_x^2}, \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) = \dfrac{\mathcal{M}_y W}{\Delta_y^2}, \\ T_{xy} = -(1-\nu)D\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu)\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = (1-\nu)\alpha\dfrac{\mathcal{T}_{xy} W}{4\Delta_x^2} \end{cases} \quad (6.70)$$

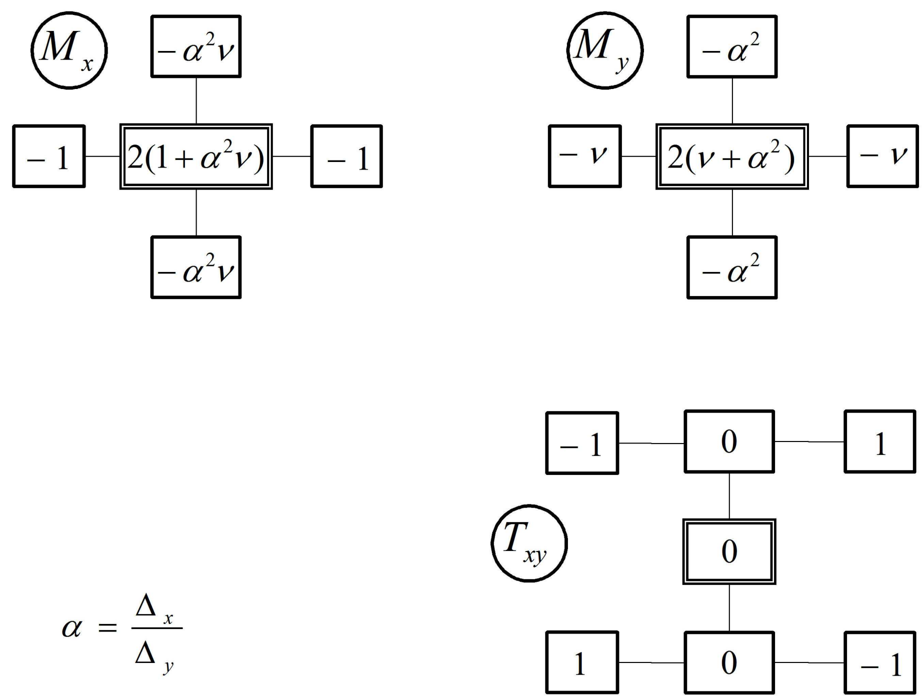
ja (6.14)

$$\begin{cases} Q_x = -D\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = \left(\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right) = \dfrac{\mathcal{Q}_x W}{2\Delta_x^3}, \\ Q_y = -D\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right) = \left(\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right) = \alpha\dfrac{\mathcal{Q}_y W}{2\Delta_x^3}. \end{cases} \tag{6.71}$$

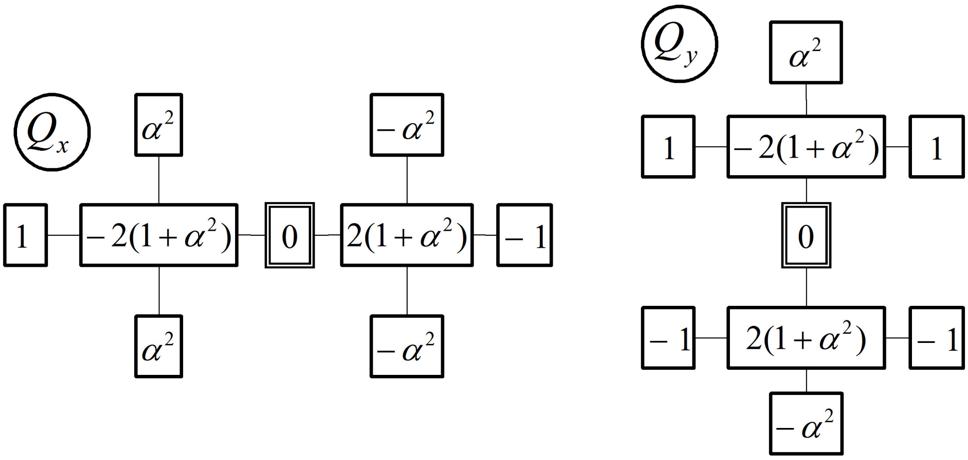
$\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{T}_{xy}, \mathcal{Q}_x$ ja $\mathcal{Q}_y$ on graafilised operaatorid (vt. joon. (6.15) ja (6.16)).

- Toereaktsioonide leidmise juures õnnestub plaadi elastse pinna võrrandi abil ellimineerida nn. teise rea välispunktid. Kasutades graafilisi operaatoreid $\mathcal{R}_x$ ja $\mathcal{R}_y$ (vt. joon. (6.17)–(6.20)) saab vastavad avaldised esitada kujul

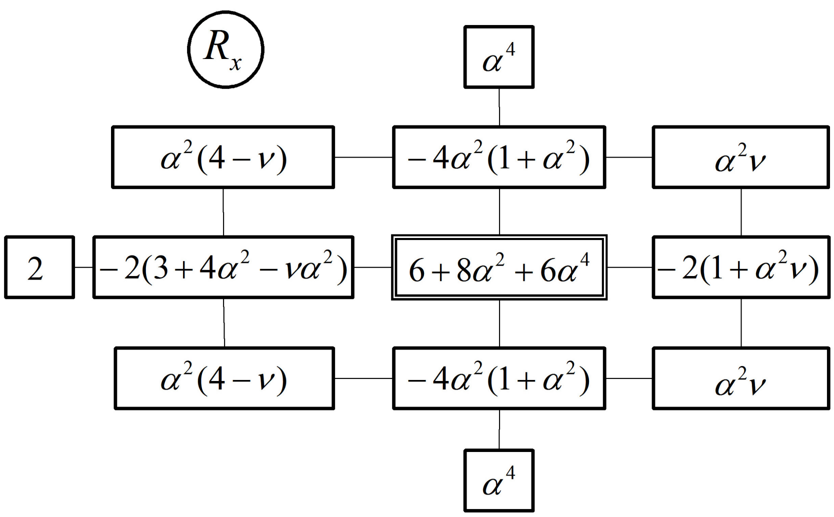
$$R_x = \frac{\mathcal{R}_x W}{2\Delta_x^3} - \frac{p\Delta_x}{2}, \qquad R_y = \frac{1}{\alpha}\frac{\mathcal{R}_y W}{2\Delta_x^3} - \frac{p\Delta_x}{2}. \tag{6.72}$$



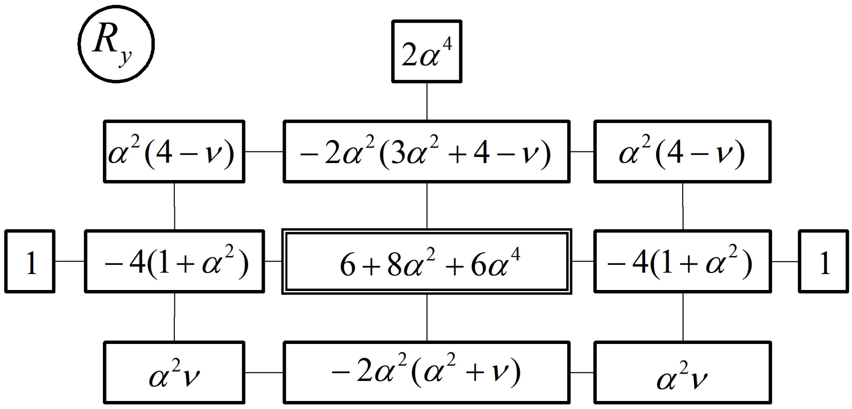
Joonis 6.15: Graafilised operaatorid painde- ja väändemomentide leidmiseks.



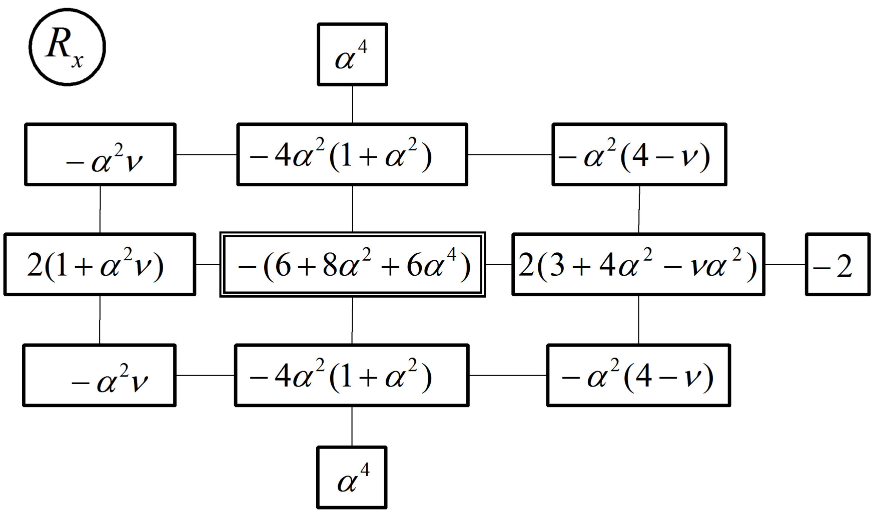
Joonis 6.16: Graafilised operaatorid põikjõudude leidmiseks.



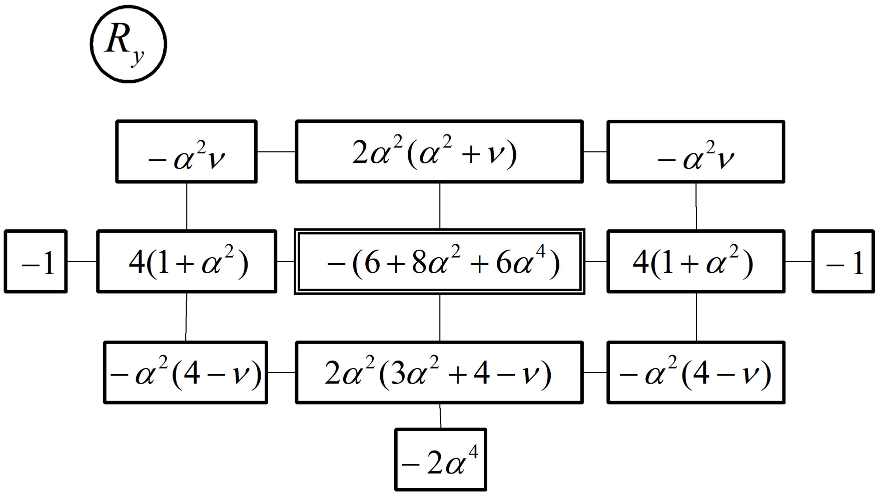
Joonis 6.17: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.



Joonis 6.18: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.



Joonis 6.19: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.



Joonis 6.20: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks.

Ääretingimused.

- **Kinnisserv.** Servapunktides, mis on risti $x-$teljega

$$W_i = 0, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i-1,k} = W_{i+1,k}. \tag{6.73}$$

Servapunktides, mis on risti $y-$teljega

$$W_i = 0, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{y=y_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i,k-1} = W_{i,k+1}. \tag{6.74}$$

- **Vabalt toetatud serv.** Servapunktides, mis on risti $x-$teljega

$$W_i = 0, \qquad (M_x)_{x=x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i-1,k} = -W_{i+1,k}. \tag{6.75}$$

Servapunktides, mis on risti $y-$teljega

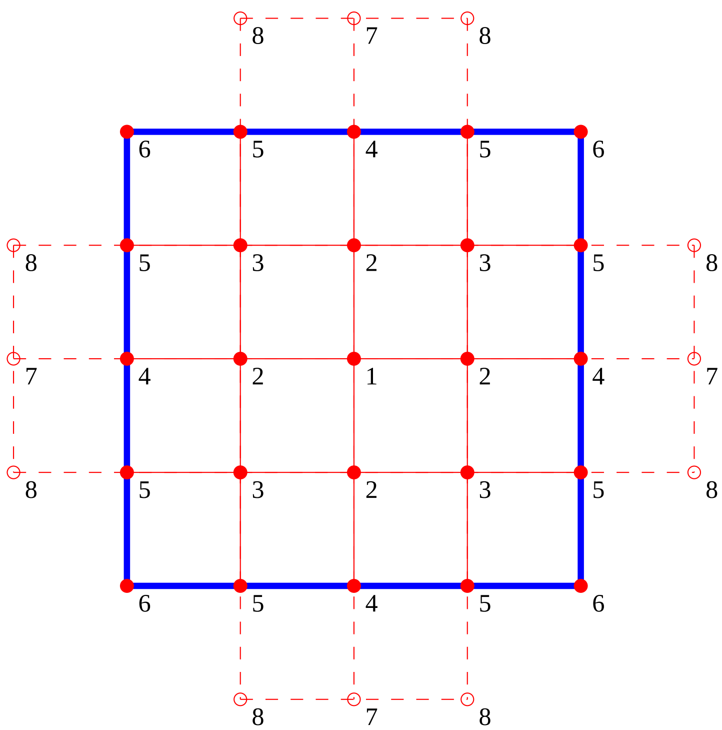
$$W_i = 0, \qquad (M_x)_{y=y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i,k-1} = -W_{i,k+1}. \tag{6.76}$$

- **Vaba serv.** Siin on olukord tunduvalt keerulisem, sest $W \neq 0$ ja W väärtusi raja- ja välispunktides ei õnnestu avaldada avapunktide kaudu. Selle asemel lisatakse avapunktides lahti kirjutatud plaadi elastse pinna võrranditele lisavõrrandid, mis väljendavad vaba serva tingimusi paindemomendi, põikjõu ja/või toereaktsiooni jaoks.

Näide. Ruutplaadile servapikkusega a mõjub ühtlaselt jaotunud koormus inensiivsusega p_o.

Leida plaadi plaadi keskpinna siirded avapunktides ja paindemomentide väärtused plaadi keskel ning servade keskpunktis kahel juhul: 1) kui kõik plaadi servad on jäigalt kinnitatud; 2) kui kõik plaadi servad on vabalt toetatud.

Katame plaadi pinna võrguga, mille samm $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = a/4$ (joonis 6.21). Sümmeetria tõttu peame vaatlema vaid kolme sisepunkti ja kirjutama nende jaoks lahti biharmoonilise võrrandi, kasutades eeltoodud graafilist operaatorit B.



Joonis 6.21:

Kui rajatingimusi ei arvesta, on tulemuseks kolmest võrrandist koosnev kaheksa tundmatuga võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 + 4W_4 + 0W_5 + 0W_6 + 0W_7 + 0W_8 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 25W_2 - 16W_3 - 8W_4 + 6W_5 + 0W_6 + 1W_7 + 0W_8 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 22W_3 + 4W_4 - 16W_5 + 2W_6 + 0W_7 + 2W_8 = p_o\Delta^4. \end{cases} \tag{6.77}$$

Mõlema rajatingimuse korral on siirded servapunktides nullid, st. $W_4 = W_5 = W_6 = 0$ ja tundmatute arv väheneb kolme võrra.

Jäiga kinnituse korral saame lisaks tingimused $W_7 = W_2$ ja $W_8 = W_3$ ning võrrandisüsteem (6.77) saab kuju

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 26W_2 - 16W_3 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 24W_3 = p_o\Delta^4. \end{cases} \tag{6.78}$$

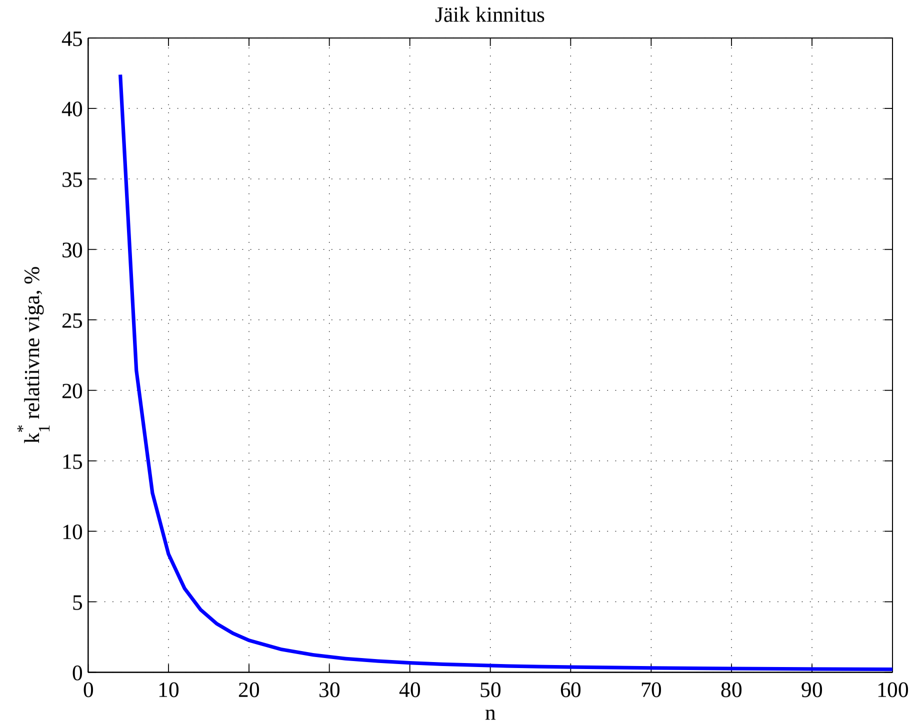
Selle lahend on

$$W_1 = 0,4607p_o\Delta^4, \qquad W_2 = 0,3090p_o\Delta^4, \qquad W_3 = 0,2093p_o\Delta^4. \tag{6.79}$$

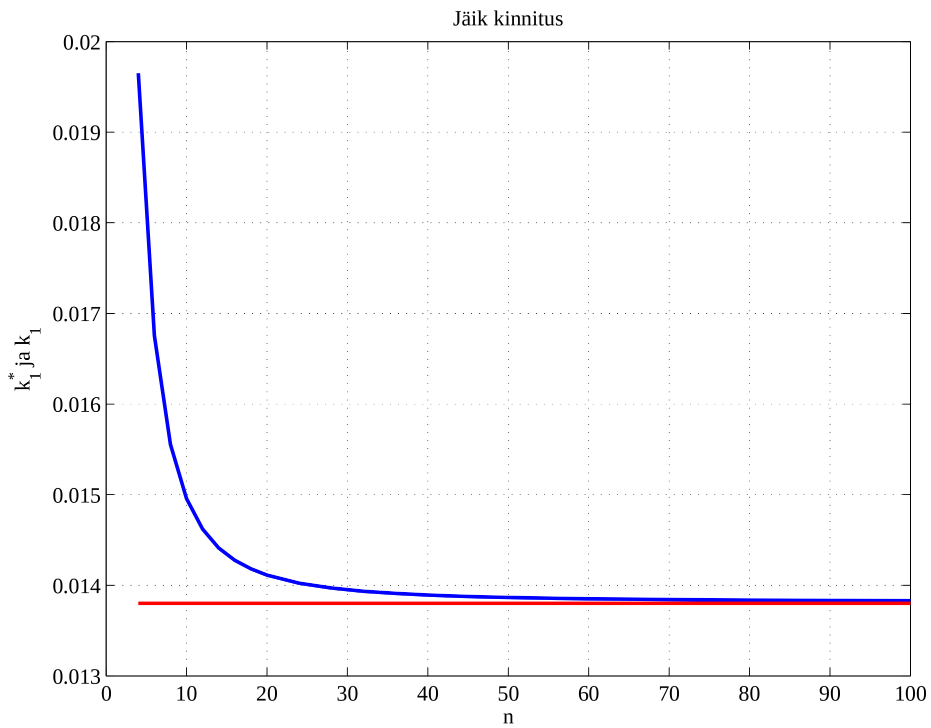
Paindemomendid ($\nu = 0.3$) ‡

$$\begin{cases} M_1 = (2,6W_1 - 2W_2 - 0,6W_2)/\Delta^2 = 0,3944p_o\Delta^2 = 0,0246p_oa^2 \\ M_4 = -2W_2/\Delta^2 = -0,6180p_o\Delta^2 = -0,0386p_oa^2 \end{cases} \tag{6.80}$$

Et võrrelda saadud siirde W_1 väärtust tabelites antud konstandiga k_1 tuleb W_1 jagada suurusega $n^4/[12(1-\nu^2)]$. Tulemuseks on $k_1^* = 0.0197$, mis erineb tabelist saadud väärtusest $k_1 = 0,0138$. Et saavutada suuremat kooskõla, tuleb suurendada võrgupunktide arvu. Näiteks $n = 12$ korral saame $k_1^* = 0.0146$ ja $n = 24$ korral saame $k_1^* = 0.0140$ (vt. joonist 6.22 kus on esitatud vastav relatiivne viga sõltuvana võrgupunktide arvust ja joonist 6.23 kus on esitatud k_1^* sõltuvana võrgupunktide arvust). Paindemomentide korral pole sellist ümberarvutamist vaja teha. Võrgupunktide arvule $n = 4$ vastavad $k_2^* = 0,0246$ ja $k_4^* = 0,0386$, tabelis $k_2 = 0,0231$ ja $k_4 = 0,0513$. Väärtusele $n = 12$ vastavad $k_2^* = 0,0232$ ja $k_4^* = 0,0495$ ning $n = 24$ vastavad $k_2^* = 0,0230$ ja $k_4^* = 0,0509$.



Joonis 6.22:



Joonis 6.23:

Vaba toetuse korral saame lisaks rajatingimused $W_7 = -W_2$ ja $W_8 = -W_3$ ning võrrandisüsteem (6.77) saab kuju

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 24W_2 - 16W_3 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 20W_3 = p_o\Delta^4. \end{cases} \tag{6.81}$$

Selle lahend on

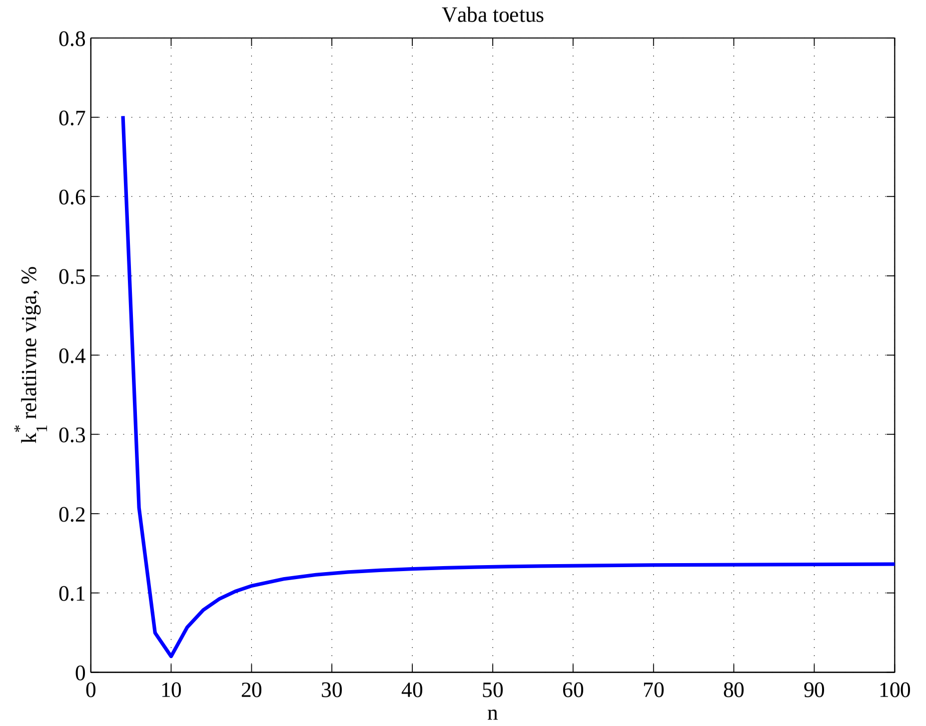
$$W_1 = 1,0313p_o\Delta^4, \qquad W_2 = 0,7500p_o\Delta^4, \qquad W_3 = 0,5469p_o\Delta^4. \tag{6.82}$$

Paindemomendid ($\nu = 0.3$)

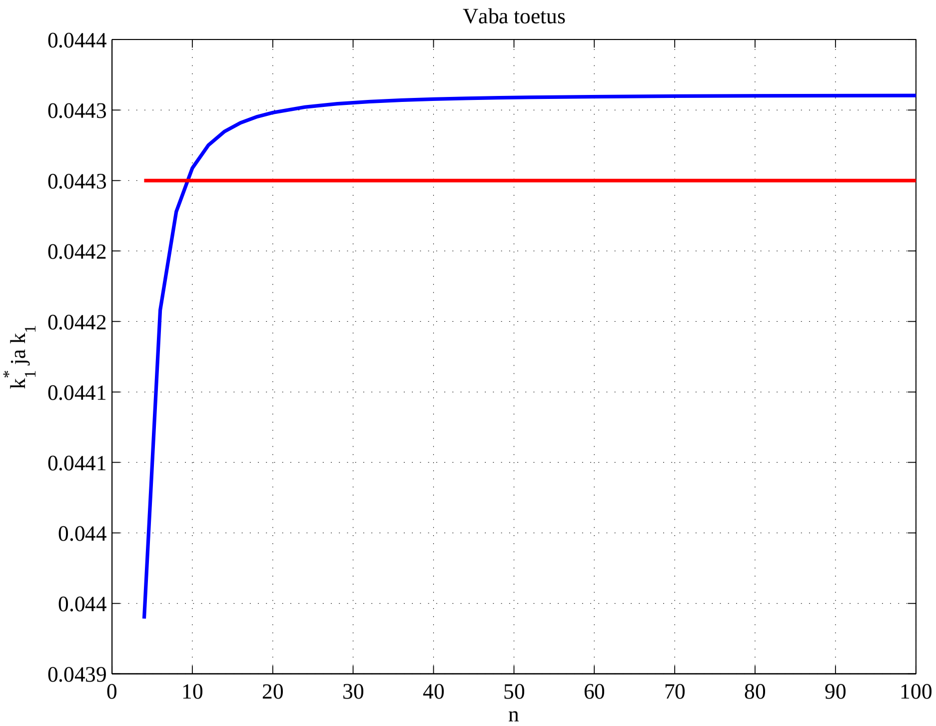
$$\begin{cases} M_1 = (2,6W_1 - 2W_2 - 0,6W_2)/\Delta^2 = 0,7312p_o\Delta^2 = 0,0457p_oa^2, \\ M_4 = (W_2 - W_2)/\Delta^2 = 0. \end{cases} \tag{6.83}$$

Et võrrelda saadud siirde W_1 väärtust tabelites antud konstandiga k_1 tuleb W_1 jällegi jagada suurusega $n^4/[12(1-\nu^2)]$. Tulemuseks on $k_1^* = 0.0440$, mis erineb tabelist saadud väärtusest $k_1 = 0,0443$ tunduvalt vähem kui jäiga kinnituse lahend (vt. joonist 6.24 kus on esitatud vastav relatiivne viga sõltuvana

võrgupunktide arvust ja joonist 6.25 kus on esitatud k_1^* sõltuvana võrgupunktide arvust). Ka paindemomentide väärtused on antud juhul paremas kooskõlas tabelis antutega. Tabelis $k_2 = 0,0479$, ja $n = 4, 12, 24$ vastavad $k_2^* = 0,0457; 0,0476; 0,0478$.



Joonis 6.24:



Joonis 6.25: