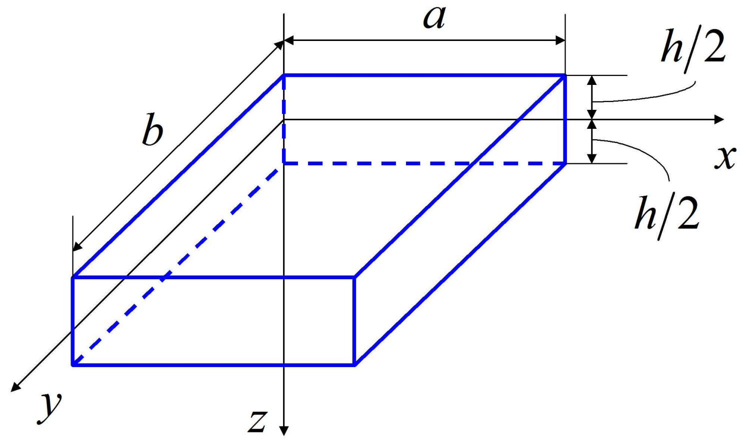
Peatükk 6

Õhukeste plaatide paine

6.1 Plaatide paindeteooria põhimõisted ja hüpoteesid

Plaat on prismaatiline või silindriline keha, mille kõrgus on väike võrreldes teiste dimensioonidega.[1] Harilikult nimetame seda kõrgust *plaadi paksuseks* ja tähistame h. Käesolevas peatükis vaatleme ristkülikplaate, järgmises aga ka ümar- ja rõngasplaate.



Joonis 6.1: Plaadi mõõtmed ja koordnaattasandite valik.

[1] Tihti defineeritakse plaat kui kooriku erijuht. *Koorik* on konstruktsioonielement, mille üks mõõde on teistega võrreldes väike. *Plaat* on koorik, mille kõverus on null, st. mida ümbritsevatest pindadest kaks on paralleelsed tasandid.

Pinda, mis jagab plaadi paksuse kaheks võrdseks osaks, nimetatakse plaadi *keskpinnaks.* Koordinaatteljed valime nii, et x ja y teljed on kesktasandil ning z telg on suunatud alla (vt. joonis 6.1). Plaadi laiuse tähistame a ja pikkuse b.

Plaadile mõjuva koormuse saab alati lahutada kaheks komponendiks.

- Plaadi keskpinnaga ristuv koormus ehk põikkoormus
  - Plaadi paine
- Plaadi keskpinna sihis mõjuv koormus
  - Stabiilsus — kriitiline koormus — mõlkumine

Plaatide liigitus.

Paksuse järgi.

- Paksus võib olla nii konstantne kui muutuv.
- Õhukesed ja paksud. Eegi ja Poveruse[2] järgi loetakse õhukeseks plaati, mille lühema külje pikkus a on vähemalt viis korda suurem kui paksus h, st., $a/h \geq 5$, Ugurali[3] järgi aga kui $a/h \geq 20$.

Materjali omaduste järgi.

- isotroopsed plaadid — metallplaadid
- anisotroopsed plaadid
  - ortotroopsed plaadid — vineer, ristsarrusega raudbetoonplaat (nõrgalt ortotroopne)

[2] R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967
[3] A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

Painde iseloomu järgi.

- *Jäigad plaadid.* Kui plaadi maksimaalne läbipaine on võrreldes plaadi paksusega väike, siis võtavad enamuse väliskoormusest vastu paindemomendid ja põikjõud. Selliseid plaate nimetatakse jäikadeks. Metsaveere[4] põhjal on väike läbipaine 10% paksusest, Eegi ja Poveruse[5] põhjal 1/3 Ugurali[6] põhjal aga 1/2.
- *Membraanid.* Kui läbipainded ületavad mitmekordselt (Eek & Poverus: 5 korda) plaadi paksuse, siis võtavad enamuse koormusest vastu plaadi kesktasandis tekkivad pikijõud — nn. aheljõud. Selliseid plaate nimetatakse membraanideks.
- *Painduvad plaadid.* Plaate, mis pole ei jäigad ega membraanid nimetatakse painduvateks.

Jäikade plaatide puhul hüljatakse ahelpinged, membraanide puhul paindepinged. Painduvate plaatide korral tuleb aga arvesse võtta mõlemad.

[4] J. Metsaveer, Plaatide arvutus ja tasandülesanne, Tallinn, 1987
[5] R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967
[6] A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

Kuna maksimaalne läbipaine sõltub mõjuvast koormusest, siis võib sama plaat töötada nii jäigana, painduvana kui membraanina.

Käesolevas kursuses vaatleme vaid õhukesi ühtlase paksusega isotroopseid jäiku plaate. Sellise plaadi töö koormuse vastuvõtmisel on paljuski sarnane tala tööle. Samas aga on sisejõudude ja toereaktsioonide leidmisel olulisi erinevusi.

Õhukeste jäikade plaatide paindeteoorias on kasutusel terve rida lihtsustavaid hüpoteese, mis on sarnased tugevusõpetuses kasutatavatele. Samas ei käsitleta plaate tugevusõpetuse vaid hoopis elastsusõpetuse raames ülesannete keerukuse tõttu.

Märkus: Paljud autorid ei kasuta jäiga ja painduva plaadi mõistet, vaid ütlevad, et esimesel juhul loetakse läbipainded väikeseks ning kasutatakse klassikalist plaatide teooriat. Teisel juhul aga on tegu lõplikele ehk suurtele läbipainetele vastava teooriaga.

Hüpoteesid

1. Plaadi keskpind ei pikene ega lühene vaid ainult paindub (kõverdub).
   - See viitab jäiga plaadi definitsioonile.
   - Kesktasandi punktide siirded on vaid z telje sihis, plaadi pinna sihis on siirded nullid.
2. Sirged, mis enne paindumist olid keskpinnaga risti, jäävad ka peale paindumist keskpinnaga ristuvateks sirgeteks.
   - Analoogia talade juures kasutatava ristlõigete tasandilisuse hüpoteesiga.
3. Paindumisel ei muutu plaadi mõtteliste kihtide vahelised kaugused paksuse sihis.
   - Plaadi keskpinna siire $w = w(x, y)$.
4. Plaadi paksuse sihilised normaalpinged hüljatakse väiksuse tõttu, st. $\sigma_z = 0$.

   - Kuna plaat on õhuke, siis ei mõjuta see lihtsustus oluliselt lahendit.
5. Koormus mõjub plaadi pinnaga risti ja on esitatud ruumjõuna:

$$Z(x, y, z) = \frac{3}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(x, y). \tag{6.1}$$

   - Selline koormussedus annab välispinnale $z = \pm 0,5h$ nullise koormuse, plaadi keskpinna ühiku kohta aga summaarse koormuse

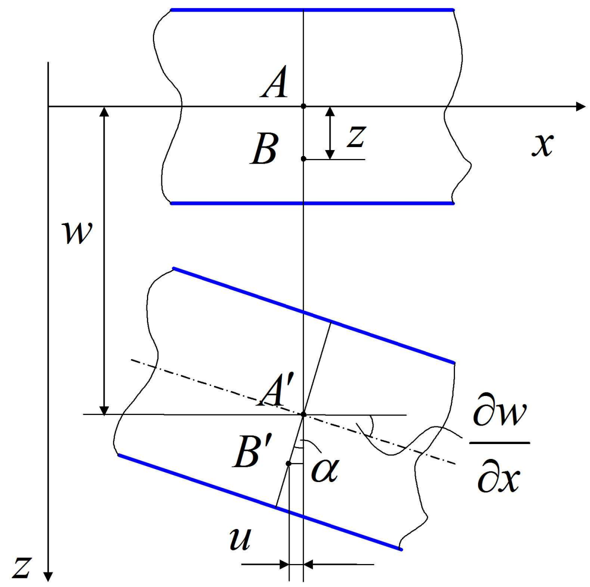
$$\int_{-h/2}^{h/2} Z(x, y, z) dz = \ldots = p(x, y). \tag{6.2}$$

   - Tavaliselt vaadeldaksegi plaadi keskpinnal mõjuvat koormust kujul $p(x, y)$.

6.2 Deformatsioonide avaldamine plaadi punkti siirete ja läbipainde kaudu.

Plaadi kesktasandi punktide vertikaalsiiret $w(x,y)$ nimetatakse *läbipaindeks.* Esimese kolme hüpoteesi põhjal on võimalik avaldada plaadi suvalise punkti siirdekomponendid u ja v läbipainde $w(x,y)$ kaudu.

Vaatleme plaadi keskpinna normaali punktide A ja B liikumist paindel (joonis 6.2) ja leiame siirdekomponentide u ja w vahelise seose.



Joonis 6.2: Plaadi keskpinna normaali punktide A ja B liikumine paindel.

- Vastavalt tehtud hüpoteesidele saab keskpinna punkt A liikuda vaid vertikaalselt. Kesktasandi normaal peab aga jääma ka peale deformatsiooni risti keskpinnaga, seejuures $AB = A'B' = z = const$.
- Plaadi keskpind punktis A pöördub nurga α võrra. Sama nurga võrra pöördub ka sirge AB.
  - Seega punkti B siire x telje sihis $u = -z\sin\alpha$.
  - Kuna nurk α on väike, siis

$$\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{6.3}$$

- Analoogiliselt saame siduda ka siirdekomponendid v ja w. Kokkuvõttes oleme saanud valemid

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{ja} \qquad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{6.4}$$

Cauchy seoste (3.6) ja valemite (6.4) põhjal

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{6.5}$$

6.3 Plaadi elastse pinna võrrand

Lähtume tasakaalu diferentsiaalvõrranditest (2.6)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

- Diferentseerime esimest tasakaaluvõrrandit x järgi, teist y järgi ja kolmandat z järgi.
- Arvestades nihkepingete paarsusseadust saame ellimineerida τ_{yz} ja τ_{xz}.
- Arvestades et $\sigma_z = X = Y = 0$ ja Z on antud avaldisega (6.1) saame lõpuks võrrandi

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = -\frac{zp(x,y)}{i}, \tag{6.6}$$

kus suurus

$$i = \frac{h^3}{12} \tag{6.7}$$

kujutab endast plaadi ristlõike inertsimomenti pikkusühiku kohta, st., inertsimomendi intensiivsust.

Selleks, et tuletada pingete ja läbipainete vahelised seosed kasutame Hooke'i seadust kujul

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \tag{6.8}$$

ning asendame viimasesse seosed (6.5). Tulemus on järgmine:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ \sigma_y = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ \tau_{xy} = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] \end{cases} \tag{6.9}$$

Pannes viimased pingeavaldised võrrandisse (6.6) saamegi plaadi elastse pinna võrrandi

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}. \tag{6.10}$$

Suurust

$$D = \frac{Ei}{1-\nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{6.11}$$

nimetatakse *silindriliseks paindejäikuseks*. Suurust $E/(1-\nu^2)$ võib siinjuures nimetada *plaadi taandatud elastsusmooduliks*. Võrrand (6.10) on jällegi *biharmooniline võrrand*.

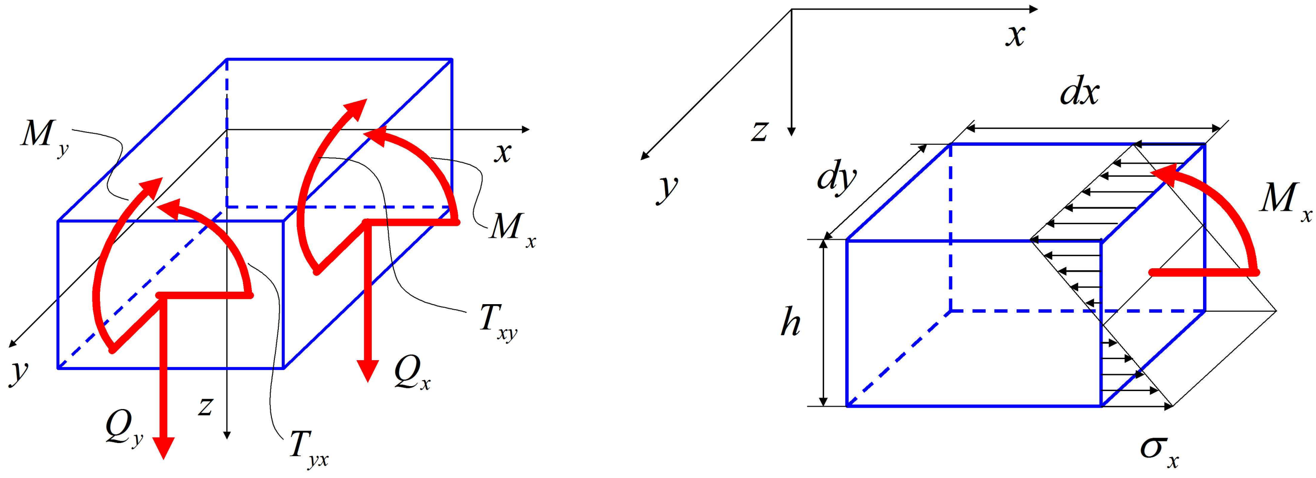
Plaadis mõjuvate pingete leidmiseks tuleb seega kõigepealt lahendada biharmooniline võrrand (6.10). Tulemusena saame plaadi läbipainde avaldise $w(x,y)$. Seejärel saame seoste (6.9) abil leida pinged σ_x, σ_y ja τ_{xy}. Nihkepingete τ_{yz} ja τ_{xz} määramiseks tuleb kasutada kahte esimest tasakaaluvõrrandit, kust saab avaldada osatuletised $\partial\tau_{xz}/\partial z$ ja $\partial\tau_{yz}/\partial z$. Peale integreerimist z järgi rajatin-

gimustel $\tau_{xz}\big|_{z=\pm 0,5h} = \tau_{yz}\big|_{z=\pm 0,5h} = 0$ saame

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\dfrac{E\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{2(1-\nu^2)} \left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right), \\ \tau_{yz} = -\dfrac{E\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{2(1-\nu^2)} \left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right). \end{cases} \tag{6.12}$$

6.4 Sisejõud

Talade korral mõisteti sisejõudusid kogu tala laiuse ulatuses, st., sisejõuks nimetati mingis ristlõikes mõjuvat summaarset jõudu või momenti. Plaatide korral on kasutused teistsugune lähenemine. Siin nimetatakse sisejõuks hoopis sisejõu intensiivsust. Teisisõnu, painde- ja väändemomentide ning põikjõu asemel vaadeldakse vastavaid suurusi pikkusühiku kohta.



Joonis 6.3: Plaadi sisejõud.

Taladest erinev on ka paindemomentide ja põikjõu tähistus (joonis 6.3). Plaatide puhul on kombeks tähistada pinge σ_x poolt põhjustatud paindemomenti M_x ja σ_y poolt põhjustatut M_y. Pingest τ_{xz} ja τ_{yz} põhjustatud põikjõudusid tähistatakse vastavalt Q_x ja Q_y. Seega viitab plaatide korral paindemomendi ja põikjõu tähises olev indeks vaadeldava ristlõike normaali sihile. Väändemomendid $T_{xy} = T_{yx}$ on põhjustatud nihkepingetest $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Painde- ja väändemomendid. Momentide arvutamine käib tavapärasel moel ning arvestades avaldisi (6.9) saame painde- ja väändemomendid esitada läbipainde w kaudu:

$$\begin{cases} M_x = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_x dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_y dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ T_{xy} = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{xy} dz = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases} \tag{6.13}$$

Põikjõudude jaoks saame avaldised

$$\begin{cases} Q_x = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right), \\ Q_y = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right). \end{cases} \tag{6.14}$$

Märgireeglid kattuvad talade juures kasutatavatega. Positiivne paindemoment põhjustab positiivsete kihtide ($z > 0$) tõmmet. Positiivne põikjõud mõjub positiivsel pinnal z telje positiivses suunas.

Vastupidised seosed:

√ pin- gete epüüri

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{M_x}{i} z, \qquad \sigma_y = \dfrac{M_y}{i} z, \qquad \tau_{xy} = \dfrac{T_{xy}}{i} z, \\ \tau_{xz} = \dfrac{3Q_x}{2h}\left(1 - 4\dfrac{z^2}{h^2}\right), \qquad \tau_{yz} = \dfrac{3Q_y}{2h}\left(1 - 4\dfrac{z^2}{h^2}\right) \end{cases} \tag{6.15}$$

On selge, et paindepinged σ_x ja σ_y ning nihkepinge (väändepinge) τ_{xy} muutuvad ristlõikes lineaarse seaduse põhjal ning omavad ekstreemseid väärtusi kohal $z = \pm 0,5h$. Nihkepinged τ_{xz} ja τ_{yz} muutuvad aga ruutparaboolse seaduse järgi omades maksimumi kohal $z = 0$.

6.4.1 Toereaktsioonid

Talade korral on reaktsioonjõud arvuliselt võrdsed põikjõuga toe kõrval. Plaatide puhul on olukord aga pisut komplitseeritum, sest reaktsioonjõud R_x (mõjub x telje sihilise normaaliga pinnal) ja R_y peavad tasakaalustama ka plaadis tekkinud väändemomendi mõju ja näiteks reaktsioonjõud

$$R_x = Q_x + Q'_x, \tag{6.16}$$

kus Q'_x on väändemomendi poolt tekitatud nn. täiendav põikjõud. Eelmise valemi põhjal on selge, et analoogiliselt põikjõuga, esitatakse ka reaktsioonjõud R_x ja R_y plaadi serva pikkusühiku kohta.

Selgituseks vaatleme kahte kõrvutist võrdse laiusega dy elementaarristkülikut ristlõikes, mille normaal on x telje sihiline (joonis loengus). Parempoolsel ristkülikul mõjub summaarne väändemoment $T_{xy}dy$ ja vasakpoolsel $(T_{xy} + (\partial T_{xy}/\partial y)dy)dy$. Asendame need väändemomendid jõupaaridega $(F_x, -F_x)$ ja $(F'_x, -F'_x)$, kus $F_x = T_{xy}$ ja $F'_x = T_{xy} + (\partial T_{xy}/\partial y)dy$. On selge, et kahe elementaarristküliku ühisel serval on nii tekkinud täiendav põikjõud $dF = F'_x - F_x = (\partial T_{xy}/\partial y)dy$. Selline täiendav põikjõud tekib igas elementaarristkülikus laiusega dy. Tähistame selle jõu intensiivsuse $Q'_x = dF/dy = \partial T_{xy}/\partial y$.

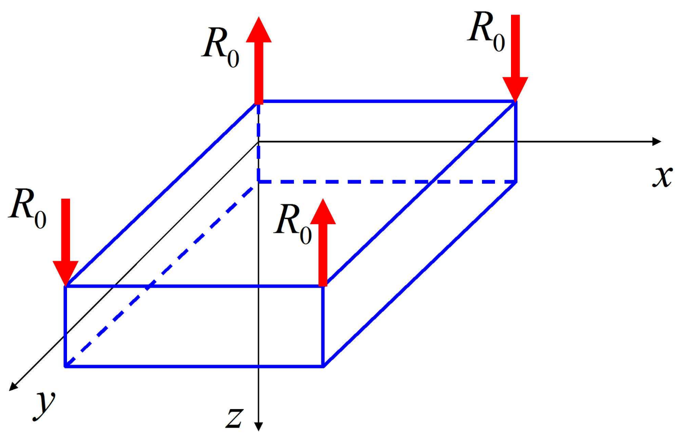
Korrates sama protseduuri y telje sihilise normaaliga ristlõike jaoks saame täiendava põikjõu intensiivsusega $Q'_y = dF/dx = \partial T_{xy}/\partial x$. Reaktsioonjõud on seega

$$\begin{cases} R_x = Q_x + Q'_x = Q_x + \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial y} = -D\left[\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right], \\ R_y = Q_y + Q'_y = Q_y + \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial x} = -D\left[\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]. \end{cases} \tag{6.17}$$

Selliselt sisse toodud jõupaarid annavad aga lisaks mööda külgi jaotunud reaktsioonjõule (reakstioonjõu intensiivsusele) veel täiendavad koondatud reaktsioonjõud

$$R_o = T_{xy} + T_{yx} = 2T_{xy} \tag{6.18}$$

plaadi nurkadesse. Vastavate reaktsioonjõudude positiivsed suunad on näidatud joonisel 6.4. Nende koondatud reaktsioonide sissetoomise vajadus tuleneb faktist, et plaadi nurgapunktides puuduvad vaadeldud elementaarristkülikutel tasakaalustavad naaberristkülikud.

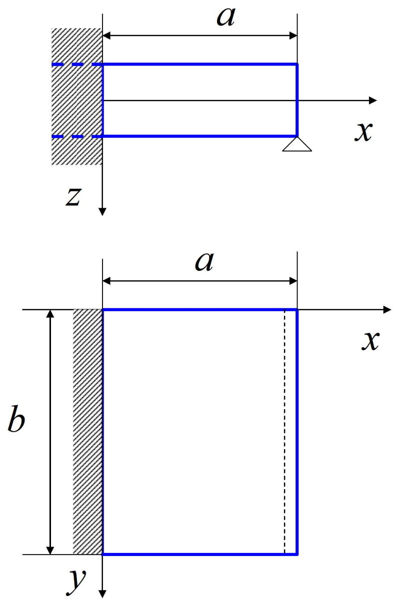


Joonis 6.4: Reaktsioonjõudude positiivsed suunad.

6.5 Rajatingimused

Biharmoonilise võrrandi lahendamiseks on vaja teada vajalikul hulgal *raja- ehk serva- ehk ääretingimusi*. Kuna võrrandi järk on mõlema koordinaadi (x ja y) järgi neli, siis on vaja mõlema koordinaadi järgi ka neli rajatingimust. Teisisõnu, iga plaadi serva jaoks kaks tingimust. Füüsikaliselt peavad need tingimused vastama plaadi serva kinnitusviisile.

Kolm tüüpilist plaadi serva kinnitusviisi ja vastavad tähistused on esitatud joonisel 6.5. Serv $x = 0$ on jäigalt kinnitatud, serv $x = a$ vabalt toetatud (liigendiga kinnitatud) ning servad $y = 0$ ja $y = b$ vabad.



Joonis 6.5: Plaadi serva kinnitusviisid ja vastavad tähistused.

Vaatleme järgnevalt nelja juhtu.

1. Jäigalt kinnitatud serv ehk kinnisserv. Sellise kinnitusviisi korral ei saa plaadi serv omandada deformatsiooni käigus ei pöördeid ega siirdeid ja ääretingimused on esitatavad kujul

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{6.19}$$

2. Vabalt toetatud serv või liigendiga kinnitatud serv. Antud juhul ei saa plaadi servapunktid siirdeid, kui pöörded on lubatud. Selliselt toetatud plaadi serv ei võta vastu momente ja ääretingimused saavad kuju

$$w = 0, \qquad M_x = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad M_y = 0. \tag{6.20}$$

Avaldise (6.13) põhjal $M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$. Kuna mööda sirget serva tuletis $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ (sirge teine tuletis on alati null), siis saavad ääretingimused kuju (kasutades M_y jaoks analoogset lähenemist)

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{6.21}$$

Siin valem $(6.21)_2$ vastab tingimusele $M_x = 0$ ja $(6.21)_3$ vastab tingimusele $M_y = 0$.

3. Vaba serv. Sellise serva punktid võivad saada nii siirdeid kui pöördeid. Arvestades ääretingimuste füüsikalist sisu peavad nii paindemoment kui reaktsioonjõud olema vabas servas nullid.

$$R_x = 0 \quad \text{ning} \quad M_x = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad R_y = 0 \quad \text{ning} \quad M_y = 0. \tag{6.22}$$

Arvestades reaktsioonjõudude ja paindemomentide avaldisi saame viimase esitada kujul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \text{ja/või} \\ \dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \tag{6.23}$$

Kuna algne sirge vaba serv ei pruugi deformeerudes jääda sirgeks, siis siin pole võimalik enam täiendavaid lihtsustusi teha.

4. Sümmeetriatelg. Kui plaat ja koormus omavad ühist sümmeetriatelge ja toetusviis on samuti sümmeetriline, siis on ka läbipaine w sümmeetriline. Sel juhul piisab kui lahendada plaadi võrrand vaid ühel pool sümmeetriatelge. Sümmeetriatelge ennast aga vaadelda kui tinglikku (virtuaalset) serva, kus rajatingimused juhul kui sümmeetriateljeks on x ja/või y telg avalduvad kujul

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad Q_x = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad Q_y = 0. \tag{6.24}$$

Arvestades põikjõu avaldisi (6.14) saame viimastele kuju

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0. \tag{6.25}$$

6.6 Ühtlaselt koormatud plaatide lihtsamad paindeülesanded

6.6.1 Silindriline paine

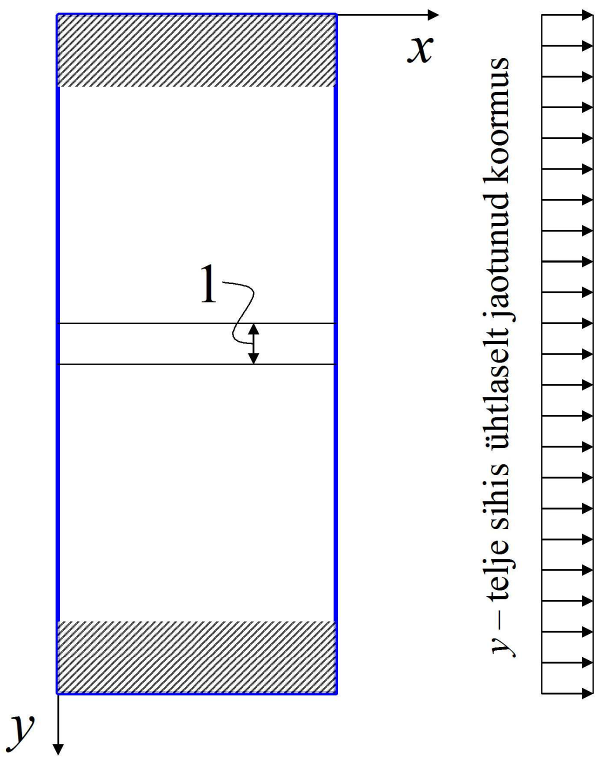
Kui ristkülikuline plaat on «pika ristküliku» kujuline ja koormus on pikkade külgede sihis konstantne, siis plaadi keskosa (vt. joonis 6.6) elstne pind on silindrilise kujuga (silindri moodustaja on paralleelne y teljega). Teisisõnu, plaadi keskosas siirded $w = w(x)$. Sellist plaadi deformatsiooni nimetatakse *silindriliseks paindeks.*

Olgu plaat välja venitatud y telje sihis ja koormus ühtlaselt jaotunud üle kogu plaadi pinna, st., $p(x,y) = p = const.$ (joon. 6.6). Plaadi elastse pinna võrrand (6.10) saab sel juhul kuju

$$D\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = p. \tag{6.26}$$

See võrrand on väga sarnane tugevusõpetusest tuntud tala elastse joone võrrandiga

$$EI\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = p. \tag{6.27}$$



Joonis 6.6: Pikk ristkülikuline plaat.

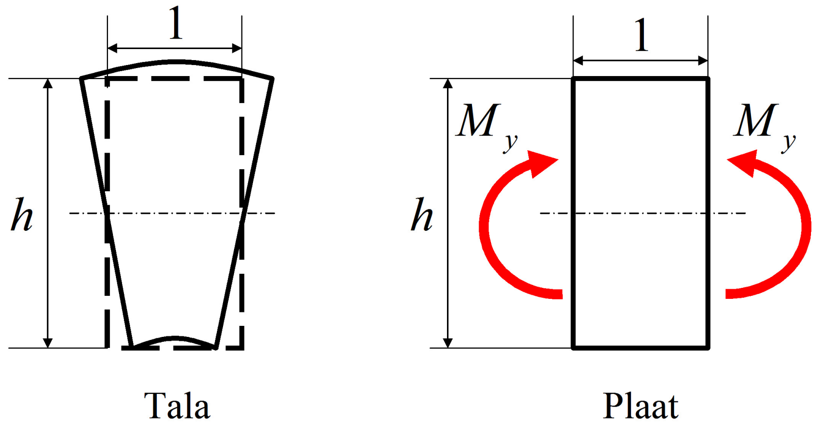
Läbipainete võrdlemiseks tuleb võrrelda plaadi paindejäikust $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ühikulise laiusega tala[7] paindejäikusega $EI = Eh^3/12$. Kuna plaadi paindejäikus on tala omast suurem, siis on plaadi läbipaine tala omast väiksem.

Sisejõud määratakse seostest (6.13) ja (6.14). Kuna $w = w(x)$, siis ka paindemomendid ja põikjõud on vaid koordinaadi x funktsioonid.

$$M_x = -D\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2}, \qquad M_y = -\nu D\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = \nu M_x. \tag{6.28}$$

Võrreldes taladega tekivad seega plaadis ka paindemomendid M_y. Talas neid ei teki kuna tala ristlõiked saavad vabalt deformeeruda (joon. 6.7). On ilmselge, et paindemomendid M_y põhjustavad pingeid σ_y, mida tuleb arvesse võtta näiteks raudbetoonplaatide sarrustamisel: plaat tuleb kindlasti sarrustada ka pikisuunas.

[7] Plaadi koormus on antud pinna ühiku kohta, talal aga pikkusühiku kohta



Joonis 6.7: Paindemomendid M_y.

6.6.2 Ühtlaselt koormatud jäigalt kinnitatud elliptiline plaat

See on üks vähestest plaadi painde ülesannetest, millele on võimalik leida analüütiline (täpne) lahend.

Vaatleme ellpitilist plaati (joon. 6.8), millele koordinaatteljed x ja y on sümmeetriatelgedeks. Sellisel juhul saame elliptilise plaadi kontuuri võrrandile kuju

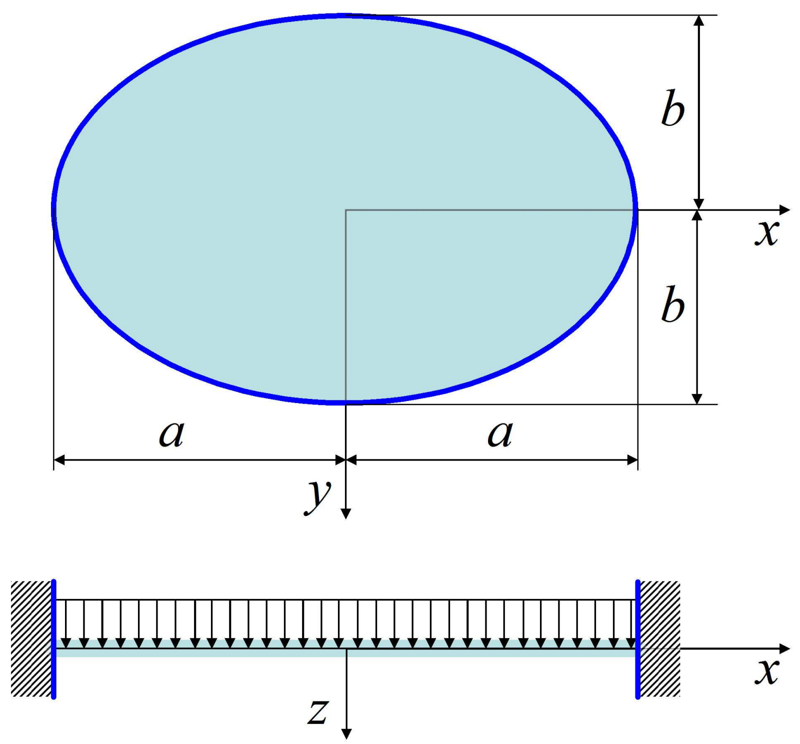
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6.29}$$

Näitame, et plaadi elastse pinna (keskpinna vertikaasiirete) avaldis kujul

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2, \tag{6.30}$$

kus w_0 on plaadi läbipaine koordinaatide alguses, rahuldab plaadi elastse pinna (diferentsiaal)võrrandit (6.10)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}$$



Joonis 6.8: Elliptiline plaat.

ja ääretingimusi jäigalt kinnitatud servas (6.19)

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \tag{6.31}$$

kus n on plaadi kontuuri normaal. On ilmselge, et plaadi kontuuril on esimene neist rahuldatud. Kuna plaadi kontuuril tuletised $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$, siis on tuletised suvalises suunas, kaasa arvatud normaal n, nullid ja ääretingimused (6.31) rahuldatud.

Nüüd leiame avaldisest (6.30) vajalikud osatuletised, paneme need elastse pinna võrrandisse (6.10) ja avaldame läbipande plaadi keskel —

$$w_0 = \frac{p}{D\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2b^2} + \frac{24}{b^4}\right)}. \tag{6.32}$$

Seega saab plaadi elastse pinna avaldis (6.30) kuju

$$w = \frac{p}{D} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2b^2} + \frac{24}{b^4}\right)}. \tag{6.33}$$

Kuna avaldis (6.33) rahuldab nii elastse pinna võrrandit kui ääretingimusi, siis on ta vaadeldava ülesande täpseks lahendiks.

Edasi on võimalik leida paindemomentide avaldised, kasutades valemeid (6.13)

$$\left\{\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \\ &= \frac{pa^2}{6 + 4\frac{a^2}{b^2} + 6\frac{a^4}{b^4}}\left[\left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) + \nu\frac{a^2}{b^2}\left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)\right], \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \\ &= \frac{pb^2}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}}\left[\left(1 - 3\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}\right) + \nu\frac{b^2}{a^2}\left(1 - 3\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2}\right)\right]. \end{aligned}\right. \tag{6.34}$$

Plaadi keskel, kus $x = y = 0$ saavad paindemomendid seega väärtuse

$$M_x = \frac{pa^2\left(1 + \nu\frac{a^2}{b^2}\right)}{6 + 4\frac{a^2}{b^2} + 6\frac{a^4}{b^4}}, \qquad M_y = \frac{pb^2\left(1 + \nu\frac{b^2}{a^2}\right)}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}}. \tag{6.35}$$

Vaadeldava kinnitusviisi tõttu on plaadi servas paindemomendid nullist erinevad. Eeldusel, et $a > b$ saame maksimaalse momendi plaadi servas kohal $x = 0$, $y = \pm b$:

$$\max M_k = -\frac{2pb^2}{6 + 4\frac{b^2}{a^2} + 6\frac{b^4}{a^4}}. \tag{6.36}$$

Erijuhul $a = b = r$ saame ellipsist ringi, st., elliptilise plaadi asemel vaatleme ringikujulist plaati ehk ümarplaati, mille korral momendid plaadi keskel ja servas saavad väärtuse

$$M_0 = \frac{pr^2}{16}(1 + \nu), \qquad M_k = -\frac{pr^2}{8}. \tag{6.37}$$

Et saada maksimaalset paindepinget plaadi ristlõikes, st., $\sigma(\pm h/2)$ tuleb saadud momendiavaldised jagada vastupanumomendiga $W = h^2/3$.

6.7 Elastse pinna võrrandi lahendamine ristkülikulise plaadi korral

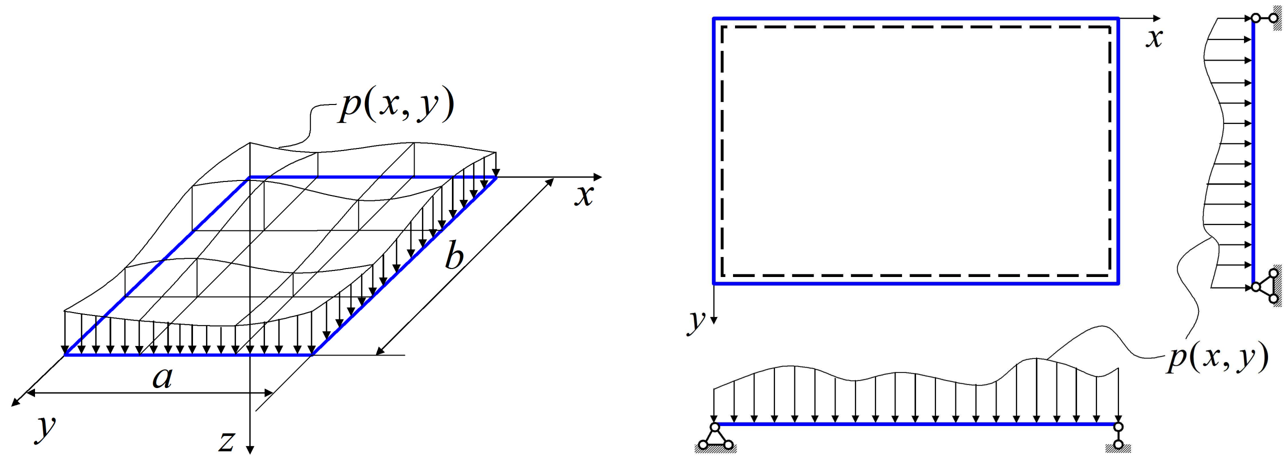
Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tuleb üldjuhul kasutada ligikaudseid meetodeid. Selliseid meetodeid on välja töötatud suhteliselt palju. järgmistes peatükkides vaatleme neist mõningaid.

6.7.1 Navier' meetod — lahendus kahekordsetes trigonomeetrilistes ridades

Vaatleme kõikidest servadest vabalt toetatud ristkülikplaati, mis on koormatud meelevaldse ristkoormusega $p(x, y)$. Vabalt toetatud plaadi elastset pinda saab kirjeldada kahekordse trigonomeetrilise rea abil:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.38}$$

Selle rea iga liige rahuldab ääretingimusi (6.21)



Joonis 6.9: Vabalt toetatud ristkülikplaat.

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{ja/või} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \tag{6.39}$$

seega ka kogu rea puhul on ääretingimused rahuldatud.

Plaadile rakendatud koormus arendatakse Fourier ritta, st.

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.40}$$

Tegurid B_{mn} leitakse matemaatilisest analüüsist tuntud valemite abil

$$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} dxdy. \tag{6.41}$$

Järgmise sammuna tuleb siire w ja koormus p asendada plaadi elastse pinna võrrandisse (6.10):

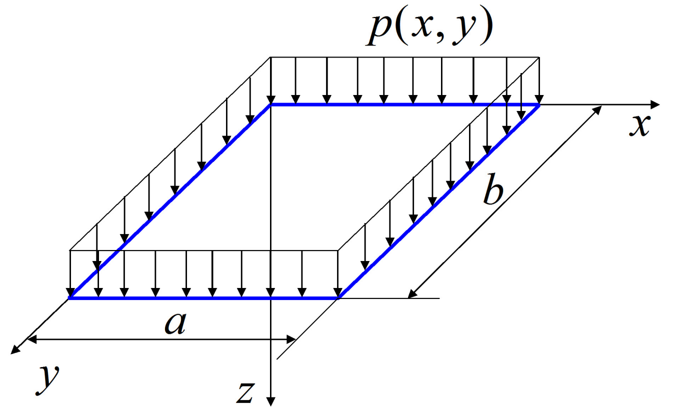
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right] \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} =$$
$$= \frac{1}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.42}$$

Kuna viimane võrrand peab kehtima iga m ja n korral, siis

$$C_{mn} = \frac{B_{mn}}{\pi^4 D\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]^2}. \tag{6.43}$$

Kokku oleme saanud plaadi elastse pinna jaoks avaldise

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}}{\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.44}$$



Joonis 6.10: Ühtlaselt koormatud ristkülikplaat.

Ühtlaselt jaotatud koormuse juht. Elastse pinna avaldise (6.44) rakendamise näitena vaatleme ühtlaselt koormatud plaati. Sellisel juhul kordajad

$$B_{mn} = \frac{4p}{ab}\int_0^a\int_0^b \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy. \tag{6.45}$$

Kuna integraal

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}dx = \begin{cases} 2a/m\pi, & \text{kui} \quad m = 1,3,5,\dots \\ 0, & \text{kui} \quad m = 2,4,6,\dots \end{cases} \tag{6.46}$$

siis

$$B_{mn} = \frac{4p}{ab}\frac{2a}{m\pi}\frac{2b}{n\pi} = \frac{16p}{\pi^2 mn}, \qquad m,n, = 1,3,5,\dots. \tag{6.47}$$

Elastse pinna avaldis saab antud juhul kuju

$$w(x,y) = \frac{16p}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{mn\left[(m/a)^2+(n/b)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.48}$$

Kui tähistada plaadi külgede pikkuste suhe $b/a = \beta$ (s.t. asendame $b = a\beta$), siis saame viimasele anda kasutamiseks mugavama kuju

$$w(x,y) = \frac{16pa^4}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{mn\left[m^2+(n/\beta)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a\beta}. \tag{6.49}$$

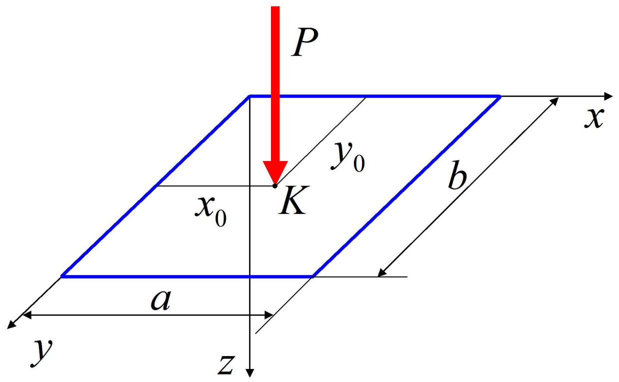
Sisejõudude leidmiseks tuleb viimasest avaldisest võtta piisaval arvul osatuletisi ning kasutada valemeid (6.13) ja (6.14):

$$
\left\{
\begin{aligned}
M_x &= \frac{16pa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{m^2 + \nu(n/\beta)^2}{mn\left[m^2 + (n/\beta)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a\beta}, \\
M_y &= \frac{16pa^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\nu m^2 + (n/\beta)^2}{mn\left[m^2 + (n/\beta)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a\beta}, \\
T_{xy} &= -\frac{16(1-\nu)pa^2}{\pi^4\beta} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\left[m^2 + (n/\beta)^2\right]^2} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{a\beta}, \\
Q_x &= \frac{16pa}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n\left[m^2 + (n/\beta)^2\right]} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a\beta}, \\
Q_y &= \frac{16pa}{\pi^3\beta} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m\left[m^2 + (n/\beta)^2\right]} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{a\beta}.
\end{aligned}
\right. \tag{6.50}
$$

Kui on vaja leida toereaktsioonid, siis tuleb kasutada valemeid (6.17) ja (6.18).

Et välja selgitada, mitu liiget ülaltoodud trigonomeetrilistes ridades tuleb võtta, tuleb uurida ridade koonduvust. Selgub, et kõige kiiremini koondub läbipainde avaldis (6.49). Pisut aeglasemalt koonduvad momentide avaldised ja veelgi aeglasemalt põikjõu ja toeraektsioonide avaldised.

Koondatud jõu juht. Olgu koondatud jõud P rakendatud plaadi punktis K



Joonis 6.11: Koondatud jõuga koormatud ristkülikplaat.

koordinaatidega x_0, y_0. Valemite tuletamiseks eeldame, et see jõud on jaotunud lõpmata väikesele pinnale $dxdy$ punkti K ümbruses:

$$p(x, y) = \frac{P}{dxdy}. \tag{6.51}$$

Tegurid B_{mn} leitakse valemi (6.41) abil. Siin esineva kahekordse integraali arvutamisel tuleb arvestada, et see integraal on null kõikjal peale punkti K, kus ta omab väärtust

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}. \quad (6.52)$$

Kasutades nüüd valemit (6.44) saame avaldise

$$w(x,y) = \frac{4P}{Dab\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.53)$$

Teades läbipainet, saame leida sise- ja reaktsioonjõud kasutades vastavaid avaldisi (6.13), (6.14), (6.17) ja (6.18).

Kuna rida (6.53) koondub aeglasemalt kui rida (6.49) ning tema abil saadud sise- ja reaktsioonjõude esitavad read aeglasemalt kui ühtlaselt jaotatud koormusele vastavad read, siis tuleb koondatud jõudude puhul olla ettevaatlik. Teisisõnu, aktsepteeritava tulemuse saamiseks tuleb siin valida tunduvalt pikemad read kui ühtlaselt jaotatud koormuse korral.

Näide. Vaatleme ruutplaati, st. $b/a = \beta = 1$, millel Poissoni tegur $\nu = 0,3$ ja millele mõjub ühtlaselt jaotunud koormus $p(x,y) = p$. Leiame plaadi läbipainde, sisejõud ja toereaktsioonid mõnedes iseloomulikes punktides piirdudes vaid trigonomeetriliste ridade nelja esimese liikmega, st., $m,n = 1,3$.

Läbipaine plaadi keskel, st. punktis $x = 0,5a$ ja $y = 0,5b = 0,5a$.
Kasutame valemit (6.49). Vaja on leida järgmised suurused:

- $\sin(m\pi x/a), \ldots$
- $1/\left\{mn\left[m^2 + (n/\beta)^2\right]^2\right\}$, $m,n = 1,3$
- w avaldis arvestades, et $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$.

Tulemusena saame

$$w = 0,0443pa^4/Eh^3. \quad (6.54)$$

Paindemomendid plaadi keskel. Analoogiline protseduur annab tulemuseks

$$M_x = M_y = 0,0470pa^2. \quad (6.55)$$

Väändemoment plaadi nurgas $x = y = 0$ avaldub kujul

$$T_{xy} = -0,0315pa^2, \tag{6.56}$$

ning *põikjõud ja toereaktsioon külje $x = 0$ keskel*

$$Q_x = 0,28pa; \qquad R_x = 0,36pa. \tag{6.57}$$

- Positiivsed paindemomendid viitavad sellele, et plaadi alumine pool on tõmmatud.
- Vastavalt valemile (6.18) põhjustab väändemoment plaadi nurkades nn. täiendava koondatud reaktsioonjõu $R_o = 2T_{xy} = -0,0630pa^2$. Kuna nurgas $x = y = 0$ on R_o positiivne suund üles (vt. vastavat joonist), siis antud juhul on R_o suunatud alla. See omakorda tähendab seda, et plaadi nurk püüab üles tõusta.
- Küljel $x = 0$ (välisnormaal on suunatud x-telje negatiivses suunas) on positiivsed Q_x ja R_x suunatud üles, st. z telje negatiivses suunas.

Tabelite kasutamisest. Samasugused arvutused saab läbi viia ka ühest erinevate β väärtuste jaoks ja suuremate liikmete arvuga ridade jaoks. Tulemused erinevad eeltoodud näitest vaid kordajate väärtuste poolest. Seega saab plaatide arvutamisel kasutatavatele valemitele (mis esitavad läbipaindeid, sisejõudusid jne.) anda järgmise kuju:
läbipaine ja paindemomendid plaadi keskel

$$w = k_1 \frac{pa^4}{Eh^3}; \qquad M_x = k_2 pa^2; \qquad M_y = k_3 pa^2; \tag{6.58}$$

põikjõud ja toereaktsioonid pikema külje keskel

$$Q_x = k_4 pa; \qquad R_x = k_6 pa; \tag{6.59}$$

põikjõud ja toereaktsioonid lühema külje keskel

$$Q_y = k_5 pa; \qquad R_y = k_7 pa; \tag{6.60}$$

koondatud reaktsioonjõud plaadi nurkades

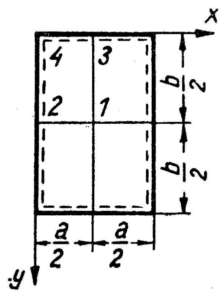
$$R_o = k_8 pab. \tag{6.61}$$

Kuna Poissoni teguri fikseeritud väärtuse (näiteks $\nu = 0,3$) korral sõltuvad konstantide $k_1, \ldots, k_8$ väärtused vaid suhtest β, siis on mõistlik koondada need konstantide väärtused tabelisse, eeldades seejuures, et $b > a$.

Äsjavaadeldud näite korral on konstantidel tabeli 6.1 põhjal järgmised väärtused: $k_1 = 0,0443$, $k_2 = 0,0479$, $k_3 = 0,0479$, $k_4 = 0,338$, $k_5 = 0,338$, $k_6 = 0,420$, $k_7 = 0,420$ ja $k_8 = 0,065$. Seega on näha, et läbipainde ja paindemomentide leidmisel piisabki vaid neljast esimesest rea liikmest (viga jääb alla 2%), kuid näiteks põikjõu korral oleks vaja rohkem liikmeid.

Taolised tabelid on koostatud ka teiste kinnitustingimuste ja koormusskeemide jaoks. Vastavalt ääretingimustele on seejuures kasutatud ka Navier meetodist erinevaid meetodeid. Järgnevalt on esitatud kuus tabelit, mille põhjal on võimalik arvutada läbipaindeid, sise- ja reaktsioonjõudusid ühtlasele koormusele allutatud ristkülikulise plaadi jaoks. Tabelid pärinevad õpikust «R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967 ».

Vabalt toetatud servadega plaat



$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \qquad Q_x^{(2)} = k_4 qa$$

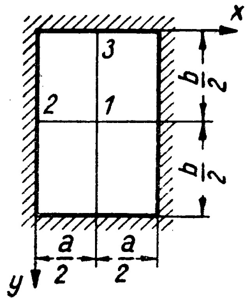
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2 \qquad Q_y^{(3)} = k_5 qa$$

$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2 \qquad R_x^{(2)} = k_6 qa$$

$$P_R = k_8 qab \qquad R_y^{(3)} = k_7 qa$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,0530	0,0554	0,0493	0,360	0,347	0,440	0,440	0,070
1,2	0,0616	0,0627	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453	0,074
1,3	0,0697	0,0694	0,0503	0,397	0,357	0,468	0,464	0,079
1,4	0,0770	0,0755	0,0502	0,411	0,361	0,478	0,471	0,083
1,5	0,0843	0,0812	0,0498	0,424	0,363	0,486	0,480	0,085
1,6	0,0906	0,0862	0,0492	0,435	0,365	0,491	0,485	0,086
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488	0,088
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491	0,090
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494	0,091
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496	0,092
3,0	0,1336	0,1189	0,0406	0,493	0,372	0,505	0,498	0,093
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500	0,094
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500	0,095
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500	0,095

Tabel 6.1: NB! Tabeli q on meil p ja tabeli P_R on meil R_0.



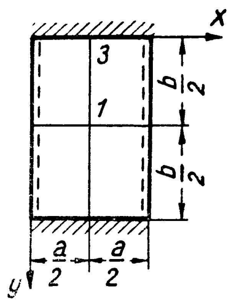
$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \qquad Q_x^{(2)} = k_6 qa$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2 \qquad Q_y^{(3)} = k_7 qa$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2 \qquad R_x^{(2)} = k_8 qa$$
$$M_x^{(2)} = -k_4 qa^2 \qquad R_y^{(3)} = k_9 qa$$
$$M_y^{(3)} = -k_5 qa^2$$

Jäigalt kinnitatud servadega plaat

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1,0	0,0138	0,0231	0,0231	0,0513	0,0513	0,452	0,452	0,440	0,440
1,1	0,0165	0,0264	0,0231	0,0581	0,0538	0,448	0,412	0,473	0,450
1,2	0,0191	0,0299	0,0228	0,0639	0,0554	0,471	0,381	0,493	0,457
1,3	0,0210	0,0327	0,0222	0,0687	0,0563	0,491	0,352	0,505	0,462
1,4	0,0227	0,0349	0,0212	0,0726	0,0568	0,505	0,327	0,510	0,464
1,5	0,0241	0,0368	0,0203	0,0757	0,0570	0,517	0,305	0,515	0,465
1,6	0,0251	0,0381	0,0193	0,0780	0,0571	—	—	—	—
1,7	0,0260	0,0392	0,0182	0,0799	0,0571	—	—	—	—
1,8	0,0267	0,0401	0,0174	0,0812	0,0571	—	—	—	—
1,9	0,0272	0,0407	0,0165	0,0822	0,0571	—	—	—	—
2,0	0,0276	0,0412	0,0158	0,0829	0,0571	—	—	—	—
∞	0,0284	0,0417	0,0125	0,0833	0,0571	—	—	0,500	0,465

Tabel 6.2: NB! Tabeli q on meil p.

Kahel vastasserval vabalt toetatud, kahel jäigalt kinnitatud plaat



Kui $a \geqslant b$:

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qb^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qb^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qb^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_4 qb^2$$

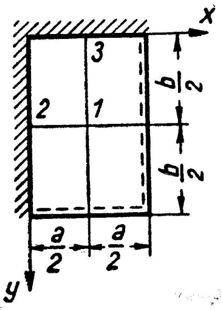
Kui $a \leqslant b$:

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_4 qa^2$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0,0284	0,0125	0,0417	0,0833
1/2	0,0284	0,0142	0,0420	0,0842
1/1,5	0,0270	0,0179	0,0406	0,0822
1/1,4	0,0262	0,0192	0,0399	0,0810
1/1,3	0,0255	0,0203	0,0388	0,0794
1/1,2	0,0243	0,0215	0,0375	0,0771
1/1,1	0,0228	0,0230	0,0355	0,0739
1	0,0214	0,0244	0,0332	0,0697
1,1	0,0276	0,0307	0,0371	0,0787
1,2	0,0349	0,0376	0,0400	0,0868
1,3	0,0425	0,0446	0,0426	0,0938
1,4	0,0504	0,0514	0,0448	0,0998
1,5	0,0582	0,0585	0,0460	0,1049
1,6	0,0658	0,0650	0,0469	0,1090
1,7	0,0730	0,0712	0,0475	0,1122
1,8	0,0799	0,0768	0,0477	0,1152
1,9	0,0863	0,0821	0,0476	0,1174
2	0,0987	0,0869	0,0474	0,1191
3	0,1276	0,1144	0,0419	0,1246
4	0,1383	0,1223	0,0390	0,1250
5	0,1412	0,1243	0,0379	0,1250
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,1250

Tabel 6.3: NB! Tabeli q on meil p.

Kahel naaberserval vabalt toetatud, kahel jäigalt kinnitatud plaat



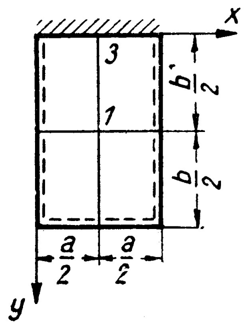
$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$
$$M_x^{(2)} = -k_4 qa^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_5 qa^2$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
1,0	0,0229	0,0304	0,0304	0,0678	0,0678
1,1	0,0276	0,0353	0,0311	0,0766	0,0709
1,2	0,0318	0,0397	0,0312	0,0845	0,0736
1,3	0,0353	0,0435	0,0308	0,0915	0,0754
1,4	0,0384	0,0469	0,0302	0,0975	0,0765
1,5	0,0415	0,0497	0,0293	0,1028	0,0772
1,6	0,0441	0,0521	0,0284	0,1068	0,0778
1,7	0,0463	0,0541	0,0274	0,1104	0,0782
1,8	0,0482	0,0557	0,0265	0,1134	0,0785
1,9	0,0497	0,0570	0,0256	0,1159	0,0786
2,0	0,0511	0,0582	0,0247	0,1180	0,0787
∞	0,0560	0,0625	0,0188	0,1250	—

Märkus. Maksimaalne väljamoment on paindemomendist $M_x^{(1)}$ 9—16% suurem.

Tabel 6.4: NB! Tabeli q on meil p.

Ühel serval jäigalt kinnitatud, teistel vabalt toetatud plaat



Kui $a \geqslant b$:

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qb^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qb^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qb^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_4 qb^2$$

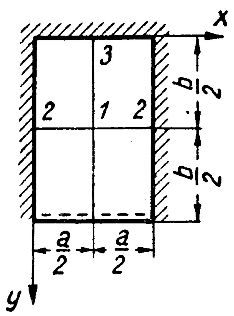
Kui $a \leqslant b$:

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_4 qa^2$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0,0569	0,0188	0,0625	0,1250
0,5	0,0530	0,0235	0,0601	0,1210
0,6	0,0489	0,0268	0,0573	0,1156
0,7	0,0444	0,0297	0,0529	0,1086
0,8	0,0399	0,0315	0,0484	0,1009
0,9	0,0352	0,0331	0,0437	0,0922
1,0	0,0304	0,0339	0,0391	0,0840
1,1	0,0387	0,0411	0,0422	0,0916
1,2	0,0468	0,0484	0,0443	0,0983
1,3	0,0549	0,0557	0,0461	0,1040
1,4	0,0627	0,0625	0,0471	0,1084
1,5	0,0702	0,0691	0,0478	0,1121
1,6	0,0774	0,0750	0,0481	0,1148
1,7	0,0842	0,0806	0,0481	0,1172
1,8	0,0903	0,0855	0,0477	0,1189
1,9	0,0961	0,0901	0,0473	0,1204
2,0	0,1012	0,0942	0,0470	0,1216
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,1250

Tabel 6.5: NB! Tabeli q on meil p.

Ühel serval vabalt toetatud, teistel jäigalt kinnitatud plaat



Kui $a \geqslant b$:

$$w^{(1)} = k_1 \frac{qb^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qb^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qb^2$$
$$M_x^{(2)} = -k_4 qb^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_5 qb^2$$

Kui $a \leqslant b$:

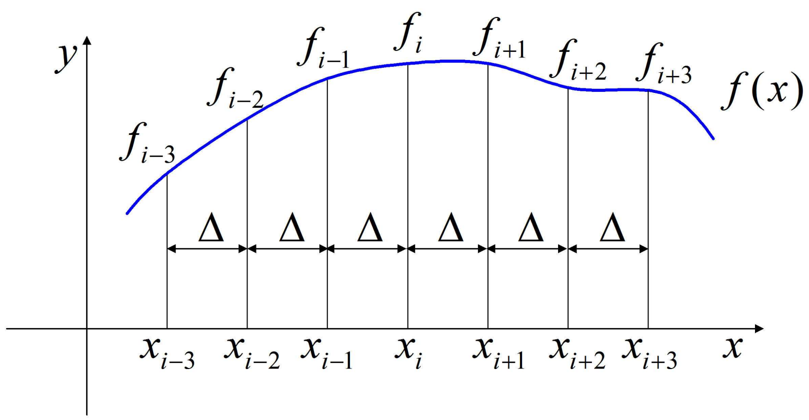
$$w^{(1)} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3}$$
$$M_x^{(1)} = k_2 qa^2$$
$$M_y^{(1)} = k_3 qa^2$$
$$M_x^{(2)} = -k_4 qa^2$$
$$M_y^{(3)} = -k_5 qa^2$$

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0	0,0569	0,0188	0,0625	—	0,1250
0,5	0,0491	0,0259	0,0558	0,0783	0,1140
0,6	0,0419	0,0290	0,0496	0,0773	0,1020
0,7	0,0346	0,0305	0,0428	0,0749	0,0907
0,8	0,0282	0,0306	0,0352	0,0708	0,0778
0,9	0,0223	0,0297	0,0294	0,0657	0,0658
1,0	0,0172	0,0278	0,0236	0,0600	0,0547
1,1	0,0197	0,0309	0,0230	0,0659	0,0566
1,2	0,0216	0,0336	0,0222	0,0705	0,0573
1,3	0,0230	0,0357	0,0211	0,0743	0,0574
1,4	0,0241	0,0374	0,0200	0,0770	0,0576
1,5	0,0251	0,0386	0,0190	0,0788	0,0569
1,6	0,0260	0,0397	0,0181	0,0803	0,0568
1,7	0,0266	0,0404	0,0172	0,0815	0,0567
1,8	0,0271	0,0410	0,0165	0,0825	0,0567
1,9	0,0274	0,0414	0,0158	0,0831	0,0566
2,0	0,0277	0,0417	0,0151	0,0833	0,0566
∞	0,0284	0,0417	0,0125	0,0833	0,0566

Tabel 6.6: NB! Tabeli q on meil p.

6.7.2 Võrgumeetod ehk lõplike vahede meetod

Võrgumeetod ehk lõplike vahede meetod on üks diferentsiaalvõrrandite numbrilise (arvulise) lahendamise meetoditest.



Joonis 6.12: Funktsioon $f(x)$ ja tema väärtused võrgusõlmedes $f(x_i) = f_i$.

Meetodi idee: tuletised leitakse nn. lõplike vahede abil.

- Vaatleme ühe muutuja funktsiooni $f(x)$ (vt. joonis 6.12)
- Jagame x telje osadeks võrdse sammuga $\Delta \equiv \Delta_x$ — saame 1D võrgu, mille $i-$ndas punktis $x = x_i$ ja $f(x_i) = f_i$.
- Tuletised punktis x_i leitakse valemite abil, mis põhinevad tuletise definitsioonil:

$$f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}, \qquad f''(x) = \left[f'(x)\right]', \ldots \tag{6.62}$$

-

$$f'(x_i) = f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta},$$

$$\begin{aligned} f''(x_i) = f''_i &= \frac{f'_{i+1} - f'_{i-1}}{2\Delta} = \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta^2} = \\ &= \frac{f'_{i+1/2} - f'_{i-1/2}}{\Delta} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta^2}, \end{aligned}$$

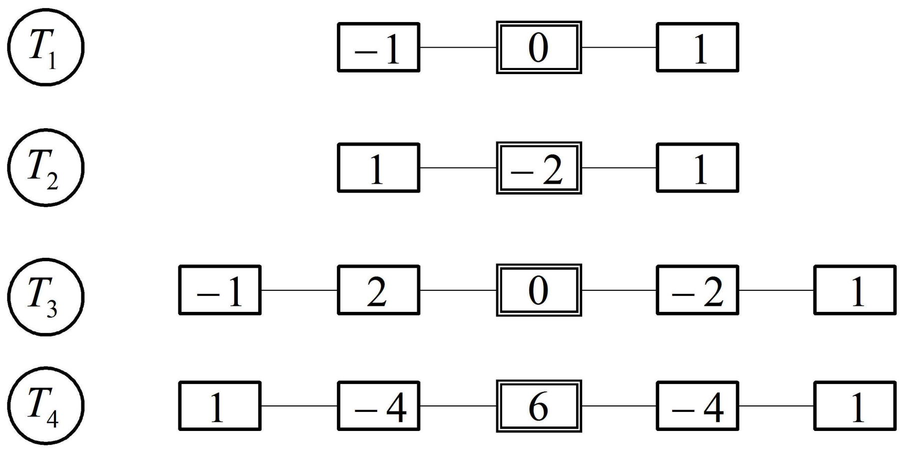
$$f'''(x_i) = f'''_i = \frac{f''_{i+1} - f''_{i-1}}{2\Delta} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta^3},$$

$$\begin{aligned} f''''(x_i) = f''''_i = f^{IV}_i &= \frac{f'''_{i+1} - f'''_{i-1}}{2\Delta} = \frac{f''_{i+1} - 2f''_i + f''_{i-1}}{\Delta^2} = \\ &= \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta^4}. \end{aligned} \tag{6.63}$$

- Tihti esitatakse need ja nendega sarnased valemid nn. graafiliste operaatorite abil (vt. joonis 6.13), mis esitavad võrgu sõlmedes leitud funktsiooni väärtuste $f_{i-2}, f_{i-1}, \ldots$ kordajaid.
- Olles näiteks tähistanud $i-$ndale tuletisele vastava graafilise operaatori T_i, saame funktsiooni f tuletiste leidmiseks valemid

$$f'_i = \frac{T_1 f}{2\Delta}, \quad f''_i = \frac{T_2 f}{\Delta^2}, \quad f'''_i = \frac{T_3 f}{2\Delta^3}, \quad f''''_i = \frac{T_4 f}{\Delta^4}. \tag{6.64}$$

- Nimetatud graafilised operaartorid on kui trafaretid, millega liigutakse mööda võrku ja määratakse $f_{i-2}, f_{i-1}, \ldots$ kordajad $i-$ndas sõlmes.



Joonis 6.13: Graafilised operaatorid funktsiooni $f(x)$ tuletiste $f_i' \ldots f_i''''$ numbriliseks leidmiseks.

Plaadi elastse pinna siirded, sisejõud ja toereaktsioond on kahe muutuja, x ja y, funktsioonid. Seega on nende korral vaja numbriliselt määrata osatuletisi nii x kui y järgi. Vastavad valemid on analoogilised ühe muutuja funktsioonide juures kasutatutega. Nüüd tuleb vaid kasutada kahte indeksit, näiteks punktis $x = x_i$ ja $y = y_k$ osatuletis

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{f_{i+1,k} - f_{i-1,k}}{2\Delta_x} \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{f_{i,k+1} - f_{i,k-1}}{2\Delta_y}, \tag{6.65}$$

kus Δ_x ja Δ_y on vastavalt võrgusammud $x-$ ja $y-$teljel.

- Kuna vaatleme ristkülikplaate, siis pole vaja osadeks jagada kogu x ja y telge — piirdume vaid plaadi külgede pikkuste lõikudega (joonis loengus). Teisisõnu, vaatlema lõike $0 \le x \le a$ ja $0 \le y \le b$, mille jagame osadeks sammudega

$$\Delta_x = \frac{a}{m}, \qquad \Delta_y = \frac{b}{n}, \tag{6.66}$$

- Vaatleme plaadi elastse pinna (diferentsiaal)võrrandit (6.10)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}$$

Tuues sisse tähistuse $W(x,y) = Dw(x,y)$, Saame viimasele kuju

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = p(x,y) \qquad \text{ehk} \qquad \nabla^2\left(\nabla^2 W\right) = p. \quad (6.67)$$

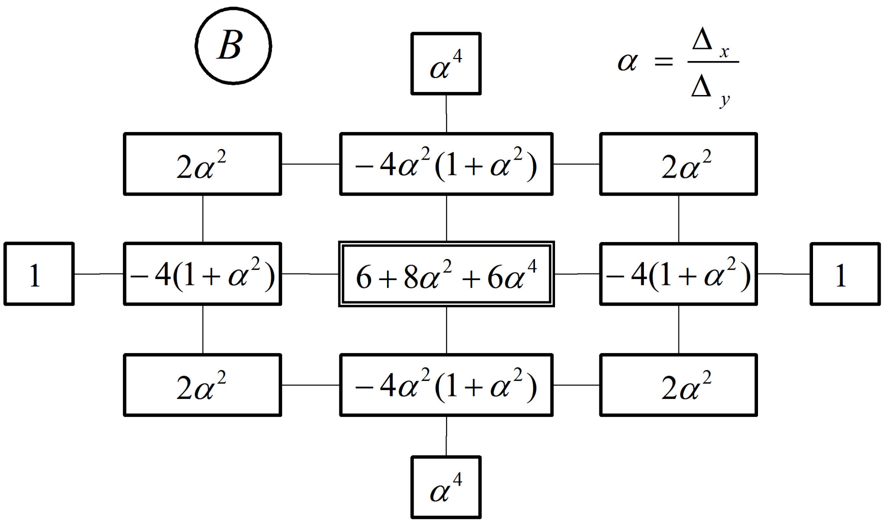
Viimases võrrandis on vaja leida neljandat järku osatuletised x ja y järgi ning samuti neljandat järku segaosatuletis.

- Võrrandi (6.67) vasakut poolt saab kujutada graafilise operaatori B abil (vt. joonis 6.14). Selleks tuleb liita võrrandi liikmetele vastavad graafilised operaatorid ning tuua sisse tähistus

$$\alpha = \frac{\Delta_x}{\Delta_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta_y} = \frac{\alpha}{\Delta_x}. \quad (6.68)$$

- Seejärel saab biharmooniline võrrand (6.67), st. plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand, kuju

$$BW = p\Delta_x^4. \quad (6.69)$$



Joonis 6.14: Biharmoonilise võrrandi graafiline operaator B.

- **Võrgupunktide liigitus.** Vastavalt valemitele (6.66) oleme katnud ristkülikplaadi võrguga kus on $(m+1)(n+1)$ punkti ehk sõlme (joonis loengus).
  - Võrgupunkte, mis asetsevad plaadi servadel nimetame *servapunktideks ehk rajapunktideks*.
  - Võrgupunkte, mis asetsevad servapunktidest seespool nimetame *avapunktideks*.
  - Kuna neljanda tuletise arvutamise valemeis on vaja teada funktsiooni väärtusi kahes naaberreas või naaberveerus, siis tuleb sisse tuua nn. *välis- ehk lisapunktid*, mis asuvad väljaspool plaati. Funktsiooni väärtused neis punktides määratakse rajatingimustest. Tavaliselt on võimalik piirduda ühe rea välispunktidega.
  - Punktide arv plaadil on $(m+1)(n+1)$, neist $(m-1)(n-1)$ on avapunktid ja $(m+1)(n+1)-(m-1)(n-1)=2(m+n)$ serva- ehk rajapunktid.

- **Plaadi paindeülesande lahendamiseks** tuleb lõplikes vahedes esitatud biharmooniline võrrand kujul (6.69) lahti kirjutada igas avapunktis.
  - Tulemusena saame võrrandisüsteemi, kus on avapunktide arvuga võrdne arv algebralisi võrrandeid. Saadud süsteemi lahend annabki meile plaadi elastse pinna siirded (läbipainded) avapunktides.
  - Servapunktide siirded on esitatud rajatingimuste abil.
- Kui siirded on leitud, siis nende abil saame leida sisejõud vastavalt valemitele (6.13)

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) = \dfrac{\mathcal{M}_x W}{\Delta_x^2}, \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) = \dfrac{\mathcal{M}_y W}{\Delta_y^2}, \\ T_{xy} = -(1-\nu)D\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu)\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = (1-\nu)\alpha\dfrac{\mathcal{T}_{xy} W}{4\Delta_x^2} \end{cases} \quad (6.70)$$

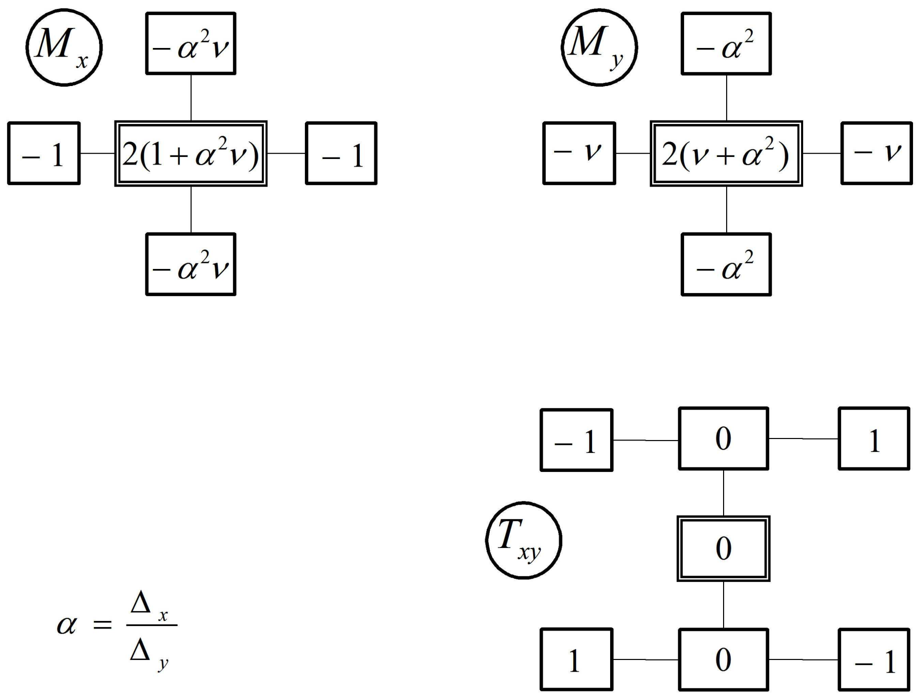
ja (6.14)

$$\begin{cases} Q_x = -D\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = \left(\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right) = \dfrac{\mathcal{Q}_x W}{2\Delta_x^3}, \\ Q_y = -D\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right) = \left(\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right) = \alpha\dfrac{\mathcal{Q}_y W}{2\Delta_x^3}. \end{cases} \tag{6.71}$$

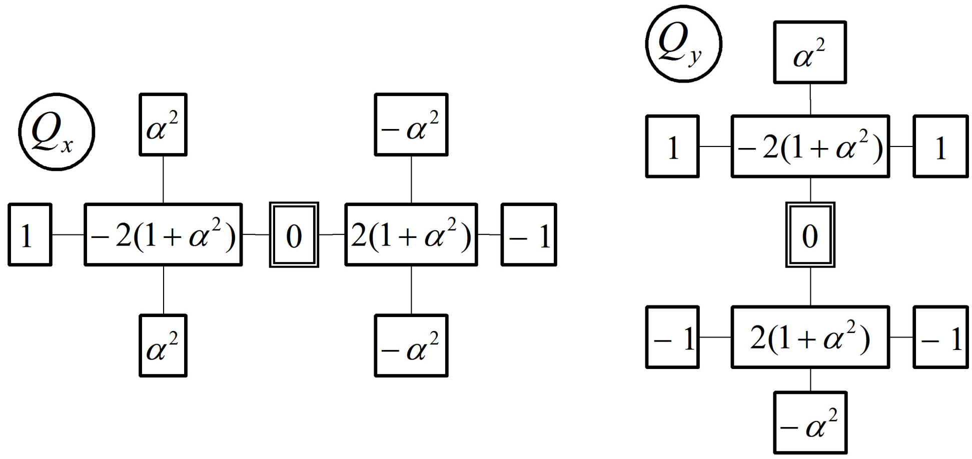
$\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{T}_{xy}, \mathcal{Q}_x$ ja $\mathcal{Q}_y$ on graafilised operaatorid (vt. joon. (6.15) ja (6.16)).

- Toereaktsioonide leidmise juures õnnestub plaadi elastse pinna võrrandi abil ellimineerida nn. teise rea välispunktid. Kasutades graafilisi operaatoreid $\mathcal{R}_x$ ja $\mathcal{R}_y$ (vt. joon. (6.17)–(6.20)) saab vastavad avaldised esitada kujul

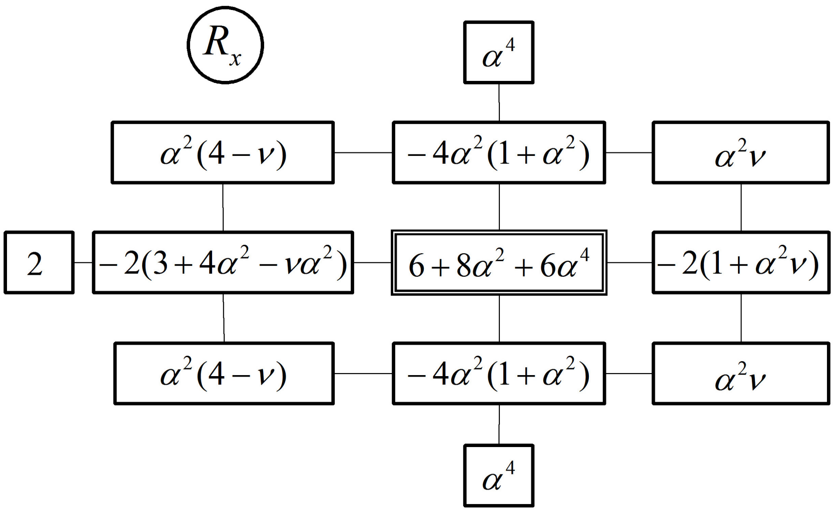
$$R_x = \frac{\mathcal{R}_x W}{2\Delta_x^3} - \frac{p\Delta_x}{2}, \qquad R_y = \frac{1}{\alpha}\frac{\mathcal{R}_y W}{2\Delta_x^3} - \frac{p\Delta_x}{2}. \tag{6.72}$$



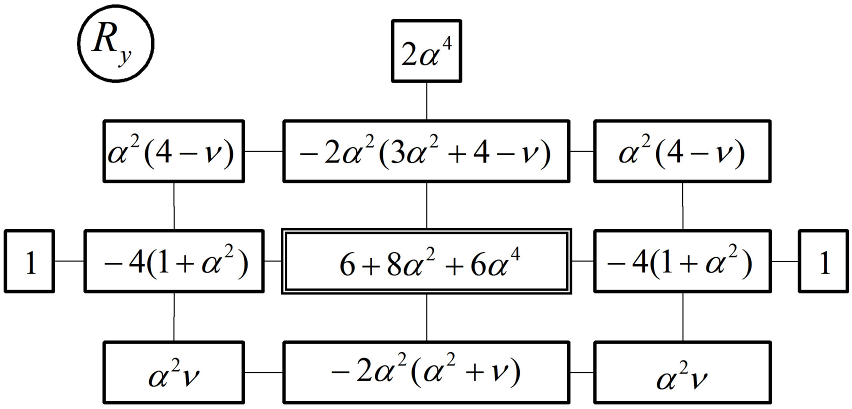
Joonis 6.15: Graafilised operaatorid painde- ja väändemomentide leidmiseks. (Tehnilistel põhjustel pole joonistel kasutatud samu fonte, mis tekstis.)



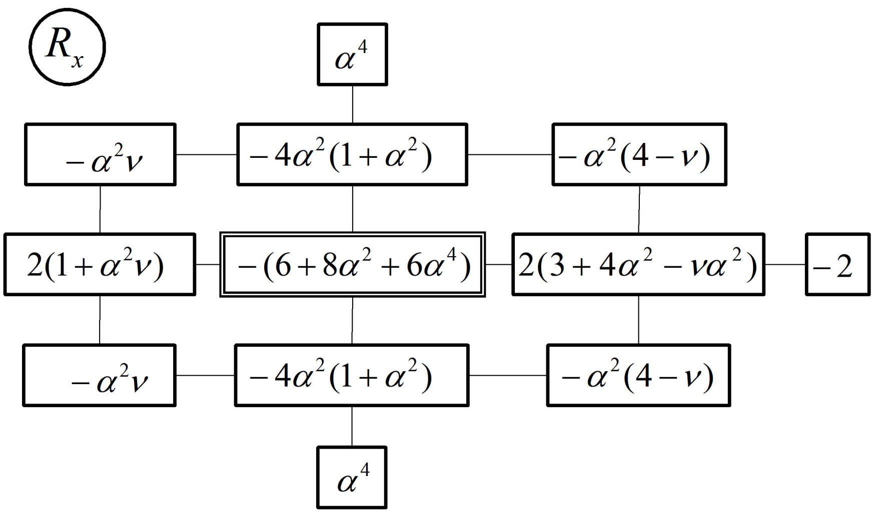
Joonis 6.16: Graafilised operaatorid põikjõudude leidmiseks. (Tehnilistel põhjustel pole joonistel kasutatud samu fonte, mis tekstis.)



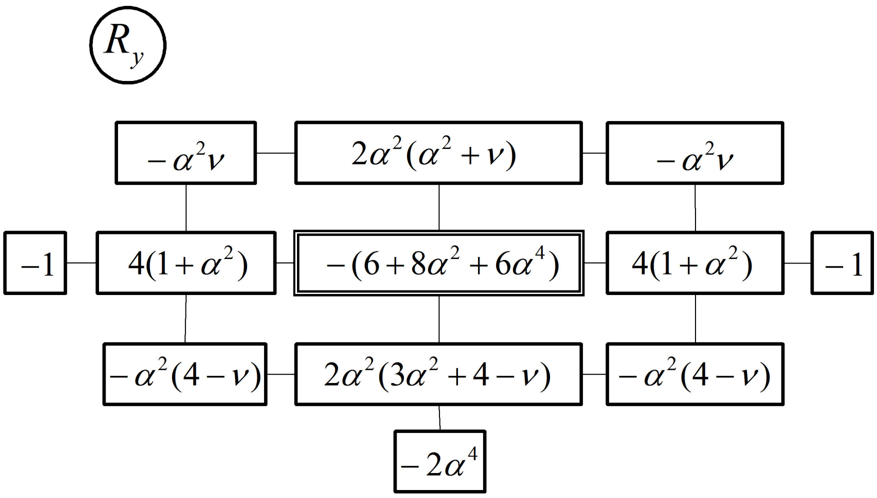
Joonis 6.17: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks. (Tehnilistel põhjustel pole joonistel kasutatud samu fonte, mis tekstis.)



Joonis 6.18: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks. (Tehnilistel põhjustel pole joonistel kasutatud samu fonte, mis tekstis.)



Joonis 6.19: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks. (Tehnilistel põhjustel pole joonistel kasutatud samu fonte, mis tekstis.)



Joonis 6.20: Graafilised operaatorid toereaktsioonide leidmiseks. (Tehnilistel põhjustel pole joonistel kasutatud samu fonte, mis tekstis.)

Ääretingimused.

- **Kinnisserv.** Servapunktides, mis on risti $x-$teljega

$$W_i = 0, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i-1,k} = W_{i+1,k}. \tag{6.73}$$

  Servapunktides, mis on risti $y-$teljega

$$W_i = 0, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{y=y_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i,k-1} = W_{i,k+1}. \tag{6.74}$$

- **Vabalt toetatud serv.** Servapunktides, mis on risti $x-$teljega

$$W_i = 0, \qquad (M_x)_{x=x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i-1,k} = -W_{i+1,k}. \tag{6.75}$$

  Servapunktides, mis on risti $y-$teljega

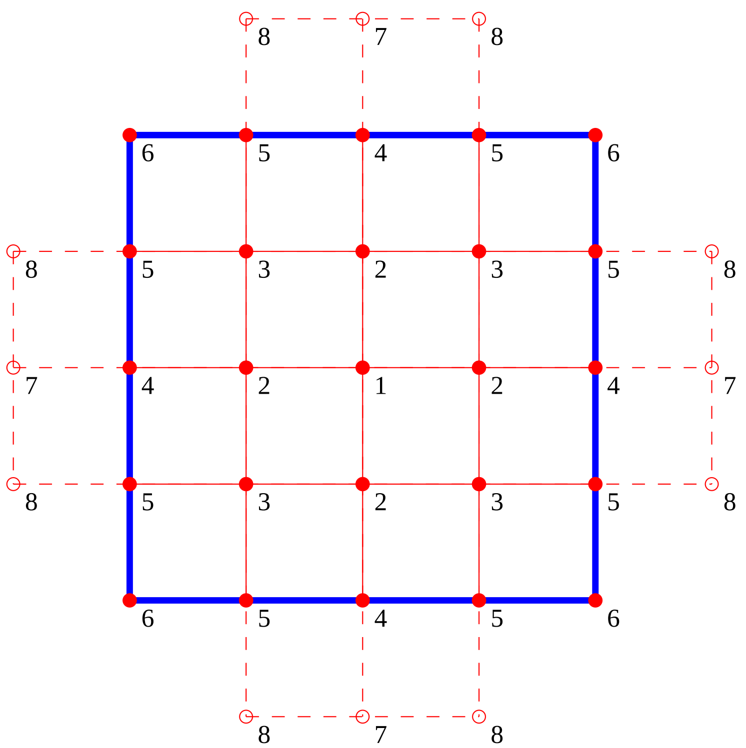
$$W_i = 0, \qquad (M_y)_{y=y_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{i,k-1} = -W_{i,k+1}. \tag{6.76}$$

- **Vaba serv.** Siin on olukord tunduvalt keerulisem, sest $W \neq 0$ ja W väärtusi raja- ja välispunktides ei õnnestu avaldada avapunktide kaudu. Selle asemel lisatakse avapunktides lahti kirjutatud plaadi elastse pinna võrranditele lisavõrrandid, mis väljendavad vaba serva tingimusi paindemomendi, põikjõu ja/või toereaktsiooni jaoks.

Näide. Ruutplaadile servapikkusega a mõjub ühtlaselt jaotunud koormus intensiivsusega p_o.

Leida plaadi keskpinna siirded avapunktides ja paindemomentide väärtused plaadi keskel ning servade keskpunktis kahel juhul: 1) kui kõik plaadi servad on jäigalt kinnitatud; 2) kui kõik plaadi servad on vabalt toetatud.

Katame plaadi pinna võrguga, mille samm $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = a/4$ (joonis 6.21). Seega oleme antud juhul valinud $n = m = 4$. Sümmeetria tõttu peame vaatlema vaid kolme sisepunkti ja kirjutama nende jaoks lahti biharmoonilise võrrandi, kasutades eeltoodud graafilist operaatorit B.



Joonis 6.21: Ruutplaati arvutusteks vajalikud võrgupunktid $n = m = 4$ korral.

Kui rajatingimusi ei arvesta, on tulemuseks kolmest võrrandist koosnev kaheksa tundmatuga võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 + 4W_4 + 0W_5 + 0W_6 + 0W_7 + 0W_8 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 25W_2 - 16W_3 - 8W_4 + 6W_5 + 0W_6 + 1W_7 + 0W_8 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 22W_3 + 4W_4 - 16W_5 + 2W_6 + 0W_7 + 2W_8 = p_o\Delta^4. \end{cases} \quad (6.77)$$

Mõlema rajatingimuse korral on siirded servapunktides nullid, st. $W_4 = W_5 = W_6 = 0$ ja tundmatute arv väheneb kolme võrra.

Jäiga kinnituse korral saame lisaks tingimused $W_7 = W_2$ ja $W_8 = W_3$ ning võrrandisüsteem (6.77) saab kuju

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 26W_2 - 16W_3 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 24W_3 = p_o\Delta^4. \end{cases} \quad (6.78)$$

Selle lahend on

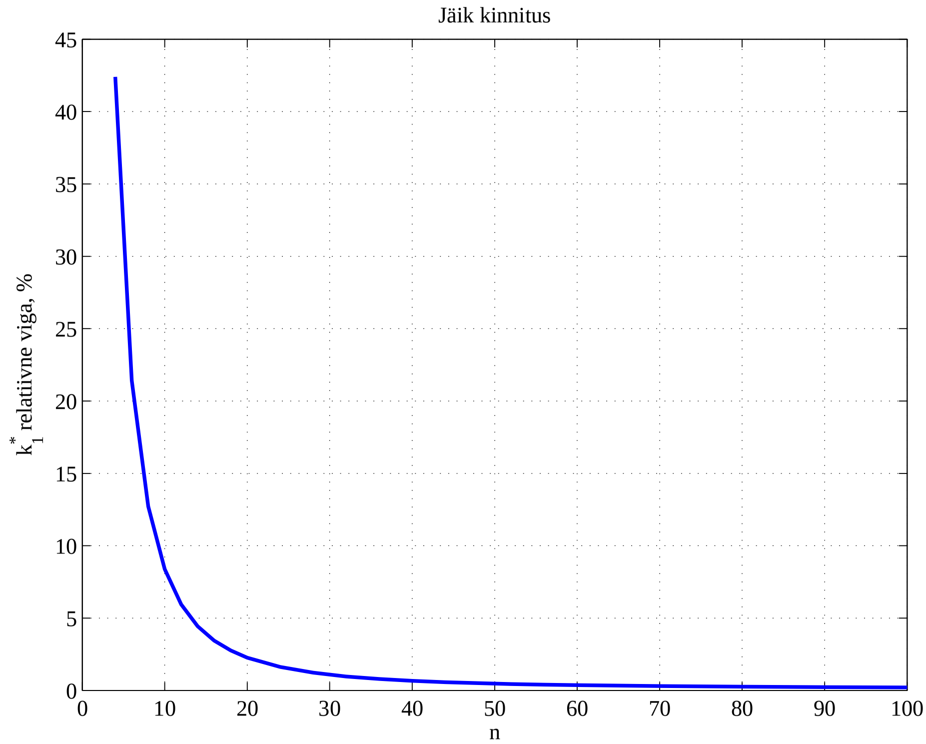
$$W_1 = 0,4607 p_o\Delta^4, \qquad W_2 = 0,3090 p_o\Delta^4, \qquad W_3 = 0,2093 p_o\Delta^4. \quad (6.79)$$

Paindemomendid ($\nu = 0.3$) ‡

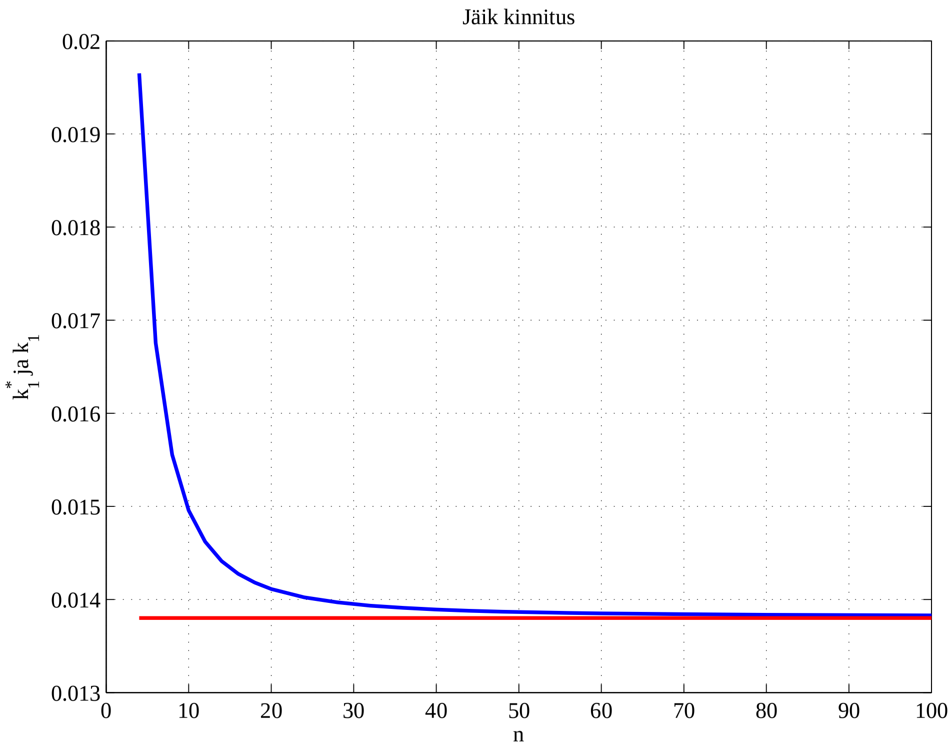
$$\begin{cases} M_1 = (2,6W_1 - 2W_2 - 0,6W_2)/\Delta^2 = 0,3944 p_o\Delta^2 = 0,0246 p_o a^2 \\ M_4 = -2W_2/\Delta^2 = -0,6180 p_o\Delta^2 = -0,0386 p_o a^2 \end{cases} \quad (6.80)$$

Et võrrelda saadud siirde W_1 väärtust tabelites antud konstandiga k_1 tuleb W_1 jagada suurusega $n^4/[12(1-\nu^2)]$. Tulemuseks on $k_1^* = 0.0197$, mis erineb tabelist saadud väärtusest $k_1 = 0,0138$. Et saavutada suuremat kooskõla, tuleb suurendada võrgupunktide arvu. Näiteks $n = 12$ korral saame $k_1^* = 0.0146$ ja $n = 24$ korral saame $k_1^* = 0.0140$ (vt. joonist 6.22 kus on esitatud vastav relatiivne viga sõltuvana võrgupunktide arvust ja joonist 6.23 kus on esitatud k_1^* sõltuvana võrgupunktide arvust).

Paindemomentide korral pole sellist ümberarvutamist vaja teha. Võrgupunktide arvule $n = 4$ vastavad $k_2^* = 0,0246$ ja $k_4^* = 0,0386$, tabelis $k_2 = 0,0231$ ja $k_4 = 0,0513$. Väärtusele $n = 12$ vastavad $k_2^* = 0,0232$ ja $k_4^* = 0,0495$ ning $n = 24$ vastavad $k_2^* = 0,0230$ ja $k_4^* = 0,0509$.



Joonis 6.22: Suuruse k_1^* relatiivne viga sõltuvana võrgupunktide arvust.



Joonis 6.23: Suuruse k_1^* väärtus sõltuvana võrgupunktide arvust (sinine kõver) ja tabeli konstandi k_1 väärtus (punane sirge).

Vaba toetuse korral saame lisaks rajatingimused $W_7 = -W_2$ ja $W_8 = -W_3$ ning võrrandisüsteem (6.77) saab kuju

$$\begin{cases} 20W_1 - 32W_2 + 8W_3 = p_o\Delta^4, \\ -8W_1 + 24W_2 - 16W_3 = p_o\Delta^4, \\ 2W_1 - 16W_2 + 20W_3 = p_o\Delta^4. \end{cases} \tag{6.81}$$

Selle lahend on

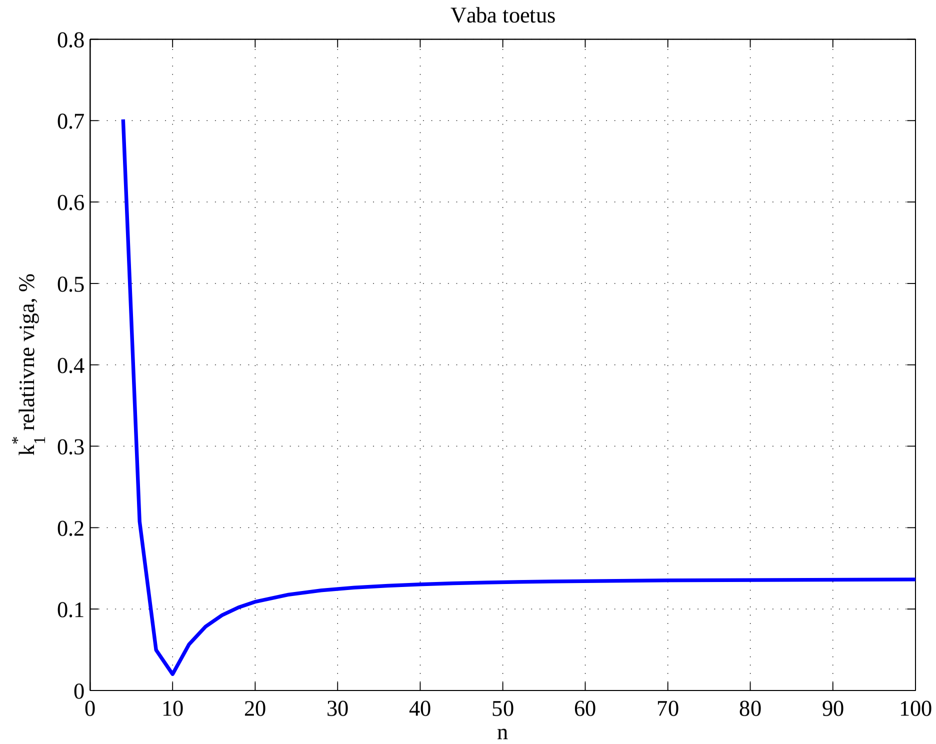
$$W_1 = 1,0313p_o\Delta^4, \qquad W_2 = 0,7500p_o\Delta^4, \qquad W_3 = 0,5469p_o\Delta^4. \tag{6.82}$$

Paindemomendid ($\nu = 0.3$)

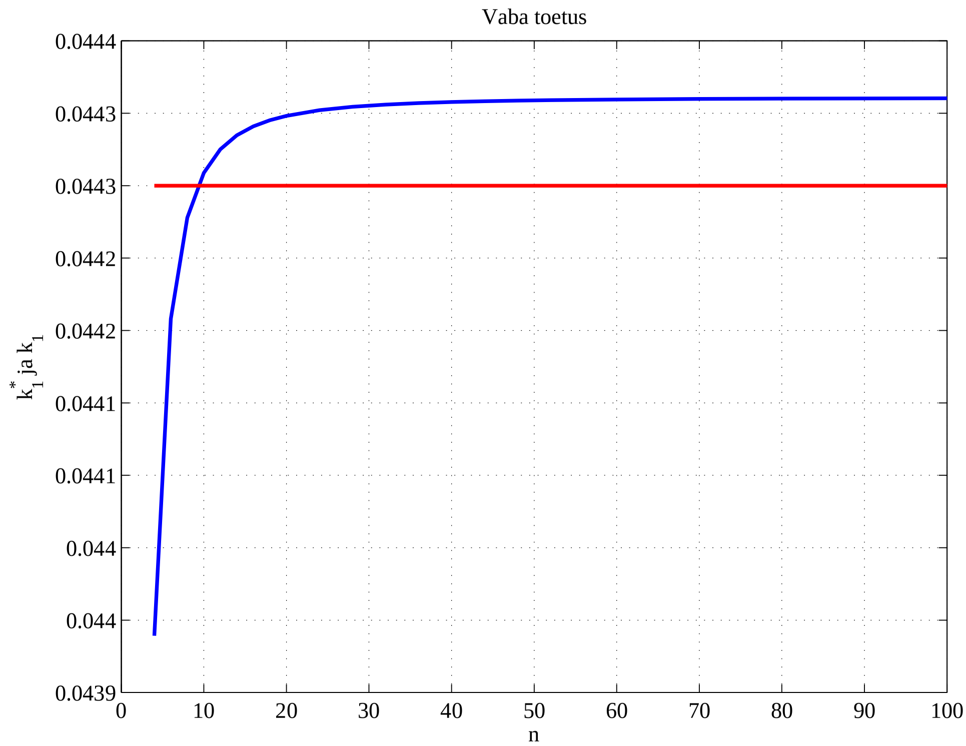
$$\begin{cases} M_1 = (2,6W_1 - 2W_2 - 0,6W_2)/\Delta^2 = 0,7312p_o\Delta^2 = 0,0457p_oa^2, \\ M_4 = (W_2 - W_2)/\Delta^2 = 0. \end{cases} \tag{6.83}$$

Et võrrelda saadud siirde W_1 väärtust tabelites antud konstandiga k_1 tuleb W_1 jällegi jagada suurusega $n^4/[12(1-\nu^2)]$. Tulemuseks on $k_1^* = 0.0440$, mis erineb tabelist saadud väärtusest $k_1 = 0,0443$ tunduvalt vähem kui jäiga kinnituse lahend (vt. joonist 6.24 kus on esitatud vastav relatiivne viga sõltuvana võrgupunktide arvust ja joonist 6.25 kus on esitatud k_1^* sõltuvana võrgupunktide arvust). Ka paindemomentide väärtused on antud juhul paremas

kooskõlas tabelis antutega. Tabelis $k_2 = 0,0479$, ja $n = 4; 12; 24$ vastavad $k_2^* = 0,0457; 0,0476; 0,0478$.



Joonis 6.24: Suuruse k_1^* relatiivne viga sõltuvana võrgupunktide arvust.



Joonis 6.25: Suuruse k_1^* väärtus sõltuvana võrgupunktide arvust (sinine kõver) ja tabeli konstandi k_1 väärtus (punane sirge).