

# Peatükk 3

## Deformatsioon

### 3.1. Siire ja deformatsioon

3 - 2

## 3.1 Siire ja deformatsioon

### 3.1.1 Cauchy seosed

Vaatleme deformeeruva keha meelevaldset punkti  $A$ . Algolekus on tema koordinaadid  $x, y, z$ . Välisjõudude toimel liigub ta asendisse  $A'$  koordinaatidega  $x', y', z'$ . Vektorit  $\overline{AA'}$  nimetatakse punkti  $A$  *siirdeks ehk siirdevektoriks*.<sup>1</sup>

Eristame kahte liiki siirdeid:

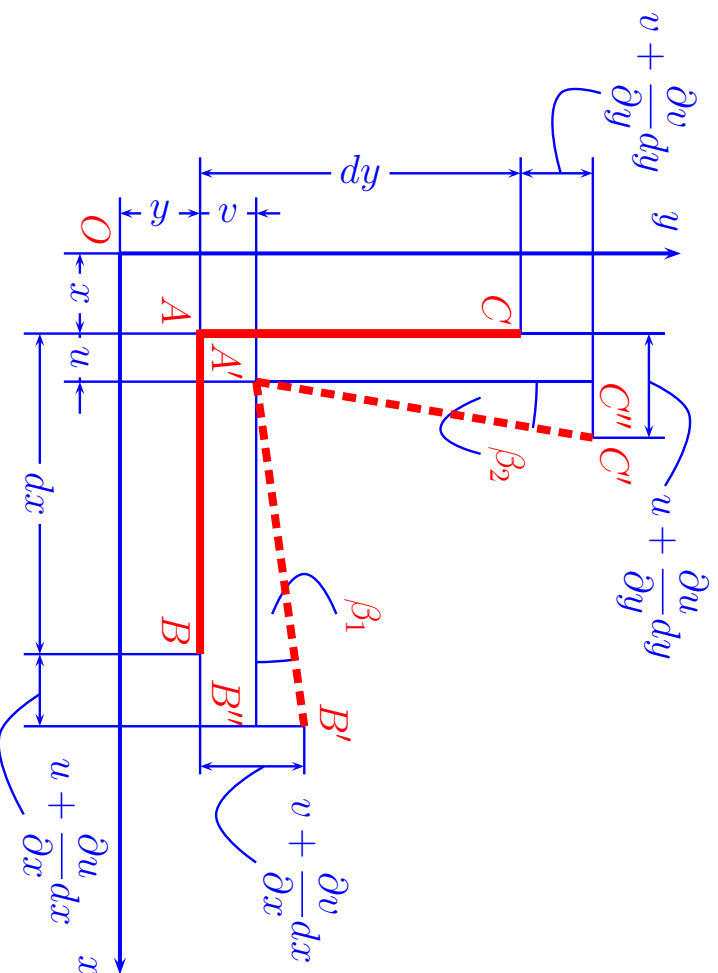
- keha kui terviku siirdeid (toimuvad ilma deformatsioonideta) — jäiga keha mehaanika<sup>2</sup>
- siirdeid, mis on seotud keha deformatsiooniga — käesolevas kursuses vaadeldakse vaid selliseid siirdeid.

Siirdevektori koordinaattelgede  $x, y, z$  sihilisi komponente tähistatakse  $u, v, w$ , st.,

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z. \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>Siirde sünonüüm on paigutus.

<sup>2</sup>Mittmed pideva keskkonna mehaanika õpikud nimetavad selliseid siirdeid *jäigaks deformatsiooniks*.



Joonis 3.1: Normaal- ja nihkedeformatsioon

## 3.1. Siire ja deformatsioon

## 3 - 4

Kui keha deformeerub, siis peavad erinevate punktide siirded olema erinevad, st.,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (3.2)$$

Vaatleme lõpmata väikese risttahuka kahe serva käitumist  $x, y$  tasandil (joon.

3.1). Enne deformatsiooni:

- $AB = dx \parallel x$  ja  $AC = dy \parallel y$ ;
- Punktide koordinaadid:  $A : (x, y)$ ;  $B : (x + dx, y)$ ;  $C : (x, y + dy)$ .

Peale deformatsiooni:  $A \rightarrow A'$ ;  $B \rightarrow B'$  ja  $C \rightarrow C'$ . Vastavad siirded:

- Punkt  $A$ :  $u$  ja  $v$ ;
- Punkt  $B$ :  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$  ja  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ ;
- Punkt  $C$ :  $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$  ja  $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ ;

Kuna lineaarses elastsusteoorias on kõik muutused väikesed, siis on väikesed ka servade  $AB$  ja  $AC$  pöördenurgad, st.,  $\cos \beta \sim 1$ ,  $\sin \beta \sim \beta$  ja  $\tan \beta \sim \beta$ .

Seetõttu lõikude  $AB$  ja  $AC$  suhtelised pikenedemised (koordinaatide  $x$  ja  $y$  sihilised normaaldeformatsioonid)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{A'B'' - AB}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} \approx \frac{A'C'' - AC}{AC} = \frac{(dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v) - dy}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

### 3.1. Siire ja deformatsioon

ja pöörded

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 \approx \tan \beta_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=\varepsilon_x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \beta_2 \approx \tan \beta_2 = \frac{C'C''}{A'C''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial u}{\partial y} dy} = \dots = \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

*Nihke ehk nihkedeformatsioon on defineeritud kui algsse täisnurgaga muutus, st. nihke  $xy$  tasandil*

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Analoogiliselt saab leida suhtelised pikenemised (normaaldeformatsioonid) ja nihked teistel koordinaattasanditel. Kokku saame kuus seost deformatsiooni-komponentide  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  ja siirdekomponeentide  $u, v, w$  vahel:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Saadud seoseid nimetatakse tihti *Cauchy võrranditeks* või *Cauchy seosteks*.

**Märgireeglid:**

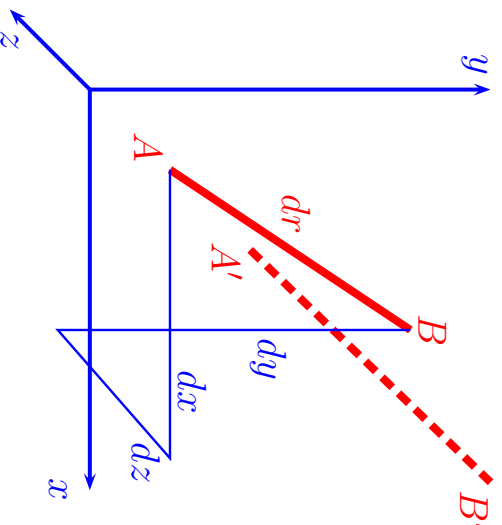
- pikenemisele vastav normaaldeformatsioon on positiivne;
- koordinaattelgedele positiivsete suundade vahelisele täisnurga vähenemisele vastav nihe on positiivne.

**Järeldus:** Positiivsed pinged põhjustavad positiivseid deformatsioone.

### 3.1.2 Orienteeritud lõigu pikenemine

Vaatleme kahte lõpmata lähedast punkti  $A$  ja  $B$ , kusjuures vektor  $\overline{AB} = d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ . Siinjüures on vektori  $d\mathbf{r}$  suunakoosinused

$$l = \frac{dx}{dr}, \quad m = \frac{dy}{dr}, \quad n = \frac{dz}{dr}.$$



Joonis 3.2: Lõigu  $AB$  deformatsioon

Vastava joonelemendi  $AB$  suhteline pikenemine (deformatsioon)

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB}. \quad (3.7)$$

Siin

$$\begin{cases} AB = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dr, \\ A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial r} dr\right)^2} = \dots \end{cases} \quad (3.8)$$

Kombineerides kahte viimast avaldist ning hinnates liikmete suurusjärke saame †

$$\varepsilon_r = l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3.9)$$

Teisendades osatuletised  $r$  järgi osatuletisteks koordinaatide  $x, y, z$  järgi, saame‡ †

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + lm \gamma_{xy} + mn \gamma_{yz} + ln \gamma_{xz}. \quad (3.10)$$

<sup>3</sup>Detailset tuletuskäiku vt. R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967 lk. 279–282.

### 3.1. Siire ja deformatsioon

### 3 - 10

**Rakendus tensomeetrias.** Olgu vaja määrata  $xy$  tasandi meelevaldses punktis normaaldeformatsioonid (suhtelised pikenemised)  $\varepsilon_x$  ja  $\varepsilon_y$  ning nihke  $\gamma_{xy}$ . Kuna antud juhul on  $n = 0$ , siis saame valemile (3.10) kuju

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + lm \gamma_{xy}. \quad (3.11)$$

Kaks lahendust:

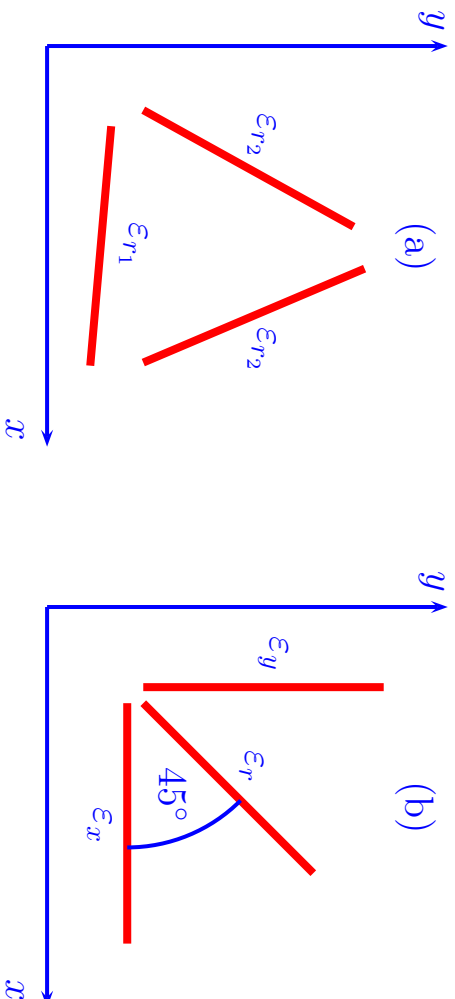
1. Vaadeldava punkti ümbrusse asetatakse kolm suvaliselt orienteeritud tensomeetrit (joon. 3.3 (a)). Tensomeetrite lugemid esitavad valemi (3.11) vasakut poolt kolme erineva orientatsiooniga lõigu jaoks. Kuna tensomeetrite orientatsioon on teada (s.o. määratud sihikoosinustega  $l, m, n$ ) saadakse kolmest lugemist kolm võrrandit otsitavate suuruste  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  ja  $\gamma_{xy}$  määramiseks.

2. Kui orienteerida kaks tensomeetrit telgede  $x$  ja  $y$  sihis (joon. 3.3 (b)), siis saame deformatsioonid  $\varepsilon_x$  ja  $\varepsilon_y$  otse tensomeetrite lugemitest,  $\gamma_{xy}$  aga avaldame võrrandist (3.11)

$$\gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_r - l^2 \varepsilon_x - m^2 \varepsilon_y}{lm}. \quad (3.12)$$

Üldjuhul on kolmas tensomeeter koordinaattelgede suhtes  $45^\circ$  nurga all. Seega  $l = m = \sqrt{2}/2$  ja

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_r - \epsilon_x - \epsilon_y. \quad (3.13)$$



Joonis 3.3: Tensomeetria näide.

### 3.2. Deformatsioonitensor

### 3 - 12

## 3.2 Deformatsioonitensor

Normaaldeformatsioonidest (suhtelistest pikennemistest) ja nihetest saab moodustada deformatsioonitensori

$$E = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Erinevalt pingetensorist on siin nihete kordajaks 0,5. Ilma selliste kordajateta ei alluks deformatsioonitensor tensorarvutuste reeglitele.

Analoogiliselt pingetensoriga saab ka deformatsioonitensorile leida peaväärtused ja peasuunad (ehk peavektorid) ning invariantid — tuleb lihtsalt rakendada analoogilisi valemeid ja arvutuseeskirju.

### 3.3 Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus

Üldjuhul muutub keha ruumala (maht) deformatsiooni käigus. Vaatleme lõpmata väikest risttahukat, mille ruumala enne deformatsiooni oli  $dV = dx dy dz$ . Serva  $AB$  pikkus enne deformatsiooni (vt. joon. 3.1) on  $dx$  ja peale deformatsiooni  $dx_1 = dx(1 + \varepsilon_x)$ . Analoogiliselt  $dy \rightarrow dy_1 = dy(1 + \varepsilon_y)$  ja  $dz \rightarrow dz_1 = dz(1 + \varepsilon_z)$ .

Keha ruumala peale deformatsiooni leiame lähtudes eeldusest, et normaaldeformatsioonid ja nihked on väikesed. Pärast mõningaid teisendusi, mille käigus hiljatakse teist ja kolmandat järku väikesed liikmed, saame deformeerunud elementaaristküliku mahuks  $dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ . *Ruumdeformatsioon* ehk *suhteline mahumuutus*<sup>4</sup> avaldub seega kujul

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.15)$$

Seega on ruumdeformatsioon võrdne deformatsioontensori esimese invariantiga. Teisest küljest, arvestades deformatsioonide  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ja  $\varepsilon_z$  definitsioone (3.6) on ruumdeformatsioon siirde divergents:

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

<sup>4</sup>I. k. *dilatation*

### 3.4. Pidevustingimused

3 - 14

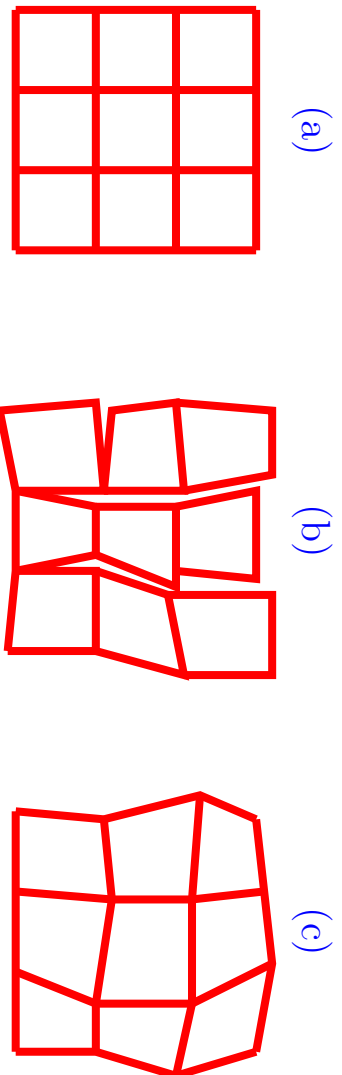
### 3.4 Pidevustingimused

Cauchy võrrandid (3.6) seovad kuus deformatsioonikomponenti  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  kolme siirdekomponendiga  $u, v, w$ .

- Kui on antud kolm siirdekomponenti  $u, v, w$ , siis võrrandite (3.6) abil on võimalik iheselt määrata kuus deformatsioonikomponenti  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ .
- Kui on antud kuus deformatsioonikomponenti  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ , siis pole võrrandite (3.6) abil võimalik kolme siirdekomponenti  $u, v, w$  iheselt määrata. Ühese lahendi saamiseks tuleb sisse tuua kuut deformatsiooni-komponenti siduvad lisatingimused (lisavõrrandid). Neid lisatingimusi nimetatakse *pidevustingimusteks*.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Pidevustingimusi nimetatakse ka pidevusvõrranditeks või sobivustingimusteks. Ingl. k. *compatibility conditions*.

Alternatiivne põhjendus pidevustingimuste sissetoomiseks.



Joonis 3.4: Pidevustingimused

Oletame, et vaadeldav keha on algolekus lõigatud väikesteks kuupideks (joon. 3.4 a). Kui iga kuupi on seejärel eraldi deformeeritud, siis on nende nuesti ühendamine selliselt, et tekkiks pidev keha üldjuhul võimatu (joon. 3.4 b). Selleks, et peale deformatsiooni oleks meil endiselt tegu pideva kehaga (joon. 3.4 c), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama teatud tingimusi, mida eestikeelses kirjanduses nimetatakse tavaliselt *pidevustingimusteks*.

### 3.4. Pidevustingimused

### 3 - 16

**Pidevusvõrrandite tuletamine.** Diferentseerime võrrandit (3.6)<sub>1</sub> kaks korda koordinaadi  $y$  järgi ja võrrandit (3.6)<sub>2</sub> kaks korda koordinaadi  $x$  järgi ning liidame saadud tulemused.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.16)$$

Kombineerides võrrandeid (3.6)<sub>1-3</sub> saame veel kaks analoogilist pidevusvõrrandit.

Neist aga ei piisa. Selleks, et saada veel kolm võrrandit, leiame võrrandeist (3.6)<sub>4-6</sub> osatuletised «puuduva koordinaadi» järgi, liidame (3.6)<sub>4-5</sub> ja lahutame saadud summast (3.6)<sub>6</sub>. Seejärel võtame saadud tulemusest osatuletise  $y$  järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \quad (3.17)$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks pidevusvõrrandit.



Kokku oleme saanud kuus pidevusvõrrandit, mis on tuntud ka *Saint-Venant'i pidevusvõrranditena*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

### 3.4. Pidevustingimused

Saadud kuuel võrrandil on väga selge füüsikaline sisu.

1. Esimesed kolm: kui on antud normaaldeformatsioonid (suhtelised pikene-  
mised) kolmes ristuvas sihis, siis nende sihtidega määratud tasandites ei  
saa nihkedeformatsiooni meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud  
avaldistega (3.18)<sub>1-3</sub>.
2. Viimased kolm: kui on antud nihkedeformatsioonid kolmes ristuvast tasa-  
pinnas, siis ei saa normaaldeformatsioone meelevaldselt ette anda, vaid nad  
on määratud avaldistega (3.18)<sub>4-6</sub>

## 3.5 Üldistatud Hooke'i seadus

### 3.5.1 Deformatsioonide avaldamine pingete kaudu

Klassikalises (lineaarses) elastusteoorias kehtib *üldistatud Hooke'i seadus*: deformatsioonitensori komponendid on lineaarsed funktsioonid pingetensori komponentidest. Kõige tildisemal juhul saab vastavad seosed esitada kujul<sup>6</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{xy} + C_{15}\tau_{yz} + C_{16}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{xy} + C_{25}\tau_{yz} + C_{26}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z = C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}\tau_{xy} + C_{35}\tau_{yz} + C_{36}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}\tau_{xy} + C_{45}\tau_{yz} + C_{46}\tau_{zx} \\ \gamma_{yz} = C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}\tau_{xy} + C_{55}\tau_{yz} + C_{56}\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} = C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}\tau_{xy} + C_{65}\tau_{yz} + C_{66}\tau_{zx} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Vimmased avaldised sisaldavad 36 *elastuskonstanti* — seda on palju!

---

<sup>6</sup>Sellisel kujul on pingete ja deformatsioonide vahelised seosed esitand näiteks õpikutes R. Eek, L. Poverus, Ehitrusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967 ja V. I. Samul, Osnovõ Teorii Uprugosti i Plastitšnosti /Elastus- ja plastusteooria alused/, Moskva, Vöšaja Škola, 1982.

### 3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

Kui eeldada, et keha on ideaalselt elastne (st. peale koormuse kõrvaldamist taastub algne kuju) ja isotroopne, siis jääb järele vaid kaks sõltumatut elastuskonstanti, mis on määratavad väga lihtsate eksperimentide abil ja on kasutuses ka tugevusõpetuses. Need kaks konstanti on Youngi moodul  $E$  ja Poissoni koeffitsent (Poissoni tegur)  $\nu$

- Tõmme-surve ( $x$ -telje sihis).
  - Elastuskonstant ehk Youngi moodul  $E$ :  $\varepsilon_x = \sigma_x / E$
  - Poissoni koeffitsent  $\nu$ :  $\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$
- Nihe ( $xy$  tasandis).
  - Nihkeelastusmoodul  $G$ :  $\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$ , kus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.20)$$

Kuna nihkeelastusmoodul  $G$  on avaldatav  $E$  ja  $\nu$  kaudu, siis ei saa teda pidada iseseisvaks elastuskonstandiks.

Üldistatud Hooke'i seaduse tuletamiseks vaatleme lõpmata väikest isotroopset risttahukat, milles mõjuvad vaid normaalpinged  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Pinge  $\sigma_x > 0$  põhjustab pikendamist  $x$ -telje sihis ja lühendamist  $y$ - ja  $z$ -telje sihis. Analooiline toime on normaalpingetel  $\sigma_y > 0$  ja  $\sigma_z > 0$ . Seega on summaarne suhteline pikennemine  $x$ -telje sihis ehk normaaldeformatsioon

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (3.21)$$

Nihkepingete ja nihkedeformatsioonide vahelised seosed on määratud Hooke'i seadusega iga koordinaattasandi jaoks sõltumatult, s.t.,  $\tau_{xy}$  põhjustab vaid nihet  $\gamma_{xy}$ , jne. (vrd. normaaldeformatsioonidega).

Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad *üldistatud Hooke'i seadust* isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (3.22)$$

### 3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

#### 3.5.2 Hooke'i seadus ruumdeformatsiooni jaoks

Vastavalt üldistatud Hooke'i seadusele (3.22)

$$\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{=\theta} = \frac{(1 - 2\nu)}{E} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{=I_1^\sigma} \quad (3.23)$$

Seega

$$\theta = \frac{(1 - 2\nu) I_1^\sigma}{E}. \quad (3.24)$$

Suurust  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  nimetatakse *ruumdeformatsiooniks* ja ta on tihtlasi ka deformatsioonitensori esimene invariant. Tuues sisse ruumpaisumismooduli  $K$  ja keskmise pinge  $\sigma_0$ ,

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1^\sigma}{3}, \quad (3.25)$$

saame lineaarse seose keskmise pinge ja ruumdeformatsiooni vahel kujul

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (3.26)$$

### 3.5.3 Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu

Liidame avaldise (3.22)<sub>1</sub> paremale poolele ja lahutame avaldise (3.22)<sub>1</sub> paremast poolst suuruse  $\frac{1}{E}\nu\sigma_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_x - \nu I_1^\sigma]. \quad (3.27)$$

Avaldades (3.24)-st invarianti  $I_1^\sigma = E\theta/(1 - 2\nu)$ , saame

$$\varepsilon_x = \frac{(1 + \nu)\sigma_x}{E} - \frac{\nu\theta}{(1 - 2\nu)}, \quad \text{kust} \quad \sigma_x = \frac{E\nu\theta}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{1 + \nu} \quad (3.28)$$

Tuues sisse *Lamé koefitsiendid*

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad (3.29)$$

saame valemist (3.28)<sub>2</sub>  $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$ .

### 3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

Leides analoogilised avaldised  $\sigma_y$  ja  $\sigma_z$  jaoks ning avaldades seostest (3.22) nihkepinged, olemegi saanud *Hooke'i seaduse alternatiivse kuju*

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Kasutades viimaseid valemmeid leiame seose pingetensori ja deformatsiooniten-sori esimese invarianti vahel

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{=I_1^\sigma} = 3\lambda\theta + 2\mu(\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_\theta), \quad \text{kust} \quad I_1^\sigma = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (3.31)$$

Kui tähistada keskmist normaaldeformatsiooni

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\theta}{3}, \quad (3.32)$$

siis saame seose keskmise pinge ja keskmise normaaldeformatsiooni vahel

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0. \quad (3.33)$$

### 3.5.4 Anisotroopsed kehad

Paljudes õpikutes<sup>7</sup> esitatakse valemitega (3.19) analoogilised pingete ja deformatsioonide vahelised seosed natuke teisel kujul. Esiteks tuuakse sisse tähistused

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad \sigma_4 = \tau_{yz}, \quad \sigma_5 = \tau_{xz}, \quad \sigma_6 = \tau_{xy} \quad (3.34)$$

ja

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_4 = 2\gamma_{yz}, \quad \varepsilon_5 = 2\gamma_{xz}, \quad \varepsilon_6 = 2\gamma_{xy}. \quad (3.35)$$

Seejärel esitatakse pinge sõltuvana deformatsioonist kujul

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

<sup>7</sup>Vt. näiteks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999

### 3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

ja deformatsioon sõltuvana pingest kujul

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Elastuskoeffitsientidest moodustatud maatriksit  $[C_{ij}]$  nimetatakse *jäikusmaatriksiks*<sup>8</sup>. Maatriksit  $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$  võib eesti keeles seega nimetada *pöördjäikusmaatriksiks*<sup>9</sup>.

<sup>8</sup>I. k. *stiffness matrix*

<sup>9</sup>I. k. *compliance matrix*. Tehnikasõnastikus on ingliskeelse sõna *compliance* eestikeelseks vasteks pakutud ka vektruvus.

Elmistes alajaotustes vaatlesime isotroopseid materjale ning seal oli pingete ja deformatsioonide vaheliste seoste kirjeldamiseks vaja vaid kahte sõltumatut elastsuskoeffitsienti. Anisotroopse keha puhul on elastsuskonstantide arv loomulikult suurem. Kuna anisotroopseid materjale on mitut liiki, siis tuleb vajalik elastsuskonstantide arv määrata iga liigi jaoks eraldi.

Ortotroopsed materjalid, näiteks vineer, on üks sagedamini esinevaid anisotroopse materjali liike. Sellisest materjalist kehade jaoks on võimalik määrata 3 omavahel ristuvat telge (peasuunada), mille sihis rakendatud normaalpinged ei põhjusta telgedevaheliste nurkade muutumist. Ortotroopse materjali elastsed omadused ei muutu telgede pööramisel 180° võrra, kuid muutuvad iga teistsuguse pöörde korral. Ortotroopse materjali iseloomustamiseks on vaja üheksat elastsuskonstanti. Valemid (3.37) saavad selliste materjalide korral kuju

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

kus

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3}, \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \\ S_{55} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{44} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Konstandid  $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{13}$  ja  $G_{23}$  on vastavalt Youngi moodulid, Poissoni tegurid ja nihkelastsusmoodulid peatelgedega 1, 2, 3 määratud sihtides<sup>10</sup>.

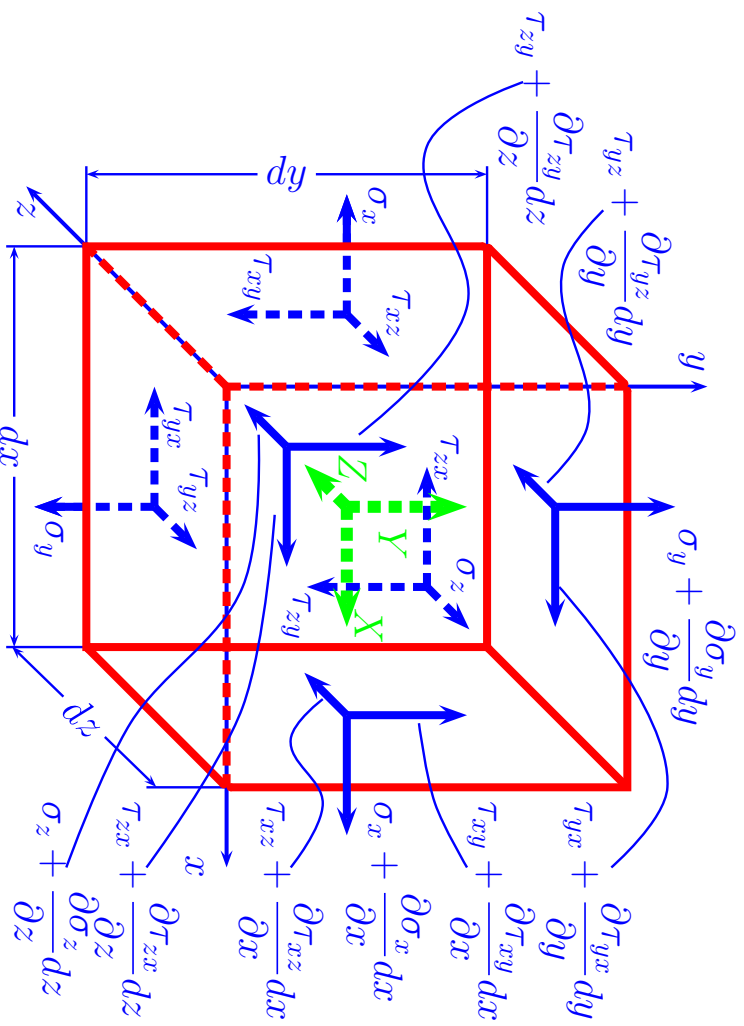
<sup>10</sup>Vt. lisaks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999 §1.4.6

### 3.6 Deformatsiooni potentsiaalne energia

Vaatleme lõpmata väikest risttahukat (joon. 3.5). Nagu on jooniselt näha, ei eelda me antud juhul enam homogenset pingust. Arvestame aga klassikalise elastusteooria eeldusi ja hüpoteese, mille kohasel on materjal ideaalselt elastne, deformatsioonid on väikesed ja kehtib superpositsiooni printsiip. Esmärkiks on leida *deformatsiooni potentsiaalne energia*, mis kehas on salvestunud. Selleks tuleb kõigepealt leida *töö*, mida tehakse *deformatsiooni muutumisel (suurenemisel) elementaarriisttahukas*.

- Vaatleme tahke, mis on risti  $x$  teljega. Feldame, et normaalpingete toimel suureneb deformatsioon  $d\varepsilon_x$  võrra ja tahkude vaheline kaugus seega  $d\varepsilon_x dx$  võrra.
  - Vastav elastsusjõu elementaartöö (huljates kõrgemat järku väikesed suurused):  $\sigma_x dydz\varepsilon_x dx$ .

#### 3.6. Deformatsiooni potentsiaalne energia



Joonis 3.5: Elementaarriisttahukas



- Vaatleme tahke, mis on risti  $x$  teljega ja tahke, mis on risti  $y$  teljega. Eeldame, et nihkepingete toimel muutub nurk  $x$  ja  $y$  telje vahel väikese suuruse  $d\gamma_{xy}$  võrra.
  - Vastav elastsusjõu elementaartöö (hiljates kõrgemat järku väikesed suurused):  $\tau_{xy}dydzd\gamma_{xy}dx$ .
- Analoogiliselt saab leida pingetele  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  ja  $\tau_{xz}$  vastavad tööd.

★

Rakendame superpositsiooni printsiipi ja saame summaarse elementaartöö

$$dA^* = (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}) dx dy dz. \quad (3.40)$$

Jagades viimase elementaarruumalaga  $dV = dx dy dz$ , saame elementaartöö tiheduse  $dA = dA^*/dV$ . Kuna eelduse põhjal on materjal ideaalselt elastne, siis on tehtud töö tõttu suurendatud elementaaristahuka potentsiaalset energiat  $dW^* = dA^*$  võrra. Edaspidi vaatleme seega suurust  $dW$ , st. potentsiaalse energia juurdekasvu ühikruumala kohta:

$$dW = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}. \quad (3.41)$$

### 3.6. Deformatsiooni potentsiaalne energia

3 - 32

Asendame saadud avaldise pinged  $\sigma_x, \dots$  tildistatud Hooke'i seadusest (3.30) ja saame

$$\begin{aligned} dW &= (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x) d\varepsilon_x + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y) d\varepsilon_y + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z) d\varepsilon_z + \\ &\quad + \mu\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \mu\gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \mu\gamma_{zx} d\gamma_{xz} = \\ &= \lambda\theta d\theta + 2\mu(\varepsilon_x d\varepsilon_x + \varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z) + \\ &\quad + \mu(\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \gamma_{zx} d\gamma_{xz}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Viimast avaldist integreerides leiame potentsiaalse energia tiheduse sõltuvana deformatsioonidest

$$W = \frac{1}{2} [\lambda\theta^2 + 2\mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (3.43)$$

Kuna Lamé koeffitsiendid (3.29) on positiivsed, siis peab ka potentsiaalne energia olema positiivne (või null) igas ideaalselt elastse keha punktis.

Kasutades taas Hooke'i seadust kujul (3.30) saame *Clapeyroni valemi*

†

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (3.44)$$



Viimastest saab omakorda avaldada  $W$  läbi pingete ja elastsuskonstantide  $E$  ja  $\nu$  kui kasutada Hooke'i seadust kujul (3.22)

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 2(1 + \nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (3.45)$$

Kuna  $W$  on potentsiaalne energia, siis peab avaldis (3.41) olema funktsiooni  $W$  täisdiferentsiaal, mis omakorda tähendab, et

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, & \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, & \sigma_z = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}, \\ \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, & \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}. \end{cases} \quad (3.46)$$

Viimased avaldised on tuntud *Castigliano valemite*na. Ülaltoodu kontrolliks leiame avaldistest (3.43)

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = \sigma_x, \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = \mu\gamma_{xy} = \tau_{xy}, \quad \dots \end{cases} \quad (3.47)$$

### 3.6. Deformatsiooni potentsiaalne energia

Et leida kehas salvestunud summaarne potentsiaalne energia  $\mathcal{W}$  tuleb potentsiaalse energia tihedust integreerida üle kogu keha ruumala  $V$ , st.

$$\mathcal{W} = \int_V W dV = \iiint_V W dx dy dz. \quad (3.48)$$

Rakendes Clapeyroni valemil avaldub summaarne potentsiaalne energia kujul

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.49)$$