

# Peatükk 7

## Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades

### *7.1. Üldvõrrandid*

### *7 - 2*

Mõningaid selliseid ülesandeid oleme juba eespool vaadelnud (näiteks alajaotused 5.11 ja 5.12). Käesoleva peatüki kahes esimeses paragrahvis vaadeldakse telgsümmeetriliste ülesannete lahendamist Love'i pingefunktsiooni ja Legendre'i polünoomide abil vabalt toetatud ümarplaadi paindeülesande näitel. Saadud lahendid on lineaarse elastsusteooria mõttes täpsed lahendid, st. lahendamisel lähtutakse elastsusteooria põhivõrranditest. Sellisele lähenemisiisile «vastandub» nn. 0-järku teooria, mille korral lähtutakse tala elastse joone või plaadi elastse pinnavaatamisest. Sellist lähenemist ümarplaadi paindeülesande lahendamisele vaatleme kolmandas paragrahvis.

## 7.1 Üldvõrrandid

Käesolevas alajaotuses leiavad käsitlemist ülesanded, kus ei esine vääned. Siinlindriliste koordinaatide  $(r, \vartheta, z)$  puhul tähendab see seda, et vastavatest siirdekompontidest  $v = 0$  ja komponendid  $u$  ja  $w$  ei sõltu koordinaadist  $\vartheta$ . Seega ka pingekomponendid ei sõltu koordinaadist  $\vartheta$  ja kaks neist  $\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = 0$ .

Nullist erinevad deformatsioonikomponendid avalduvad kujul

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (7.1)$$

Tasakaaluvõrrandid saavad aga kuju

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + R = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

kus  $R$  ja  $Z$  on koordinaatide  $r$  ja  $z$  sihiliste mahujõudude intensiivsus (dimensioon  $N/m^3$ ). Paljudel juhtudel on jällegi otstarbekas tuua sisse pingefunktsioon  $\varphi$ , mida siin nimetatakse Love'i pingefunktsiooniks.

Tasakaaluvõrrandid on rahuldatud kui valida

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), & \sigma_\vartheta = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], & \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{cases} \quad (7.3)$$

### 7.1. Üldvõrrandid

Siinjuures peab  $\varphi$  rahuldama biharmoonilist võrrandit

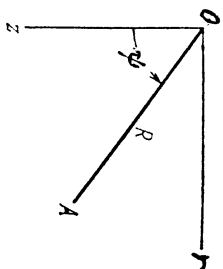
$$\nabla^4 \varphi = 0, \quad (7.4)$$

kus

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.5)$$

on Laplace'i operaator silindrilistes koordinaatides. Kuna antud juhul ei sõltu  $\varphi$  koordinaadist  $\vartheta$ , siis langeb Laplace'i operaatoris (7.5) kolmas liige välja. Siirdekomponeendid  $u$  ja  $w$  määratakse avaldistega

$$2Gu = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad v = 0, \quad 2Gw = 2(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (7.6)$$



Joonis 7.1: Sfäärilised koordinaadid.

Mõnel juhul on silindriliste koordinaatide asemel mõistlik kasutada sfäärilisi koordinaate, st.,  $r$  ja  $z$  asemel kasutatakse koordinaate  $R$  ja  $\psi$ . Nüüd on vaja (7.5)-s asendada osatuletised  $r$  ja  $z$  järgi. See üleminek on omakorda analoogne DRK  $x$  ja  $y$  ja polaarkoordinaatide  $r$  ja  $\vartheta$  vahelisele seosele. Saame

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \psi} \left( \frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}. \end{cases} \quad (7.7)$$

### 7.1. Üldvõrrandid

### 7 - 6

Seega omab biharmooniline võrrand (7.4) silindriliste koordinaatide puhul kuju

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \varphi = 0 \quad (7.8)$$

ja sfääriliste puhul

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (7.9)$$

Võrrandi (7.9) lahend peab samal ajal rahuldama ka Laplace'i võrrandit, st,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0. \quad (7.10)$$

Viimase erilahendit võib otsida kujul

$$\varphi_n = R^n \Psi_n, \quad (7.11)$$

kus  $\Psi_n$  on vaid muutuja  $\varphi$  funktsioon. Kokku saame viimasest kahest harilikku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left( \sin \psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} \right) + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad (7.12)$$

Kui tähistame  $x = \cos \psi$  ja valime  $x$  uueks sõltumatuks muutujaks, siis saame (7.12)-st Legendre'i võrrandi

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} - 2x \frac{d\Psi_n}{dx} + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad (7.13)$$

Selle võrrandi lahendid on esitatavad Legendre'i polünoomide  $P_n(x)$  kaudu:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x, & P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots, \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{cases} \quad (7.14)$$

Neid polünoome võib kasutada funktsioonidena  $\Psi_n$  avaldises (7.11) kusjuures igat neist võib veel korrutada konstandiga  $A_n$ .

### 7.1. Üldvõrrandid

Kasutades valemeid

$$x = \cos \psi, \quad Rx = z \quad \text{ja} \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (7.15)$$

saab minna tagasi muutujatele  $r$  ja  $z$ . Seejuures saab võrrandi (7.9) lahend kuju

$$\begin{cases} \varphi_0 = A_0, & \varphi_1 = A_1 z, \\ \varphi_2 = A_2 \left[ z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_3 = A_3 \left[ z^3 - \frac{3}{5}z(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_4 = A_4 \left[ z^4 - \frac{6}{7}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \varphi_5 = A_5 \left[ z^5 - \frac{10}{9}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \dots \end{cases} \quad (7.16)$$

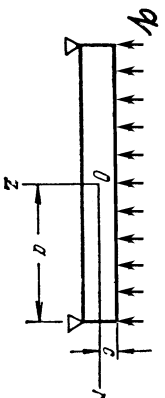
Toodud polünoomid on ka biharmoonilise võrrandi (7.4) lahendiks.

Saab näidata, et kui  $R^n \Psi_n$  osutub harmoonilise võrrandi (7.10) lahendiks, siis  $R^{n+2} \Psi_n$  rahuldab biharmoonilist võrrandit (7.4) (kuid ei rahulda (7.10)) Korrutades (7.16)  $R^2 = r^2 + z^2$ , saame uued lahendid

$$\begin{cases} \varphi_2 = B_2(r^2 + z^2), \\ \varphi_3 = B_3z(r^2 + z^2), \\ \varphi_4 = B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2), \\ \varphi_5 = B_5(2z^3 - 3r^2z)(r^2 + z^2), \\ \dots \end{cases} \quad (7.17)$$

### 7.2. Ümarplaadi paine

## 7.2 Ümarplaadi paine



Joonis 7.2: Sümmetriliselt jaotatud põikkooormusega koormatud ja servadest vabalt toetatud ümarplaat.

Vaatleme sümmetriliselt koormatud ümarplaati (joonis 7.2). Valides avaldis-test (7.16) ja (7.17) kolmandat järku polünoomid, saame pingefunktsiooni esitada kujul

$$\varphi = A_3(2z^3 - 3r^2z) + B_3(r^2z + z^3). \quad (7.18)$$

Avaldiste (7.3) põhjal saame seejärel pingekomponendid kujul

$$\begin{cases} \sigma_r = -6A_3 + (10\nu - 2)B_3, \\ \sigma_\theta = -6A_3 + (10\nu - 2)B_3, \\ \sigma_z = -12A_3 + (14 - 10\nu)B_3, \\ \tau_{rz} = 0. \end{cases} \quad (7.19)$$

Seega osutuvad pingekomponendid kogu plaadi ulatuses konstantseteks. Valimites (7.19) olevate konstantide  $A_3$  ja  $B_3$  määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi  $\sigma_r$  ja  $\sigma_z$  jaoks. Kokkuvõttes: kolmandat järku polünoomide abil saab esitada lahendi, mis vastab olukorrale, kus plaadi pinnale on rakendatud telgsümmeetrilised konstantsed koormused.

Valides (7.16) ja (7.17) neljandat järku polünoomid, saame pingekomponentide jaoks avaldised

$$\begin{cases} \sigma_r = 96A_4z + 4B_4(14\nu - 1)z, \\ \sigma_z = -192A_4z + 4B_4(16 - 14\nu)z, \\ \tau_{rz} = 96A_4r - 2B_4(16 - 14\nu)r. \end{cases} \quad (7.20)$$

Kui võtta  $96A_4 - 2B_4(16 - 14\nu) = 0$ , saame

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{ja} \quad \sigma_r = 28(1 + \nu)B_4z, \quad (7.21)$$

mis esitab plaadi puhast painet juhul kui ta servadesse on rakendatud ühtlaselt jaotatud momendid.

### 7.2. Ümarplaadi paine

### 7 - 12

Ühtlaselt jaotatud koormusele allutatud plaadi lahendi saamiseks lähtutakse kuuendat järku polünoomidest. Vastavatele pingetele (mida siin ei esita, kuid mis sisaldavad konstante  $A_6$  ja  $B_6$ ) lisatakse lahend (7.20) juhul  $B_4 = 0$  ja  $z$ -telje sihiline ühtlane tõmme  $\sigma_z = b$  lahendist (7.19). Seega tuleb rajatingimustest

$$\begin{cases} \sigma_z = 0, & z = c; & \sigma_z = -q, & z = -c; \\ \tau_{rz} = 0, & z = \pm c; \end{cases} \quad (7.22)$$

määrata neli konstanti  $A_6, B_6, A_4$  ja  $b$ .

Kokku saame

$$\begin{cases} \sigma_r = q \left[ \frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(3 + \nu)r^2 z}{32 c^3} - \frac{3z}{8c} \right], \\ \sigma_z = q \left[ -\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3z}{4c} - \frac{1}{2} \right], \\ \tau_{rz} = -\frac{3qr}{8c^3}(c^2 - z^2). \end{cases} \quad (7.23)$$

Valemite (7.23) puhul on huvitav see, et esitatav pingeaotus on analoogiline pingete  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$  jaotusega kitsa ristkülikulise tala puhul (võrdle valem (5.66) lk. 5-47). Tala valemite puhul tuleb arvestada, et sisse on toodud inertsimoment  $I = 2c^3/3$ . Radiaalsed pinged on esitatud paaritu funktsioonina koordinaadist  $z$  ja annavad servas tihthlaselt jaotatud paindemomendi.

Et saada lahendit servast vabalt toetatud plaadi jaoks, lisame pingevaldistele (7.23) lahendi (7.21) ja määrame konstandi  $B_4$  rajatingimusest

$$\int_{-c}^c \sigma_r z dz = 0, \quad r = a. \quad (7.24)$$

Seega saab vaba toetuse puhul radiaalse normaalpinge  $\sigma_r$  avaldis kuju

$$\sigma_r = q \left[ \frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(3 + \nu) r^2 z}{32 c^3} - \frac{3(2 + \nu) z}{8 c} + \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32 c^3} \right]. \quad (7.25)$$

Kui võtta  $r = 0$ , saame pinge  $\sigma_r$ , mis mõjub plaadi tsentris. Elementaarteooria puhul esitab pinget plaadi tsentris valem

$$\sigma_r = \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32 c^3}, \quad (7.26)$$

---

### 7.2. Ümarplaadi paine

### 7 - 14

s.o. (7.25) viimane liige. Kui plaadi paksus  $2c$  on väike võrreldes raadiusega  $a$ , siis osutuvad ka «parandusliikmed» väikesteks.

Puhata painde lisamisega ja rajatingimuse (7.24) rakendamisega kõrvaldasime me küll paindemomendid vabas servas  $r = a$ , kuid ei vabanenuid pingetest

$$\sigma_r|_{r=a} = q \left[ \frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(2 + \nu) z}{5 c} \right]. \quad (7.27)$$

Nende pingete peavektor ja peamoment plaadi servas on nullid, seega tuleb lahendi täpsuse ja «kehitivuse» hindamisel rakendada Saint-Venant'i printsiipi.

Kui kasutada kuundast kõrgemat järku polünoome, saab leida lahendeid juhtude jaoks, kus  $q = q(r)$ . Teist liiki Legendre'i polünoome ( $Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,  $Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, \dots$ ) kasutades saab leida lahendeid rõngasplaadi jaoks. Kõik need lahendid kehitivad juhul kui läbipainded on väikesed võrreldes paksusega  $2c$ . Suurte läbipainete puhul tuleb arvestada plaadi kesktasandi pikenemisega.

### 7.3 Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinnaga diferentsiaalvõrrand.

Siin alajaotuses rakendame ristkülikplaatidega analoogilist lähenemist: paragrahv 6.1 toodud plaatide paindeteooria hüpoteesid saavad telgsümmeetrilisel juhul kuju

$$\begin{cases} w(r, z) = w(r), & u(r, z) = -z \frac{dw(r)}{dr}, & \sigma_z = 0, \\ R(r, z) = 0, & Z(r, z) = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(r). \end{cases} \quad (7.28)$$

Seejärel saame tasakaaluvõrranditele (7.2) kuju

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \frac{\sigma_\vartheta}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(r). \end{cases} \quad (7.29)$$

#### 7.3. Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinnaga diferentsiaalvõrrand.

Viimasest kahest võrrandist saab elimineerida pinge  $\tau_{rz}$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_\vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\sigma_r)}{\partial r^2} = \frac{zp}{i}, \quad i = \frac{h^3}{12} \quad (7.30)$$

kus  $i$  on inertsimomendi intensiivsus. Elastse pinnaga diferentsiaalvõrrandi saamiseks tuleb nüüd deformatsioonid avaldada läbi siirete Cauchy seoste abil ning seejärel pinged deformatsioonide kaudu üldistatud Hooke'i seaduse abil. Tulemuseks on neljandat järku diferentsiaalvõrrand

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2d^3 w}{r dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p}{D}, \quad D = \frac{Ei}{1-\nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7.31)$$

Peale võrrandi (7.31) lahendamist saab leida normaalpinged

$$\begin{cases} \sigma_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \frac{z}{i}, \\ \sigma_\vartheta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \frac{z}{i}. \end{cases} \quad (7.32)$$



Nihkepinge  $\tau_{rz}$  saame leida võrrandi (7.29)<sub>1</sub> integreerimisel  $z$  järgi:

$$\tau_{rz} = \int \left[ \frac{\sigma_{\theta}}{r} - \frac{1}{r} (r\sigma_r) \right] dz = \dots, \quad (7.33)$$

kust peale rajatingimuste  $\tau_{rz}|_{z=\pm h/2} = 0$  rahuldamist saame

$$\tau_{rz} = -D \left( \frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \frac{3}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right). \quad (7.34)$$

Analoogiliselt valemitele (6.15) on pingete ja sisejõudude vahelised seosed kujul

$$\sigma_r = \frac{M_r z}{i}, \quad \sigma_{\theta} = \frac{M_{\theta} z}{i}, \quad \tau_{rz} = \frac{3Q_r}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad (7.35)$$

kust saame

$$\begin{cases} M_r = -D \left( \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_{\theta} = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right), \\ Q_r = -D \left( \frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \end{cases} \quad (7.36)$$

7.3. Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinnu diferentsiaalvõrrand.

7 - 18

Diferentsiaalvõrrandi (7.31) saab kirjutada lahendamiseks sobivamale kujule:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{D}. \quad (7.37)$$

Juhul kui  $p(r) = p_0 = \text{const}$  saame viimasest

$$w(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 + \frac{p_0 r^4}{64D}. \quad (7.38)$$

Konstantide  $C_1, \dots, C_4$  määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi  $w(r)$ ,  $dw(r)/dr$ ,  $M_r(r)$ ,  $M_{\theta}(r)$  või  $Q_r(r)$  jaoks. Vastavad avaldised omavad kuju

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dw(r)}{dr} &= 2C_1 r \ln r + C_1 r + 2C_2 r + \frac{C_3}{r} + \frac{p_o r^3}{16D}, \\ M_r(r) &= -D \left[ 2C_1(1+\nu) \ln r + C_1(3+\nu) + 2C_2(1+\nu) - \frac{C_3(1-\nu)}{r^2} \right] - \\ &\quad - (3+\nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ M_\theta(r) &= -D \left[ 2C_1(1+\nu) \ln r + C_1(1+3\nu) + 2C_2(1+\nu) + \frac{C_3(1-\nu)}{r^2} \right] - \\ &\quad - (1+3\nu) \frac{p_o r^2}{16}, \\ Q_r(r) &= -\frac{4DC_1}{r} - \frac{p_o r}{2}. \end{aligned} \right. \quad (7.39)$$

Suurstest (7.38) ja (7.39) on välisserval teada tavaliselt kaks. Rõngasplaadi puhul lisandub siseservas veel kaks tingimust, mis kokku võimaldavad määrata neli konstanti. Ümar- ehk ringplaatide korral peab konstant  $C_3 = 0$  — vastasel korral poleks siirded plaadi keskel lõplikud suurused, sest  $\ln r \rightarrow -\infty$  kui  $r \rightarrow 0$ . Samas,  $r^2 \ln r \rightarrow 0$ , kui  $r \rightarrow 0$ .

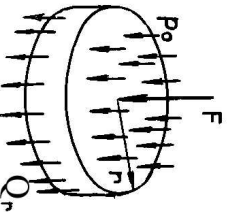
### 7.3. Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinnu diferentsiaalvõrrand.

Konstandi  $C_1$  määramiseks kasutame tingimust, et mööda suvalist kontsentri- list ringjoont mõjuv põikjõud peab tasakaalustama selle ringjoone sees mõjuva koormuse.

- **Ühtlane koormus  $p_o$ .** Eldades nii  $p$  kui  $Q_r$  jaoks positiivsed suunad (vt. joonis), saame

$$2\pi r Q_r + \pi r^2 p_o = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{p_o r}{2}. \quad (7.40)$$

Seega (7.39)<sub>4</sub> põhjal peab  $C_1 = 0$ .



- **Tsentris mõjuv koondatud jõud  $F$ .** Nüüd

$$2\pi r Q_r + F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{F}{2\pi r}. \quad (7.41)$$

Võttes avaldised (7.39)<sub>4</sub> koormuse  $p_0 = 0$  saame

$$Q_r = -\frac{4DC_1}{r} = -\frac{F}{2\pi r} \Rightarrow C_1 = \frac{F}{8D\pi}. \quad (7.42)$$

## 7.4 Ümar- ja rõngasplaatide käitumine erinevate koormusskeemide ja toetusviiside korral.

### 7.4.1 Rajatingimused

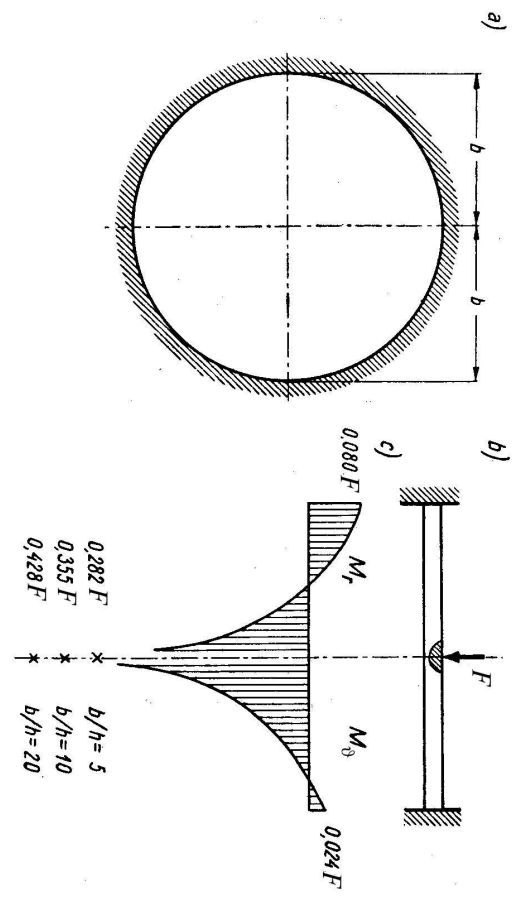
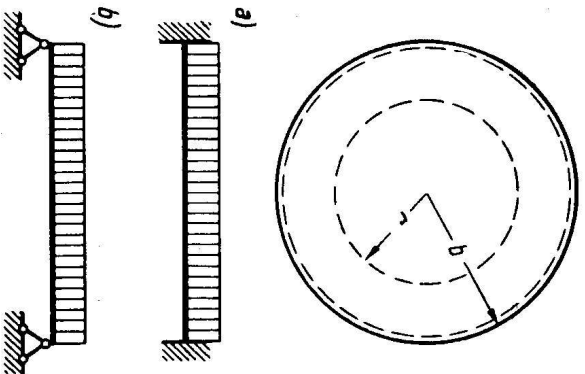
- jäik kinnitus
 
$$w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0; \quad (7.43)$$
- vaba toetus
 
$$w = 0, \quad M_r = 0; \quad (7.44)$$
- vaba serv
 
$$M_r = 0, \quad Q_r = 0. \quad (7.45)$$

### 7.4.2 Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat

### 7.4.2 Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat (vt. joonis 7.3).

Konstandid  $C_1 = C_3 = 0$  ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\begin{cases} w(r) = C_2 r^2 + C_4 + \frac{p_0 r^4}{64D}, \\ \frac{dw(r)}{dr} = 2C_2 r + \frac{p_0 r^3}{16D}, \\ M_r(r) = -2DC_2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{p_0 r^2}{16}, \\ M_\theta(r) = -2DC_2(1+\nu) - (1+3\nu)\frac{p_0 r^2}{16}, \\ Q_r(r) = -\frac{p_0 r}{2}. \end{cases} \quad (7.46)$$



Joonis 7.3: Ühtlaselt koormatud ümarplaadi paine.

Joonis 7.4: Koondatud jõuga koormatud ümarplaadi paine.

## 7.4.2. Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat

## a) Jäik kinnitus (vt. joonis 7.3 a))

Rajatingimused plaadi välisservas  $r = b$  on antud kujul  $w = 0$  ja  $dw/dr = 0$ . Kasutades viimaseid, saame määrata konstandid  $C_2$  ja  $C_4$ :

$$C_2 = -\frac{p_0 b^2}{32D}; \quad C_4 = \frac{p_0 b^4}{64D}. \quad (7.47)$$

Seega saavad siirete ja paindemomentide avaldised (7.46) lõpuks kuju

$$\begin{cases} w(r) = \frac{p_0}{64D} (b^2 - r^2)^2, \\ M_r(r) = \frac{p_0}{16} [b^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)], \\ M_\theta(r) = \frac{p_0}{16} [b^2(1 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \end{cases} \quad (7.48)$$

Vastavad ekstremalsed väärtused

$$\begin{cases} r = 0: & w = \frac{p_0}{64D} b^4, & M_r = M_\theta = \frac{p_0 b^2}{16} (1 + \nu), \\ r = b: & M_r = -\frac{p_0}{8} b^2, & M_\theta = -\frac{p_0 \nu}{8} b^2. \end{cases} \quad (7.49)$$

**Pinged.** Vastavalt valemitele (7.49) ja (7.48) *paindepinged*<sup>1</sup> *plaadi keskel*

$$\sigma_r|_{r=0} = \sigma_\theta|_{r=0} = \frac{3}{8}(1+\nu)p_0 \left(\frac{b}{2c}\right)^2 \quad (7.50)$$

ja *plaadi servas*

$$\sigma_r|_{r=b} = -\frac{3}{4}p_0 \left(\frac{b}{2c}\right)^2, \quad \sigma_\theta|_{r=b} = \nu \sigma_r|_{r=b}. \quad (7.51)$$

*Pingete suhe servas ja keskel* Poisson'i teguri  $\nu = 1/3$  korral

$$\left| \frac{\sigma_r|_{r=b}}{\sigma_r|_{r=0}} \right| = 1,5. \quad (7.52)$$

<sup>1</sup>Pingete-momentide vaheline seos:  $\sigma = 12Mz/(2c)^3$ ,  $\sigma_{\max} = 6M/(2c)^2$ ,  $2c$  on plaadi paksus.

Vt. ka A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

#### 7.4.2. Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat

**b) Vaba toetus (vt. joonis 7.3 b))**

Kasutades rajatingimusi plaadi välisservas  $r = b$  kujul  $w = 0$  ja  $M_r = 0$  saame määrata konstandid

$$C_2 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{p_0 b^2}{32D}, \quad C_4 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{p_0 b^4}{32D} - \frac{p_0 b^4}{64D}. \quad (7.53)$$

Pannes need väärtused avaldistesse (7.46) saame

$$\begin{cases} w(r) = \frac{p_0(b^2 - r^2)}{64D} \left( b^2 \frac{5+\nu}{1+\nu} - r^2 \right), \\ M_r(r) = \frac{p_0(3+\nu)}{16} (b^2 - r^2), \\ M_\theta(r) = \frac{p_0}{16} [b^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)]. \end{cases} \quad (7.54)$$

Ekstremaalsed väärtused on plaadi keskel, st.,

$$r = 0: \quad w = \frac{5+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{p_0 b^4}{64D}, \quad M_r = M_\theta = \frac{p_0(3+\nu)}{16} b^2. \quad (7.55)$$

**Pinged.** Järgnevate avaldiste tuletuskäike vaata A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

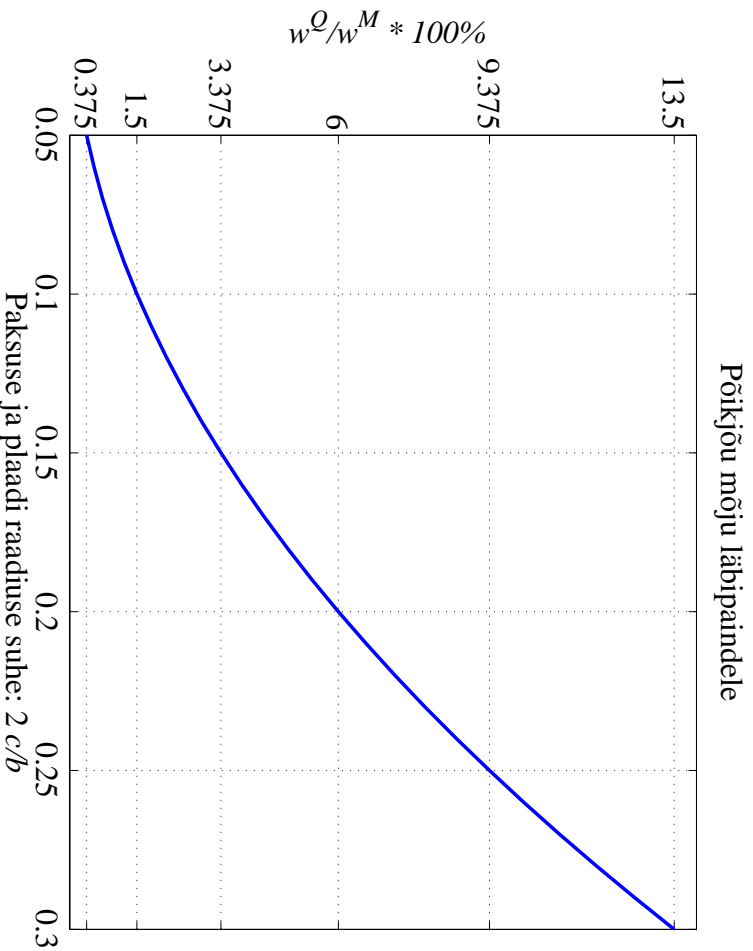
- **Maksimaalne pinge plaadi keskel**

$$\sigma_r|_{r=0} = \sigma_\theta|_{r=0} = \frac{3}{8}(3 + \nu)p_0 \left(\frac{b}{2c}\right)^2. \quad (7.56)$$

- **Põikjõu mõju läbipaindele.** Põikjõust põhjustatud läbipainde  $w^Q$  ja paindemomendist põhjustatud läbipainde  $w^M$  suhe

$$\frac{w^Q}{w^M} = 1,5 \left(\frac{2c}{b}\right)^2. \quad (7.57)$$

Seega, mida suurem on plaadi paksuse suhe raadiusse, seda suuremat osatähtsust omab põikjõust põhjustatud läbipaine. Näiteks  $2c/b = 0,1$  korral  $w^Q/w^M = 0,015 = 1,5\%$ , kuid  $2c/b = 0,2$  korral juba  $w^Q/w^M = 0,06 = 6\%$  ( vt. joon. 7.5).



Joonis 7.5: Põikjõust põhjustatud läbipainde  $w^Q$  ja paindemomendist põhjustatud läbipainde  $w^M$  suhe (protsentides) sõltuvana plaadi paksuse ja raadiuse suhtest.

Kahe toetusviisi maksimaalsete pingete võrdlus. Poissoni tegur  $\nu = 1/3$ , ülemine indeks «j» tähistab jääka kinnitust ja «vt» vaba toetust.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{\text{vt}} \Big|_{r=0} \\ \sigma_r^{\text{j}} \Big|_{r=0} \end{aligned} \right|_{r=0} = 2, 5; \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r^{\text{vt}} \Big|_{r=0} \\ \sigma_r^{\text{j}} \Big|_{r=b} \end{aligned} \right|_{r=b} = 1, 667. \quad (7.58)$$

### 7.4.3. Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat

#### 7.4.3 Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat (vt. joonis 7.4).

Konstandid  $C_1 = F/(8D\pi)$  ning  $C_3 = 0$  ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\left\{ \begin{aligned} w(r) &= \frac{F}{8D\pi} r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_4, \\ \frac{dw(r)}{dr} &= \frac{F}{8D\pi} r (2 \ln r + 1) + 2C_2 r, \\ M_r(r) &= -D \left\{ \frac{F}{8D\pi} [2(1 + \nu) \ln r + (3 + \nu)] + C_2(1 + \nu) \right\}, \\ M_\theta(r) &= -D \left\{ \frac{F}{8D\pi} [2(1 + \nu) \ln r + (1 + 3\nu)] + C_2(1 + \nu) \right\}, \\ Q_r(r) &= -\frac{F}{2\pi r}. \end{aligned} \right. \quad (7.59)$$

## a) Jäik kinnitus (vt. joonis 7.4)

Konstandid  $C_2$  ja  $C_4$  määratakse rajatingimustest  $w = 0$  ja  $dw/dr = 0$  plaadi välisservas  $r = b$ . Tulenus on

$$C_2 = -\frac{F(2\ln b + 1)}{16D\pi}, \quad C_4 = \frac{Fb^2}{16D\pi}. \quad (7.60)$$

Siirded ja paindemomendid (7.59) saavad seejärel kuju

$$\begin{cases} w(r) = \frac{F}{16D\pi} \left( 2r^2 \ln \frac{r}{b} - r^2 + b^2 \right), \\ M_r(r) = -\frac{F}{4\pi} \left[ 1 + (1 + \nu) \ln \frac{r}{b} \right], \\ M_\theta(r) = -\frac{F}{4\pi} \left[ \nu + (1 + \nu) \ln \frac{r}{b} \right]. \end{cases} \quad (7.61)$$

Plaadi servas  $r = b$  paindemomendid

$$M_r = -\frac{F}{4\pi}, \quad M_\theta = -\frac{F\nu}{4\pi}. \quad (7.62)$$

Läbipaine plaadi keskel on lõplik, st.

$$w = \frac{Fb^2}{16D\pi}, \quad \text{sest} \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \ln \frac{r}{b} = 0. \quad (7.63)$$

## 7.4.3. Keskel koondatud jõuga koormatud ümmarplaat

Paindemomendid ei oma aga keskel lõplikke väärtusi: kui  $r \rightarrow 0$  siis  $\ln \rightarrow -\infty$  ning  $M_r \rightarrow \infty$  ja  $M_\theta \rightarrow \infty$ . Täpsemad arvutusel koormuse rakenduspunkti ümbruses (3 – 4 plaadi paksust) paksude plaatide teooria põhjal näitavad, et pinged ületavad voolavuspüüri vaid plaadi surutud osas — koormuse rakenduspunkti ümbruses tekib lokaalne voolamine. Plaadi tõmmatud kihtides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{F}{h^2} (1 + \nu) \left( 0, 485 \ln \frac{b}{h} + 0, 52 \right) \quad (7.64)$$

ning neile saab vastavusse seada nn. fiktiivsed paindemomendid

$$M_r = M_\theta = \frac{F}{6} (1 + \nu) \left( 0, 485 \ln \frac{b}{h} + 0, 52 \right). \quad (7.65)$$

Vt. joonis 7.4, kus on toodud paindemomentide epüürid juhul  $\nu = 0, 3$ . Riskitekttega on tähistatud fiktiivsete paindemomentide väärtused kolme erineva raadiuse–paksuse suhte  $b/h$  jaoks. Kokkuvõttes pole olukord ohtlik kuni pinged (7.64) jäävad lubatud piiridesse.



**b) Vaba toetus**

Rajatingimused välisserval  $r = b$  on  $w = M_r = 0$ , kust leiame

$$C_2 = -\frac{F}{16D\pi(1+\nu)} [2(1+\nu) \ln b + 3 + \nu], \quad C_4 = \frac{Fb^2(3+\nu)}{16D\pi(1+\nu)}. \quad (7.66)$$

Siirded ja paindemomendid (7.59) saavad seejärel kujju

$$\begin{cases} w(r) = \frac{F}{16D\pi(1+\nu)} \left[ (3+\nu)(b^2 - r^2) + 2(1+\nu)r^2 \ln \frac{r}{b} \right], \\ M_r(r) = -\frac{F(1+\nu)}{4\pi} \ln \frac{r}{b}, \\ M_\vartheta(r) = -\frac{F(1+\nu)}{4\pi} \left( \ln \frac{r}{b} + 1 + \nu \right). \end{cases} \quad (7.67)$$

Ekstremaalne läbipaine plaadi keskel on lõplik

$$w = \frac{Fb^2(3+\nu)}{16D\pi(1+\nu)}. \quad (7.68)$$

Paindemomendid plaadi keskel on aga avaldiste (7.67) põhjal lõpmata suured (kui  $r \rightarrow 0$  siis  $\ln \rightarrow -\infty$  ning  $M_r \rightarrow \infty$  ja  $M_\vartheta \rightarrow \infty$ ).

*7.4.3. Keskel koondatud jõuga koormatud ümmarplaat**7 - 34*

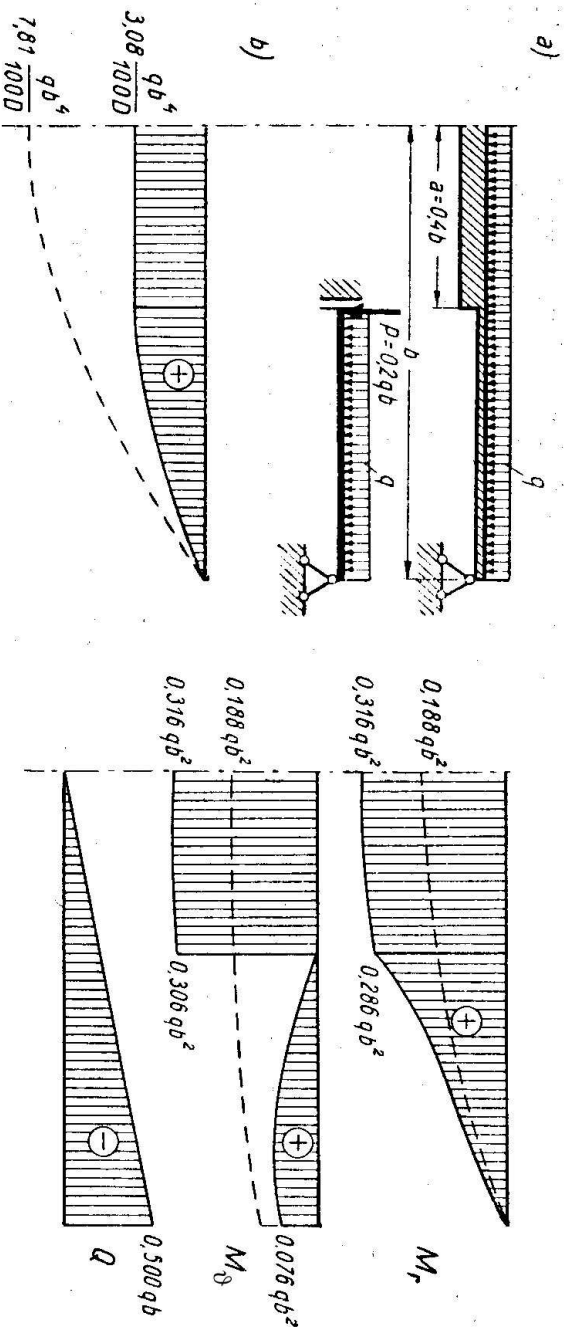
Analoogiliselt jäiga kinnitusega näitab ka siin täpsem uuring, et koormuse rakenduspunkti lähedal tekib lokaalne plastne tsoon kuid plaadi tõmmatud kihvides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{F}{h^2} \left[ (1+\nu) \left( 0,485 \ln \frac{b}{h} + 0,52 \right) + 0,48 \right]. \quad (7.69)$$

Ka sel juhul pole olukord ohtlik kuni pinged (7.69) jäävad lubatud piiridesse.

## 7.4.4 Rõngasplaat

## a) Jäiga südamikuga ümarplaat.

Joonis 7.6: Ühtlaselt koormatud rõngasplaadi paine. NB! Joonisel  $q$ , meil  $p_0$ !

## 7.4.4. Rõngasplaat

## 7 - 36

Vaatleme vabalt toetatud astmelist ümarplaati, mille keskmise osa jäikus on suur võrreldes välise osaga (vt. joonis 7.6). Seetõttu käitub väline, st. väikese jäikusega osa kui rõngasplaat. Plaadile mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $p_0$ . Lihtsuse mõttes eeldame, et sisemise osa raadius  $a = 0, 4b$  ja  $\nu = 0$ . Lisaks toome sisse nn. dimensioonita raadiuse  $\rho = r/b$ .

Rajatingimused:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{väliserv, } \rho = 1 : \\ w = 0, \\ M_r = 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{siseserv, } \rho = 0, 4 : \\ \frac{dw}{dr} = 0, \\ Q = -0, 2bp_0, \end{array} \right. \quad \text{sest } |Q \cdot 2\pi a| = |\pi a^2 p_0|. \quad (7.70)$$

Kasutades viimaseid koos avaldistega (7.38) ja (7.39) saame määrata konstandid  $C_1, \dots, C_4$ .

Saadud konstantide asendamisel võrrandisse (7.38) ja (7.39) saame siirete ja sisejõudude avaldised välise osa jaoks:

$$\begin{cases} w = p_0 b^4 (1, 562\rho^4 - 8, 151\rho^2 + 2, 448 \ln \rho + 6, 589, ) / 100D \\ \frac{dw}{dr} = p_0 b^3 (6, 250\rho^3 - 16, 302\rho + 2, 448/\rho) / 100D, \\ M_r = p_0 b^2 (-18, 750\rho^2 + 2, 448/\rho^2 + 16, 302) / 100, \\ M_\theta = p_0 b^2 (-6, 250\rho^2 - 2, 448/\rho^2 + 16, 302) / 100, \\ Q = -0, 500p_0 b\rho. \end{cases} \quad (7.71)$$

Plaadi keskmine, st. jäigem osa, arvutatakse vastavalt ümarplaadi valemitele.

Siirete ja sisejõudude epüürid on toodud joonisel 7.6. Vasakpoolne alumine joonis esitab läbipainde epüüri ja parempoolsed sisejõudusid. Kriipsjoonega on esitatud ühtlase paksusega plaadi siirete ja sisejõudude epüürid. On näha, et keskmise osa jäikuse suurendamine vähendab küll läbipaindeid, kui samas suurendab paindemomente nii jäigastatud kui jäigastamata osas. Kuna sellega kaasneb ka pingete kasv, siis ei saa sellist tüüpi konstruktsiooni lugeda heaks.

#### 7.4.4. Rõngasplaat

Kui plaadi keskmise osa jäikus pole suur võrreldes äärmise osaga, siis on arvutus keerulisem, sest plaati tuleb vaadelda kui tervikut, võttes arvesse paksuse hüppelist muutust. Tuleb koostada siirete avaldised plaadi mõlema osa jaoks. Need avaldised sisaldavad 8 konstanti, millest kaks keskmisele osale vastavat on nullid. Ülejäänud 6 määratakse rajatingimustest väliserval, st.  $\rho = 1$  on  $w = M_r = 0$  ja pidevustingimustest siirete  $w$  ja sisejõudude  $Q, M_r$  ning  $M_\theta$  jaoks kohal  $r = a$ .

**b) Välisservervast järgalt kinnitatud ja siservervast vaba rõngasplaat.**

Järgalt kinnitatud välisservervas  $r = b$  peavad  $w = 0$  ja  $dw/dr = 0$ . Vabas siservervas  $r = a$  aga  $M_r = 0$  ja  $Q = 0$ . Kasutades selliseid rajatingimusi saame avaldistest (7.38) ja (7.39) neli võrrandit konstantide  $C_1, \dots, C_4$  määramiseks.

Kui konstandid on leitud saame omakorda leida siirete ja sisejõudude avaldised, milledest siinkohal esitame vaid siirete oma:

$$\begin{cases} w = \frac{p_0 a^4}{64D} [-1 + 2(1 - k - 2\beta^2)(1 - \rho^2) + \rho^4 - 4k \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho], \\ \rho = \frac{r}{a}, & \beta = \frac{b}{a}, \\ k = \frac{(1 - \nu)\beta^2 + (1 + \nu)(1 + 4\beta^2 \ln \beta)}{(1 - \nu) + (1 + \nu)\beta^2} \beta^2. \end{cases} \quad (7.72)$$

**Kokkuvõte.** Rõngasplaatide korral on võimalikud väga mitmed jäiga kin- nituse, vaba toetuse ja vaba serva kombinatsioonid. Kõigi nende puhul tuleb lähtudes avaldistest (7.38) ja (7.39) ning konkreetsetest rajatingimustest (7.43)–(7.45) koostada võrrandisüsteem konstantide  $C_1, \dots, C_4$  määramiseks. Seejärel saadakse siirete ja sisejõudude avaldised.

#### 7.4.5. Ümarplaadi paindeülesande lahendeid

7 - 40

Järgnevasse tabelisse<sup>2</sup> on koondatud mitmed praktiliselt tähtsust omavad ümarplaadi paindeülesande lahendid. Vaatluse all on järgmised juhud:

1. Koormus: ühtlaselt mööda serva jaotunud moment  $M$ ; serv vabalt toetatud (või vaba).
2. Koormus: ühtlaselt mööda ringjoont raadiusega  $c$  jaotunud joonkoormus  $P_1$ ; serv vabalt toetatud.
3. Koormus: tentrüst kaugusel  $c$  mõjuv koondatud jõud  $P$ . Läbipaine  $w$  on vabalt toetatud serva korral ligikaudselt sama, mis juhul 2 ja järgalt kin- nitatud serva korral ligikaudu sama, mis juhul 6.
4. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus  $p_0$ ; serv vabalt toetatud.
5. Koormus: ühtlaselt üle ringi (raadiusega  $c$ ) jaotunud koormus  $p_0$ ; serv va- balt toetatud.
6. Koormus: ühtlaselt mööda ringjoont raadiusega  $c$  jaotunud joonkoormus  $P_1$ ; serv järgalt kinnitatud.

<sup>2</sup>Tabel on pärit õpikust A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

7. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus  $p_0$ ; serv jäigalt kinnitatud.
8. Koormus: ühtlaselt üle ringi (raadiusega  $c$ ) jaotunud koormus  $p_0$ ; serv jäigalt kinnitatud.

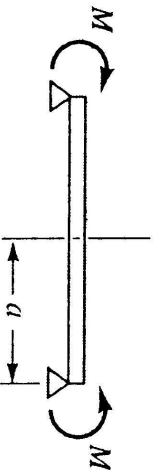
### Kasutatud tähistused:

- $a$  — plaadi raadius,
- $t$  — plaadi paksus,
- $p_0$  — ühtlaselt jaotunud koormus (dim  $p_0 = \text{N/m}^2$ ),
- $P_1$  — joonkoormus (dim  $P_1 = \text{N/m}$ ), mis on ühtlaselt jaotunud mööda ringjoont raadiusega  $c$ ,
- $P$  — koondatud jõud (dim  $P = \text{N}$ ),
- $M$  — ühtlaselt mööda plaadi välisserva jaotunud momentkoormus (dim  $M = \text{N}$ ),
- $\sigma$  — maksimaalne paindepinge,
- $w$  — läbipaine plaadi keskel,
- $\theta$  — plaadi keskpinna kaldenurk plaadi servas,
- $\nu$  — Poisson'i tegur,
- $E$  — Youngi moodul (elastsusmoodul).

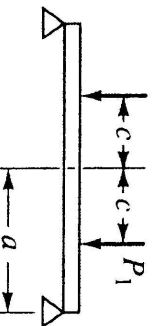
### 7.4.5. Ümarplaadi paindeülesande lahendeid

Tabel 7.1: Valenid ümarplaadi paindel ilmnevate maksimaalsete pingete, läbipainete ja kaldenurkade arvutamiseks.

Nr.	Toetusviis ja koormuse skeem	$\sigma_{\max}$ , $w_{\max}$ , $\theta_{\max}$
1.	Edge simply supported (or no support); load uniform along edge	$\sigma = 6 \frac{M}{t^2} \quad (\text{uniform})$ $w = 6(1 - \nu) \frac{Ma^2}{Et^3}$ $\theta = 12(1 - \nu) \frac{Ma}{Et^3}$



2. Edge simply supported;  
load uniform along a  
circle of radius  $c$



$$\sigma = \frac{3}{2} \frac{P_1 c}{t^2} \left[ (1 - \nu) \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) + 2(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} \right]$$

(at center)

$$w = \frac{3(1 - \nu)}{2} \frac{P_1 c}{Et^3}$$

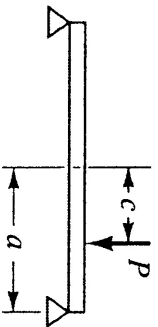
$$\times \left[ (3 + \nu)(a^2 - c^2) - 2(1 + \nu)c^2 \ln \frac{a}{c} \right]$$

$$\theta = 6(1 - \nu) \frac{P_1 a c}{Et^3} \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right)$$

Tabel 7.1: jätkub

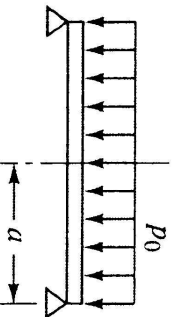
Nr. Toetusviis ja koormuse skeem  $\sigma_{\max}$ ,  $w_{\max}$ ,  $\theta_{\max}$

3. Concentrated load at a distance  $c$  from the center



Deflection  $w$  at center approximately same as Case 2 for edge simply supported, and same as Case 6 for edge fixed.

4. Edge simply supported; load uniform  $\sigma = \frac{3(3 + \nu) p_0 a^2}{8 t^2}$  (at center)



$$w = \frac{3(1 - \nu)(5 + \nu) p_0 a^4}{16 Et^3}$$

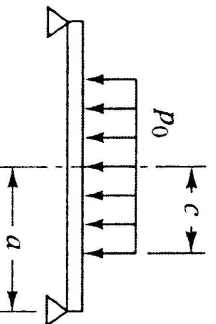
$$\theta = \frac{3(1 - \nu^2) p_0 a^3}{2 Et^3}$$

## 7.4.5. Ümarplaadi paindeülesande lahendeid

Tabel 7.1: jätkub

Nr. Toetusviis ja koormuse skeem  $\sigma_{\max}$ ,  $w_{\max}$ ,  $\theta_{\max}$

5. Edge simply supported; uniform load on circular area of radius  $c$



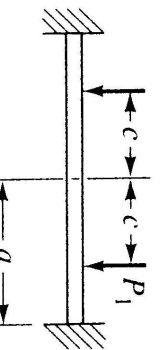
$$\sigma = \frac{3 p_0 c^2}{8 t^2} \left[ 4 - (1 - \nu) \frac{c^2}{a^2} + 4(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} \right]$$

(at center)

$$w = \frac{3(1 - \nu) p_0 c^2}{16 Et^3} \times \left[ 4(3 + \nu)a^2 - (7 + 3\nu)c^2 - 4(1 + \nu)c^2 \ln \frac{a}{c} \right]$$

$$\theta = \frac{3(1 - \nu) p_0 a c^2}{2 Et^3} \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right)$$

6. Edge fixed; load uniform along a circle of radius  $c$   $\sigma = \frac{3(1 + \nu) P_1 c}{2 t^2} \left( \frac{c^2}{a^2} + 2 \ln \frac{a}{c} - 1 \right)$  (at center)



$$\sigma = 3 \frac{P_1 c}{t^2} \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right)$$

(at edge)

$$w = \frac{3(1 - \nu^2) P_1 c}{2 Et^3} \left( b^2 - c^2 - 2c^2 \ln \frac{a}{c} \right)$$

Tabel 7.1: jätkub

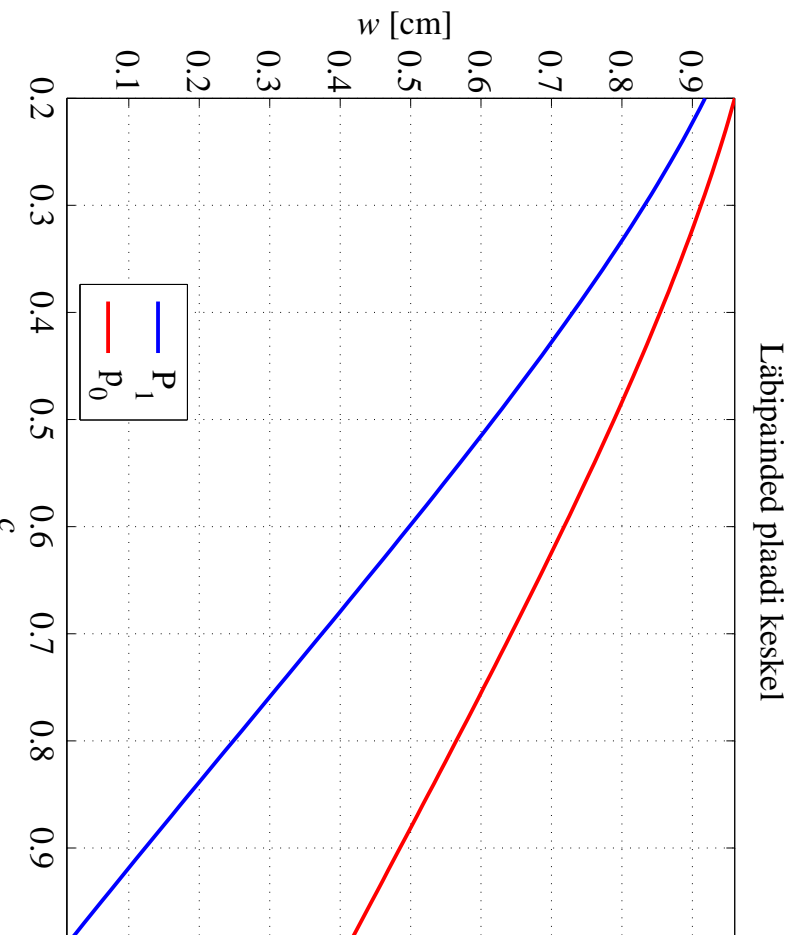
Nr.	Toetusviis ja koormuse skeem	$\sigma_{\max}$ , $w_{\max}$ , $\theta_{\max}$
7.	Edge fixed; load uniform	
		
		$\sigma = \frac{3 p_0 a^2}{4 t^2}$ (at edge)
		$w = \frac{3(1 - \nu^2)}{16} \frac{p_0 a^4}{E t^3}$
	Juhul kui plaadi paksus $t > 0, 1a$ , siis annab mn. modifitseeritud paindeteooria läbipaineks	
		$w = \frac{3\alpha(1 - \nu^2)}{16} \frac{p_0 a^4}{E t^3}$ , $\alpha = 1 + 5.72 \left(\frac{t}{a}\right)^2$ .
8.	Edge fixed; load uniform over a circular area of radius $c$	
		
		$\sigma = \frac{3(1 + \nu)}{8} \frac{p_0 c^2}{t^2} \left( \frac{c^2}{a^2} + 4 \ln \frac{a}{c} \right)$ (at center)
		$\sigma = \frac{3 p_0 c^2}{4 t^2} \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right)$ (at edge)
		$w = \frac{3(1 - \nu^2)}{4} \frac{p_0 c^2}{E t^3} \left( a^2 - \frac{3}{4} c^2 - c^2 \ln \frac{a}{c} \right)$

## 7.4.5. Ümarplaati paindeülesande lahendeid

## Järeldused

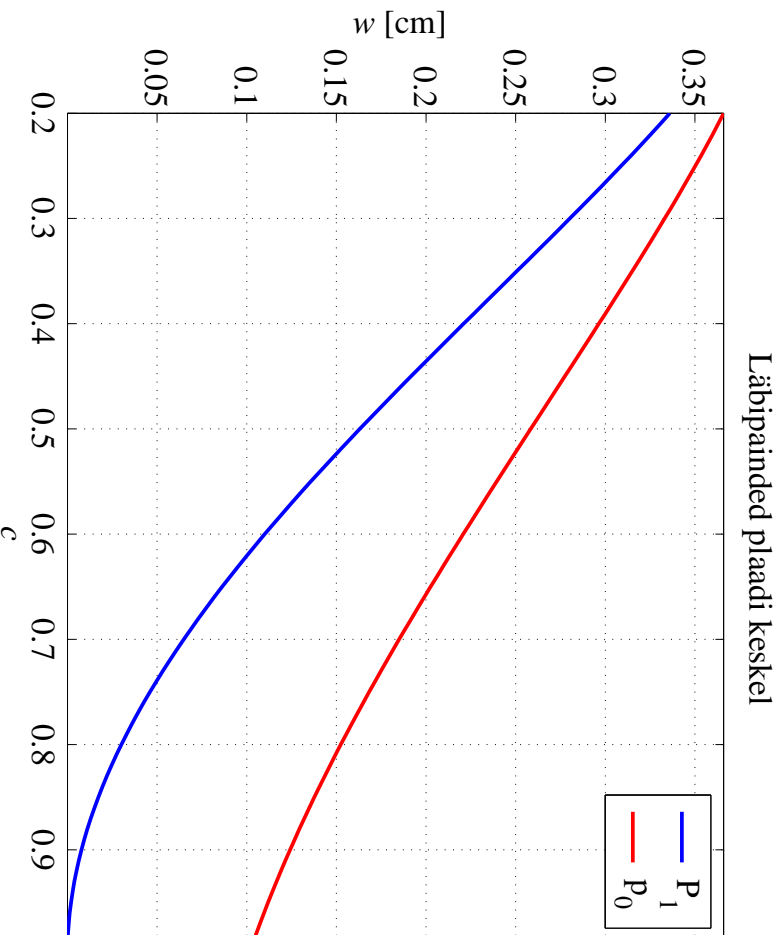
- Kõigil vaadeldud juhtudel on nii pinge kui läbipaine võrdeline rakendatud koormusega: suurendades (fikseeritud koormusskeemi korral) koormust 2 korda, suurenevad nii pinge kui läbipaine samuti 2 korda.
- Kõigil vaadeldud juhtudel on pinge pöördvõrdeline paksuse ruuduga: vähendades (fikseeritud koormusskeemi korral) plaadi paksust 2 korda, suureneb pinge  $2^2 = 4$  korda ja vastupidi.
- Kõigil vaadeldud juhtudel on läbipaine pöördvõrdeline paksuse kuubiga: vähendades (fikseeritud koormusskeemi korral) plaadi paksust 2 korda, suureneb läbipaine  $2^3 = 8$  korda ja vastupidi.
- Juhtudel 4 ja 7 on pinge võrdeline plaadi raadiuse ruuduga ja läbipaine plaadi raadiuse neljanda astmega.
- Juhtudel 2, 5, 6 ja 8 sõltub nii pinge kui läbipaine raadiusest  $c$ . Kuna vastavad sõltuvused on mittelineaarsed, siis on mõistlik esitada nad graafiliselt.

- Joonistel 7.7–7.12 esitatud graafikute koostamisel kasutati järgmisi andmeid: plaadi raadius  $a = 1$ ; plaadi paksus  $t = 0,05$ ; koormuse mõju määrava ringjoone raadius  $0,2 \leq c \leq 0,99$ ; tihlaselt jaotunud koormus  $p_0 = F/(\pi c^2)$ ; joonkoormus  $P_1 = F/(2\pi c)$ ; summaarne koormus  $F = 500\text{kN}$  oli fikseeritud; Youngi moodul  $E = 210\text{GPa}$ ; Poisson'i tegur  $\nu = 1/3$ .
- Joonisel 7.7 on esitatud vabalt toetatud ja joonisel 7.8 jäigalt kinnitatud ümarplaadi läbipainete graafikud.
- Joonisel 7.9 on esitatud pinged plaadi keskel vabalt toetatud ja joonisel 7.10 jäigalt kinnitatud ümarplaadi jaoks.
- Joonisel 7.11 on esitatud pinged jäigalt kinnitatud plaadi servas.
- Joonisel 7.12 on esitatud jaotatud koormuste  $P_1$  ja  $p_0$  ja raadiuse  $c$  vahelise sõltuvuse graafikud fikseeritud  $F$  jaoks.

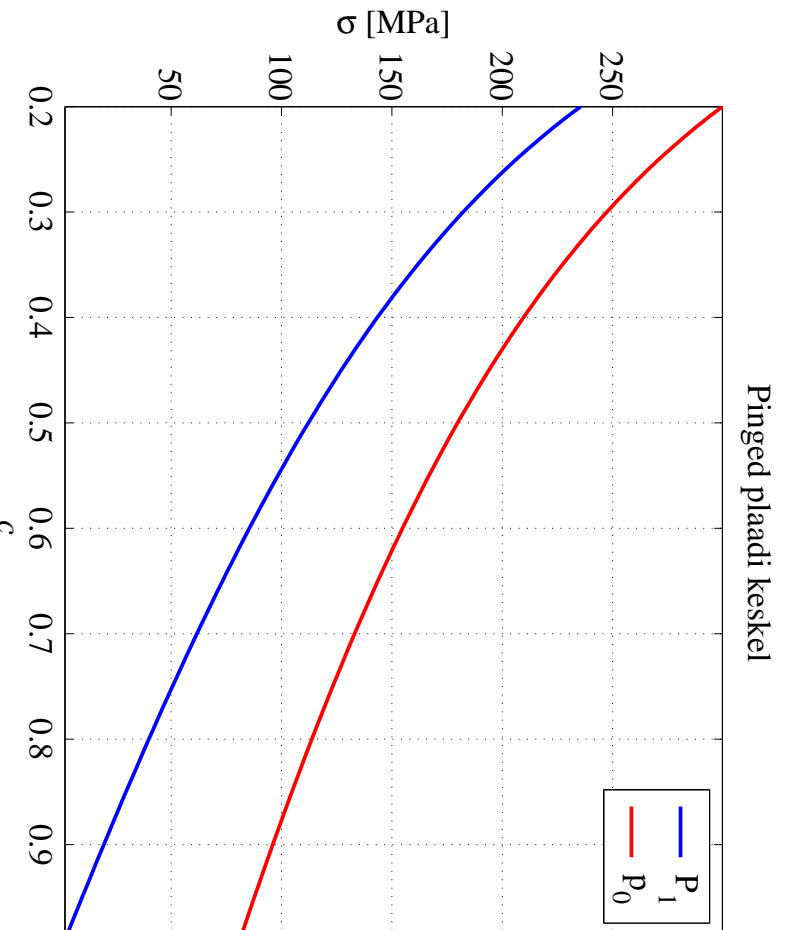


Joonis 7.7: Vabalt toetatud ümarplaadi läbipainete ja raadiuse  $c$  vaheline sõltuvus summaarse koormuse  $F$  fikseeritud väärtuse korral.

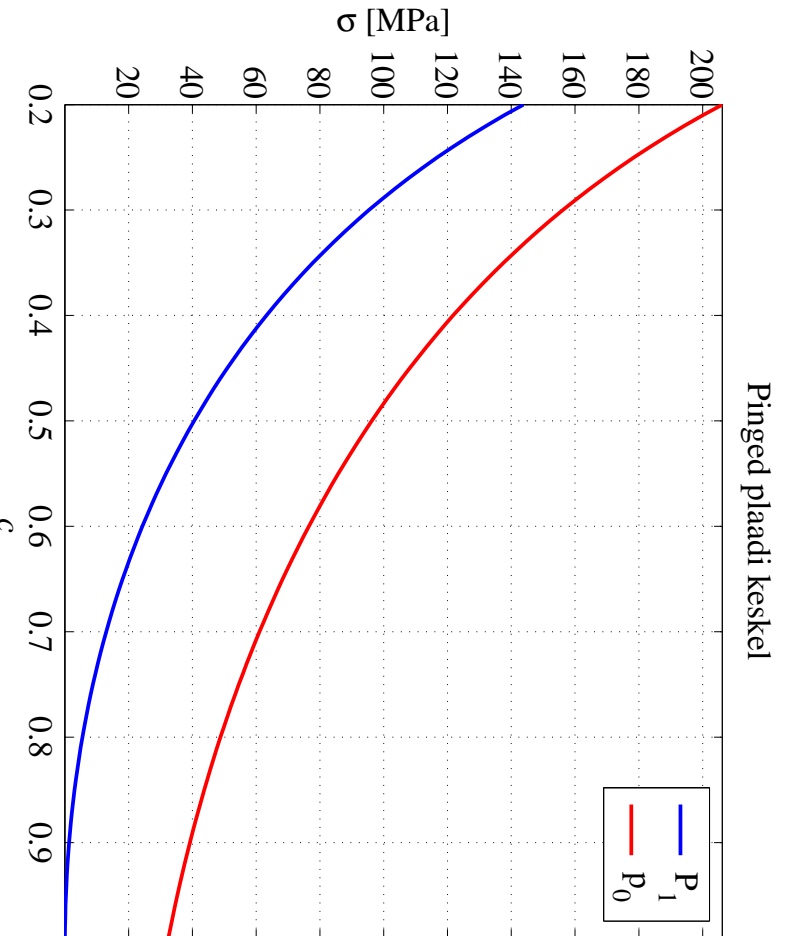




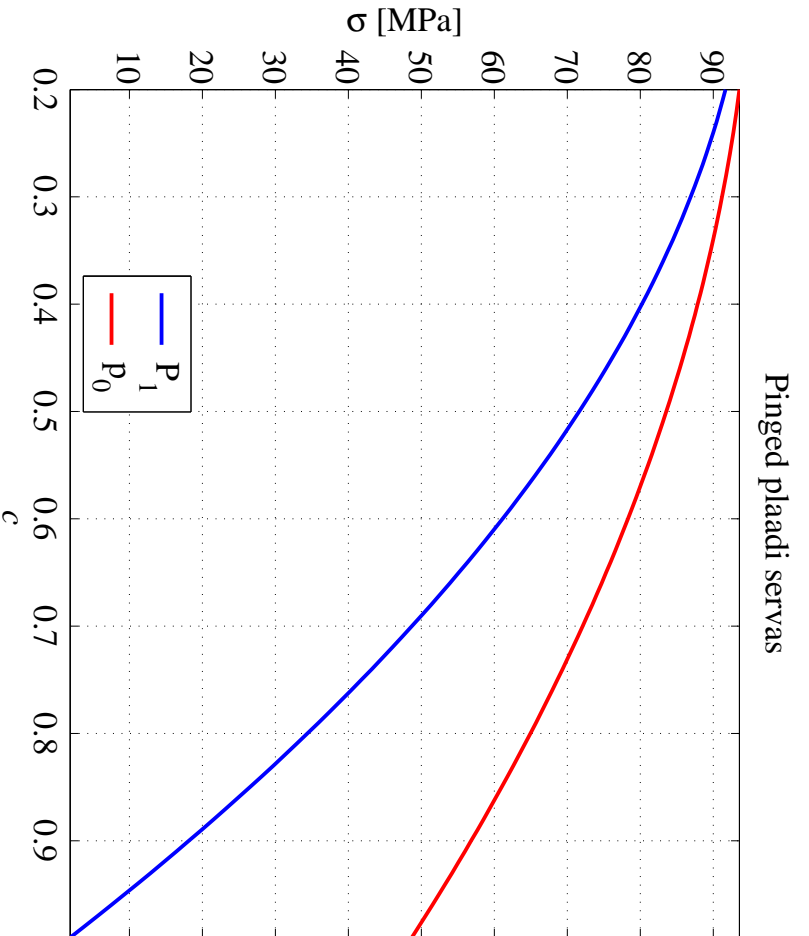
Joonis 7.8: Järgalt kinnitatud ümarplaadi lähipainete ja raadiuse  $c$  vaheline sõltuvus summaarse koormuse  $F$  fikseeritud väärtuse korral.



Joonis 7.9: Pinged vabalt toetatud ümarplaadi keskel sõltuvana raadiusest  $c$  summaarse koormuse  $F$  fikseeritud väärtuse korral.

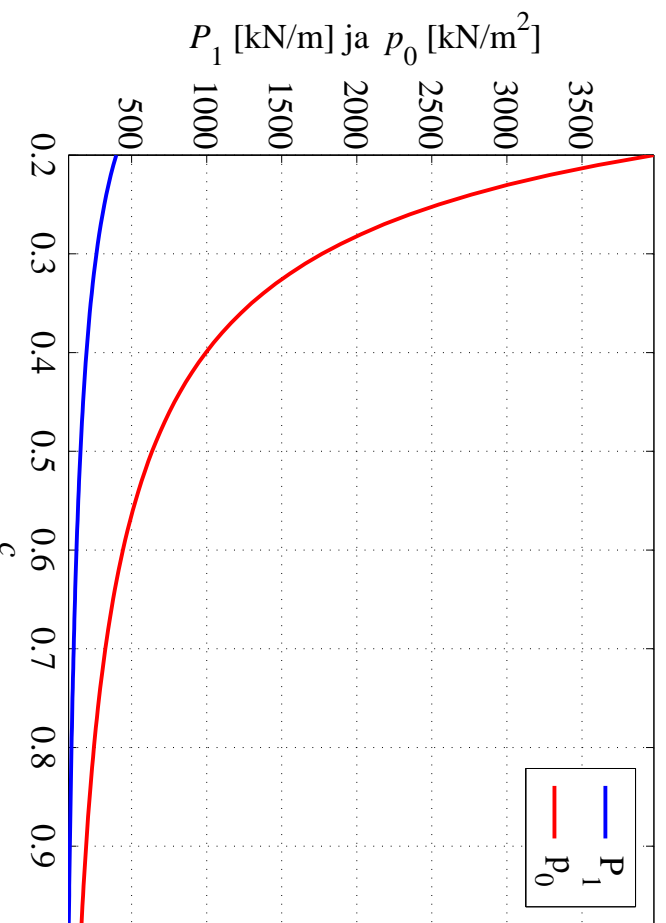


Joonis 7.10: Pinged järgalt kinnitatud ümarplaadi keskel sõltuvana raadiusest  $c$  summaarse koormuse  $F$  fikseeritud väärtuse korral.



Joonis 7.11: Pinged ümarplaadi järgalt kinnitatud servas sõltuvana raadiusest  $c$  summaarse koormuse  $F$  fikseeritud väärtuse korral.

Summaarsele koormusele  $F = 500$  kN vastavad  $P_1$  ja  $p_0$



Joonis 7.12: Jaotatud koormused  $P_1$  ja  $p_0$  sõltuvana raadiusest  $c$  summaarse koormuse  $F$  fikseeritud väärtuse korral.

#### 7.4.5. Ümarplaadi paindeülesande lahendeid

7 - 54

### Märkusi koondatud jõu lokaalse mõju kohta<sup>3</sup>

- Plaadi keskel mõjuv koondatud jõud põhjustab määramatust pingete (ja momentide) avaldises.
- Koondatud jõud ei mõju tegelikult mitte kunagi tihes punktis, vaid ta on jaotunud üle mingi väikese pinna, mille raadiuse tähistame  $r_c$ .
- Selleks, et saada lahti koondatud jõu rakenduspunktis tekkivast määramatusest pingete (ja momentide) avaldises tuleb:

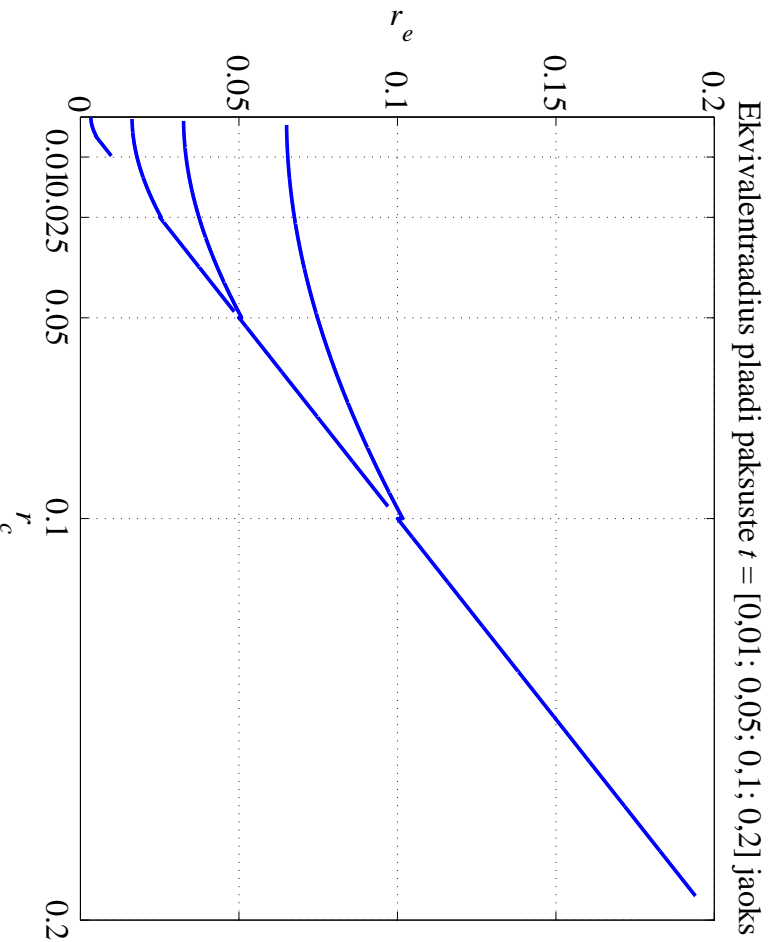
1. raadius  $r_c$  asendada nn. ekvivalentraadiusega (vt. joonis 7.13)

$$r_e = \begin{cases} \sqrt{1,6r_c^2 + t^2} - 0,675t, & r_c \leq 0,5t, \\ r_c, & r_c \geq 0,5t, \end{cases} \quad (7.73)$$

kus  $t$  on plaadi paksus (nagu eelnevates tabelites);

2. asendada koondatud jõud  $F$  ringis raadiusega  $c = r_e$  mõjuva ühtlaselt jaotunud koormusega  $p_0 = F/(\pi c^2)$  ning kasutada juhtudele 5 või 8 vastavaid valemeid.

<sup>3</sup>Vt. lisaks A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999



Joonis 7.13: Ekvivalentraadius  $r_e$  vastavalt valemile (7.73) nelja erineva plaadi paksuse korral. Kõverad on joonistatud  $0, 1t \leq r_e \leq 0,97t$  jaoks.

#### 7.4.6. Rõngasplaadi paindeülesande lahendeid

Järgnevasse tabelisse<sup>4</sup> on koondatud mitmed praktilist tähtsust omavad rõngasplaadi paindeülesande lahendid. Vaatluse all on järgmised juhud:

1. Koormus: ühtlaselt mööda väliserva jaotunud joonkoormus  $P$  ; sisesev: järgalt kinnitatud; välissev: vaba.
2. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus  $p_0$ ; sisesev: järgalt kinnitatud; välissev: vaba.
3. Koormus: ühtlaselt mööda väliserva jaotunud joonkoormus  $P$  ; sisesev: vabalt toetatud; välissev: vaba.
4. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus  $p_0$ ; sisesev: vabalt toetatud; välissev: vaba.
5. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus  $p_0$ ; sisesev: vaba; välissev: vabalt toetatud.
6. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus  $p_0$ ; sisesev: pöörded keelatud; välissev: vabalt toetatud.

<sup>4</sup>Tabel on pärit õpikust A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

7. Koormus: tihthlaselt mööda välisserva jaotunud joonkoormus  $P$  ;  
siseserv: järgalt kinnitatud; väliserv: pöörded keelatud.
8. Koormus: tihthlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus  $p_0$ ;  
siseserv: järgalt kinnitatud; väliserv: pöörded keelatud.
9. Koormus: tihthlaselt mööda sisserva jaotunud joonkoormus  $P$  ;  
siseserv: vaba; väliserv: järgalt kinnitatud.
10. Koormus: tihthlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus  $p_0$ ;  
siseserv: vaba; väliserv: järgalt kinnitatud.

---

**7.4.6. Rõngasplaadi paindeülesande lahendeid**

*Kasutatud tähistused (NB! joonkoormuse tähistus on siin erinev võrreldes ümarplaadiga):*

- $a$  — plaadi välisraadius,
- $b$  — plaadi siseraadius,
- $t$  — plaadi paksus,
- $P$  — joonkoormus (dim  $P = N/m$ ), mis on tihthlaselt jaotunud mööda sise- või välisserva,
- $p_0$  — tihthlaselt jaotunud koormus (dim  $p_0 = N/m^2$ ),
- $E$  — Youngi moodul (elastsusmoodul),
- $\sigma_{\max}$  — maksimaalne pinge,
- $w_{\max}$  — läbipaine sise- või välisservas.

Tabel 7.2: Valemid rõngasplaadi paindel ilmnevate pingete ja läbipainete arvutamiseks. Poisson'i tegur  $\nu = 0,3$ .

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	$\sigma_{\max}$	$w_{\max}$
1.	Inner edge fixed		$k_1 \frac{P}{t^2}$	$h_1 \frac{Pa^2}{Et^3}$
2.	Inner edge fixed		$k_2 \frac{P\alpha a^2}{t^2}$	$h_2 \frac{P\alpha a^4}{Et^3}$
3.	Inner edge simply supported		$k_3 \frac{P}{t^2}$	$h_3 \frac{Pa^2}{Et^3}$
4.	Inner edge simply supported		$k_4 \frac{P\alpha a^2}{t^2}$	$h_4 \frac{P\alpha a^4}{Et^3}$
5.	Outer edge simply supported		$k_5 \frac{P\alpha a^2}{t^2}$	$h_5 \frac{P\alpha a^4}{Et^3}$
6.	Outer edge simply supported, inner-edge rotation prevented		$k_6 \frac{P\alpha a^2}{t^2}$	$h_6 \frac{P\alpha a^4}{Et^3}$
7.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$k_7 \frac{P}{t^2}$	$h_7 \frac{Pa^2}{Et^3}$
8.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$k_8 \frac{P\alpha a^2}{t^2}$	$h_8 \frac{P\alpha a^4}{Et^3}$
9.	Outer edge fixed		$k_9 \frac{P}{t^2}$	$h_9 \frac{Pa^2}{Et^3}$
10.	Outer edge fixed		$k_{10} \frac{P\alpha a^2}{t^2}$	$h_{10} \frac{P\alpha a^4}{Et^3}$

Tabel 7.2: jätkub

Tabel 7.3: Konstantide  $k_i$  ja  $h_i$  väärtused sõltuvana välis- ja siseradiuse suhtest  $a/b$ .

$a/b$	1.25	1.50	2.00	3.00	4.00	5.00
$k_1$	0.227	0.428	0.753	1.205	1.514	1.745
$h_1$	0.0051	0.0249	0.0877	0.209	0.293	0.350
$k_2$	0.135	0.410	1.04	2.15	2.99	3.69
$h_2$	0.0023	0.0183	0.0938	0.2925	0.448	0.564
$k_3$	1.10	1.26	1.48	1.88	2.17	2.34
$h_3$	0.341	0.519	0.672	0.734	0.724	0.704
$k_4$	0.66	1.19	2.04	3.34	4.30	5.10
$h_4$	0.202	0.491	0.902	1.220	1.300	1.310
$k_5$	0.592	0.976	1.440	1.880	2.080	2.19
$h_5$	0.1841	0.4139	0.6640	0.8237	0.8296	0.813
$k_6$	0.122	0.336	0.74	1.21	1.45	1.59
$h_6$	0.0034	0.0313	0.1250	0.291	0.417	0.492
$k_7$	0.115	0.220	0.405	0.703	0.933	1.13
$h_7$	0.0013	0.0064	0.0237	0.0619	0.0923	0.114
$k_8$	0.090	0.273	0.71	1.54	2.23	2.80
$h_8$	0.0008	0.0062	0.0329	0.1096	0.1792	0.2338
$k_9$	0.194	0.320	0.454	0.673	1.021	1.305
$h_9$	0.00504	0.0242	0.0810	0.172	0.217	0.288
$k_{10}$	0.105	0.259	0.480	0.657	0.710	0.730
$h_{10}$	0.00199	0.0139	0.0575	0.130	0.162	0.175

## 7.4.6. Rõngasplaadi paindeülesande lahendeid

## Järeldused:

- Joonkoormuse  $P$  korral on kõik avaldised kujul
- Pindkoormuse  $p_0$  korral on kõik avaldised kujul

$$\sigma_{\max} = k_i \frac{P}{t^2}, \quad w_{\max} = h_i \frac{Pa^2}{Et^3}. \quad (7.74)$$

$$\sigma_{\max} = k_i \frac{p_0 a^2}{t^2}, \quad w_{\max} = h_i \frac{p_0 a^4}{Et^3}. \quad (7.75)$$

Tabel 7.4: Valenid lineaarselt muutuva ristlõikega rõngasplaadi paindel ilmnevate pingete ja läbipainete arvutamiseks. Juhtude numbrid vastavad tabelile 7.2; Poisson'i tegur  $\nu = 0,3$ ; plaadi paksus siseservas  $t_1 = bt_2/a$ .

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	$\sigma_{\max}$	$w_{\max}$
1.	Inner edge fixed		$k_1 \frac{P}{a^2}$	$h_1 \frac{Pa^2}{Et_2^3}$
2.	Inner edge fixed		$k_2 \frac{p_0 a^2}{t_2^2}$	$h_2 \frac{p_0 a^4}{Et_2^3}$
6.	Outer edge simply supported, inner-edge rotation prevented		$k_6 \frac{p_0 a^2}{t_2^2}$	$h_6 \frac{p_0 a^4}{Et_2^3}$

## 7.4.6. Rõngasplaadi paindeülesande lahendeid

Tabel 7.4: jätkub

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	$\sigma_{\max}$	$w_{\max}$
7.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$k_7 \frac{P}{t_2^2}$	$h_7 \frac{Pa^2}{Et_2^3}$
8.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$k_8 \frac{p_0 a^2}{t_2^2}$	$h_8 \frac{p_0 a^4}{Et_2^3}$



Tabel 7.5: Tabelis 7.4 esinevate konstantide  $k_i$  ja  $h_i$  väärtused sõltuvana välis- ja siseradiuse suhtest  $a/b$ .

$a/b$	1.25	1.50	2.00	3.00	4.00	5.00
$k_1$	0.353	0.933	2.63	6.88	11.47	16.51
$h_1$	0.0082	0.0583	0.345	1.358	2.39	3.27
$k_2$	0.249	0.638	3.96	13.64	26.0	40.6
$h_2$	0.0037	0.0453	0.401	2.12	4.25	6.28
$k_6$	0.149	0.991	2.23	5.57	7.78	9.16
$h_6$	0.0055	0.0564	0.412	1.673	2.79	3.57
$k_7$	0.159	0.396	0.091	3.31	6.55	10.78
$h_7$	0.0017	0.0112	0.0606	0.261	0.546	0.876
$k_8$	0.1275	0.515	2.05	7.97	17.35	30.0
$h_8$	0.0011	0.0115	0.0934	0.537	1.261	2.16