

Peatükk 2

Pinge

2.1. Jõud ja pinged

2 - 2

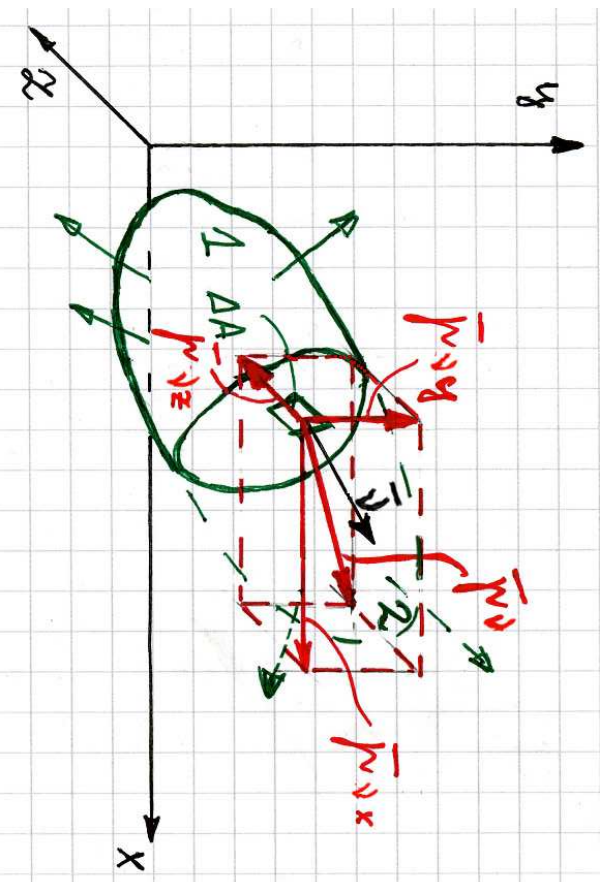
2.1 Jõud ja pinged

Kehale mõjuvad välisjõud saab jagada kahte rühma.

1. *Pindjõud ehk kontaktjõud* on põhjustatud keha kontaktist teiste kehade või keskkondadega. Näiteks survejõud, mis mõjuvad vette asetatud kehale või vundamendi surve pinnasele jne.
 - Pindjõu dimensioon: $1\text{N}/\text{m}^2$
 - Kui pind, millel jõud mõjub on väike võrreldes keha mõõtemetega (keha välispinnaga), siis võib sellist jõudu lugeda koondatud jõuks, st. summaarne jõud loetakse rakendatuks tihete punkti.
2. *Mahujõud ehk ruumjõud* mõjuvad igale keha punktile. Näiteks gravitatsioonijõud (raskusjõud) või elektromagnetilised jõud või inertsjõud.
 - Mahujõu dimensioon: $1\text{N}/\text{m}^3$
 - Mõnedes õpikutes käsitletakse mahujõu asemel massjõudu. Vastav dimensioon $1\text{N}/\text{kg}$

Vaatleme meelevaldse kujuga keha, millele mõjuv pind- ja mahujõududest koosnev (välis)jõudude süsteem on tasakaalus.

Rakendame lõikemeetodit: jagame keha mõtteliselt osadeks 1 ja 2; hülgame osa 2 ja vaatleme osa 1 (joon. 2.1).



Joonis 2.1: Pingvektori \mathbf{p}_ν koordinaattelgede x , y , z suunalised komponendid.

2.1. Jõud ja pinged

2 - 4

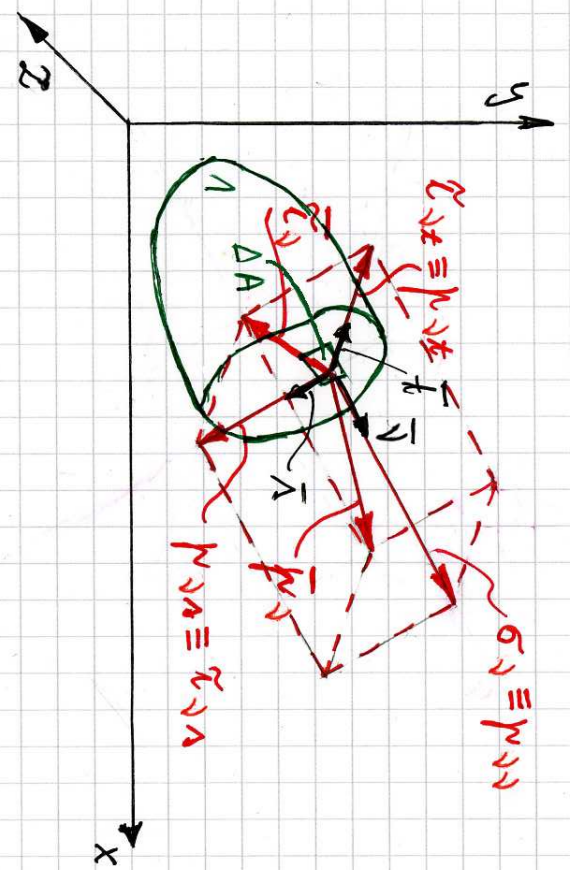
- Selleks, et osa 1 oleks ka peale osa 2 eraldamist tasakaalus tuleb lõikepinnale rakendada osa 2 asendavad jõud, st. sisejõud, mis on jaotunud üle kogu lõikepinna.

- Lõikepind osal 1 on määratud välisnormaaliga $\boldsymbol{\nu}$. Mõjugu väikesel pinnal ΔA , mis ümbritseb punkti P , summaarne sisejõud $\Delta \mathbf{S}$. Suhet $\Delta \mathbf{S}/\Delta A$ võib nimetada keskmiseks pingeks pinnal ΔA .

- Kui minna piirile $\Delta A \rightarrow 0$, saame (tegeliku) *pinge vaadeldavat punkti P läbiival pinnal normaaliga $\boldsymbol{\nu}$*

$$\mathbf{p}_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta A}. \quad (2.1)$$

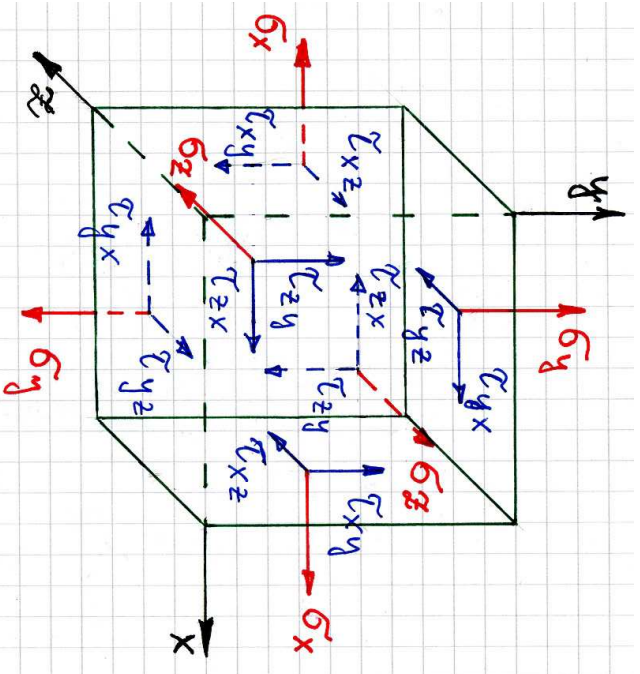
- Üldjuhul vektorite $\boldsymbol{\nu}$ ja \mathbf{p}_ν suunad ei ühti.
- Edaspidi on tihti otstarbekas kasutada pingvektori asemel tema projekt-sioone koordinaattelgedel p_{vx} , p_{vy} , p_{vz} , mis omakorda määravad ära pingvektori \mathbf{p}_ν koordinaattelgede xyz sihilised komponendid (vt. joon. 2.1). Siin ja edaspidi märgib esimene indeks pinnanormaali sihti ja teine pinge-komponendi mõjumise sihti.

Joonis 2.2: Pingvektori \mathbf{p}_n lahutamine normaal- ja nihkepingeks.

- Teisest küljest saab pinnal normaaliga ν mõjuva pingvektori lahutada *normaal- ja nihkepingeks*: $\mathbf{p}_\nu = \boldsymbol{\sigma}_\nu + \boldsymbol{\tau}_\nu$. Nihkepinge $\boldsymbol{\tau}_\nu$ lahutatakse tavaliselt veelkord kaheks komponendiks: $\boldsymbol{\tau}_\nu = \boldsymbol{\tau}_{\nu s} + \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$ (vt. joon. 2.2, kus $\mathbf{p}_{\nu n} \equiv \boldsymbol{\sigma}_\nu$, $\mathbf{p}_{\nu s} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu s}$ ja $\mathbf{p}_{\nu t} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$).

2.1. Tõud ja pinged

Kui lõike pind on paralleelne koordinaatasanditega, siis kasutatakse indeksi ν asemel lõikepinnale normaaliks oleva koordinaattelje nime, näiteks x .



Märgireeglid: joonis 2.3.

- *Positiivne sisepind* on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

Joonis 2.3: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.

2.2 Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

Välisjõudude toimel tahkes kehas tekkiavad pinged pole üldjuhul konstantsed, vaid võivad omada igas keha punktis erinevaid väärtusi:

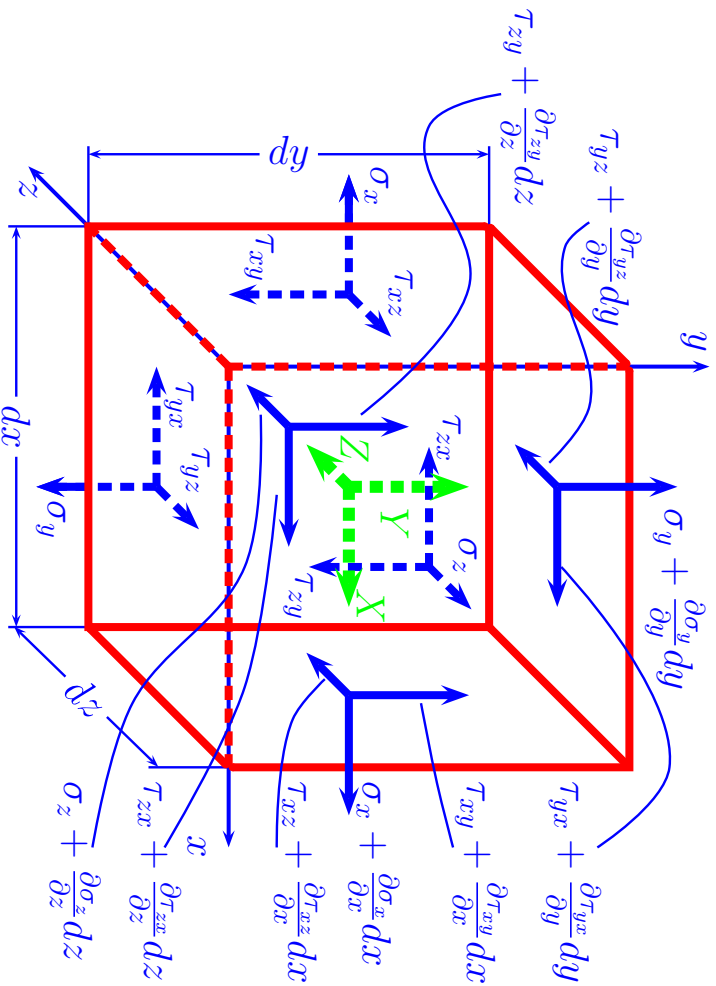
$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z), \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y, z), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z), \dots \quad (2.2)$$

Vaatleme välisjõudude mõju all tasakaalus olevast kehast välja lõigatud elementaaristtahukat (joon. 2.4). Igal risttahuka tahul mõjub 3 pingekomponenti, kokku seega 18 pingekomponenti. Olgu punktis koordinaatidega x, y, z normaalpinge väärtus $\sigma_x(x, y, z)$. Kasutades Taylori rittaarendust¹ (säilitades seejuures vaid esimest järku väikesed suurused) võime kirjutada

$$\begin{aligned} \sigma_x(x + dx, y + dy, z + dz) = & \sigma_x(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (2.3)$$

- Avaldise (2.3) põhjal $\sigma_x(x + dx, y, z) = \sigma_x(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dx$.
- Teiste pingekomponentide jaoks saab tuletada analoogilised valemid.

¹Ühe muutuja funktsiooni korral $f(x + dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) dx^k$



Joonis 2.4: Elementaaristtahukas

- Kehale mõjuvate mahujõudude projektsioonid tähistame X, Y, Z (NB! mahujõu dimensioon on 1 N/m^3).

Keha on tasakaalus, järelikult peab ka elementaarriistahukas olema tasakaalus ja talle mõjuvate jõudude peavektor ja peamoment olema võrdsed nulliga. Tasakaaluvõrrandite koostamiseks liidame esiteks risttahukale mõjuvate jõudude projektsioonid x -teljele ja võrrutame saadu nulliga:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ & \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Avame sulud ja jagame saadud võrrandi elementaarruumalaga $dV = dx dy dz$:

$$\frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\tau_{zx}}{dz} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\tau_{zx}}{dz} + X = 0.$$

Peale koondamist saame ühe otsitavatest võrranditest

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (2.5)$$

2.2. Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

2 - 10

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks tasakaaluvõrrandit kasutades jõudude projektsioone y - ja z -teljel:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Saadud võrrandid ongi *elastse keha tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid*. Kui ma-hujõudude projektsioonid sisaldavad inertsiõudusid, saab viimste abil lahendada ka diinaamika ülesandeid.

✓

Järgnevalt leiame momendid ristahuka keskpunkti läbiva x -telje suhtes ja võrrutame tulemuse nulliga:

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Avame sulud:

$$\tau_{yz} dx dy dz - \tau_{zy} dx dy dz + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dz \frac{dy^2}{2} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy \frac{dz^2}{2}}_{\text{kõrgemat järku väikesed liikmed} \rightarrow 0} = 0. \quad (2.8)$$

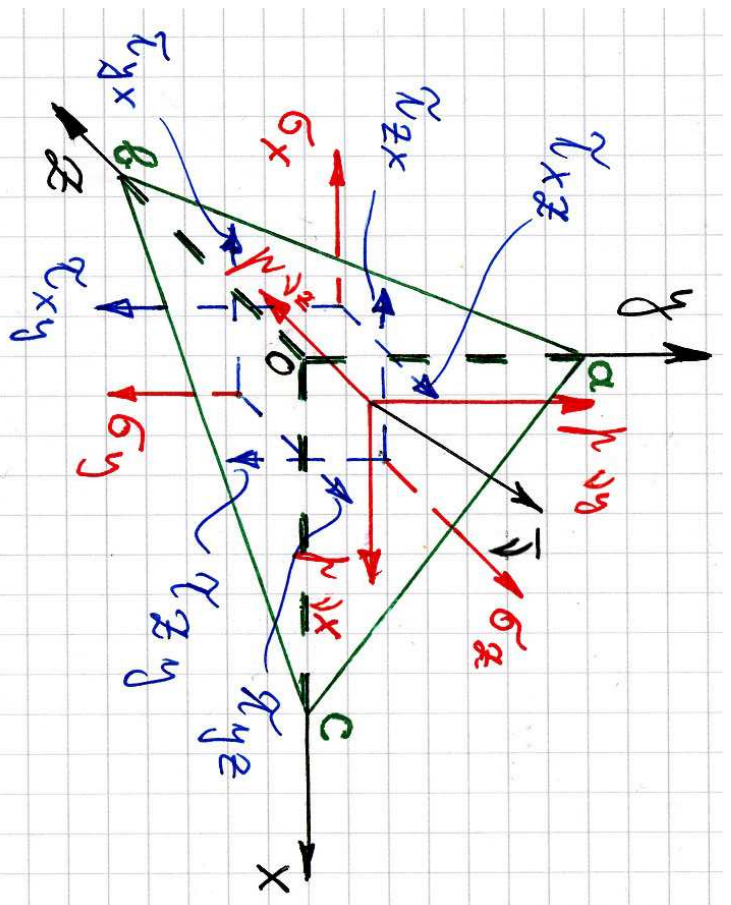
Pärast kõrgemat järku väikeste liikmete hülgamist saame $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Leides analoogiliselt momendid y - ja z -telje suhtes saame kokkuvõttes

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.9)$$

mis on tuntud *nihkepingete paarsuse seadusena*.² Tänu nihkepingete paarsusele väheneb tundmatute pingekomponentide arv iheksalt kuuele. Nende määramiseks on meil aga ainult kolm tasakaaluvõrrandit. Seega on tegu staatiliselt määramata ülesandega ja me vajame lisavõrrandeid, mis võtaks arvesse materjali füüsikalisi omadusi. Neist tuleb lähemalt juttu järgmises peatükis.

²Samamoodi oli homogense pinguse jaoks tuletatud 2. peatükis.

2.3. Pinged kaldpinnal, rajatingimused keha pinnal



Joonis 2.5: Pinged kaldpinnal. Kaldpinnal normaaliga ν mõjuv pingevektor \mathbf{p}_ν on esitatud läbi tema projektsioonide $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$ ja $p_{\nu z}$.

Selleks, et uurida pingeseisundit suvalises keha punktis on vaja osata leida pingeid meelevaldse orientatsiooniga kaldpinnal. Joonisel 2.5 kujutatud kaldpinnal abc orientatsioon koordinaattelgede suhtes on määratud pinnanormaali $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinustega

$$l = \cos(\boldsymbol{\nu}, x), \quad m = \cos(\boldsymbol{\nu}, y), \quad n = \cos(\boldsymbol{\nu}, z). \quad (2.10)$$

Koos koordinaatpindadega moodustub lõpmata väike tetraeedri $Oabc$. Tähistame kaldpinnal abc pindala dA . Tetraeedri teiste külgede pindalad avalduvad nüüd läbi vektori $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinuste³:

$$A_{Oab} = dA \cdot l, \quad A_{Obc} = dA \cdot m, \quad A_{Oac} = dA \cdot n. \quad (2.11)$$

Koostame tetraeedri jaoks tasakaalu võrrandid. Peale joonisel 2.5 näidatud pingete mõjuvad tetraeedrile veel mahujõud X, Y, Z , mida pole joonisel näidatud. Projekteerime tetraeedrile mõjuvad jõud x -teljele:

$$\begin{aligned} p_{\nu x} dA - \sigma_x A_{Oab} - \tau_{yx} A_{Obc} - \tau_{zx} A_{Oac} + X dV = \\ p_{\nu x} dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{yx} dA \cdot m - \tau_{zx} dA \cdot n + X dV = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

³Nurgad tetraeedri tahkude ja vastavate normaalide vahel on võrdsed.

2.3. Pinged kaldpinnal, rajiatingimused keha pinnal

2 - 14

Jagame viimase avaldise pindalaga dA , hülgame viimase liikme kui kõrgemat järku väikese⁴ ja saame avaldise

$$p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n. \quad (2.13)$$

Korrates sama protseduuri teiste telgedega saame avaldised pingevektori \mathbf{p}_{ν} tilejäänud kahe projektsiooni leidmiseks. Kokku saame

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (2.14)$$

Valemid (2.14) võimaldavad leida mis tahes kaldpinnal mõjuva pingevektori \mathbf{p}_{ν} komponente kui on teada pinnanormaal $\boldsymbol{\nu}$ ja pingekomponendid koordinaatpindadel $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$

Kui pind abc tihtib keha välispinnaga, siis esitavad võrrandid (2.14) *rajiatingimusi (ääretingimusi) keha pinnal*.

⁴ $\lim_{dA \rightarrow 0} (dV/dA) = 0$

2.4 Peapinged, pinge invariandid

Kuna vaadeldav tetraeeder on lõpmata väike, siis tegelikult võimaldavad valemid (2.14) määrata pingeid keha mis tahes punkti läbival mis tahes kaldpinnal kui on teada pinnanormaal ν ja pinged (pingekomponendid $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$) seda punkti läbivatel koordinaattasanditel.

Pinnal normaalgiga ν mõjuva pinge saab omakorda jagada normaalpingeks σ_ν ja nihkepingeks τ_ν . Kui on teada pingevektori \mathbf{p}_ν komponendid ja normaali ν suunakoosinused, siis saame leida pingevektori \mathbf{p}_ν projektsiooni normaali ν :

$$\sigma_\nu = \mathbf{p}_\nu \cdot \nu = p_{\nu x}l + p_{\nu y}m + p_{\nu z}n. \quad (2.15)$$

On selge, et vaadeldav projektsioon on samal ajal ka normaalpinge σ projektsioon pinnanormaalil ν ja seetõttu kasutamegi siin tähistust σ_ν . Kasutades valemid (2.14) saab σ_ν omakorda avaldada koordinaattasandil mõjuvate pingete kaudu. Nihkepinge τ_ν kujutab endast pingevektori \mathbf{p}_ν projektsiooni vaadeldaval pinnal ja tema moodul

$$\tau_\nu^2 = p_\nu^2 - \sigma_\nu^2. \quad (2.16)$$

2.4. Peapinged, pinge invariandid

2 - 16

On selge, et nii \mathbf{p}_ν , kui σ_ν ja τ_ν sõltuvad pinna orientatsioonist. Saab näidata, et igas punktis leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat pinda, millel nihkepinge $\tau_\nu = 0$ ja normaalpinge $\sigma_\nu = \mathbf{p}_\nu$. Selliseid pindasid nimetatakse *peapindadeks*, neil pindadel mõjuvaid normaalpingeid *peapingeteks* ja neid pindu määravaid pinnanormaale *peasuundadeks*.

Peapingete ja peasuundade leidmise protseduur.

- Tähistame otsitava peapinge σ ja talle vastava pinnanormaali suunakoosinused l, m, n .
- Nende nelja tundmatu määramiseks on võrrandsüsteem

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

koos lisatingimusega

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (2.18)$$

*

- Meid huvitab selle VS-i mitte triviaalne lahend (l, m, n pole korruga nullid). See tingimus on täidetud kui karakteristik determinant

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

- Viimasest saadakse omakorda karakteristiklik võrrand

$$\sigma^3 - I_1^\sigma \sigma^2 + I_2^\sigma \sigma - I_3^\sigma = 0, \quad (2.20)$$

kus suuruseid

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \end{cases} \quad (2.21)$$

nimetatakse *pinge invariantideks*⁵.

⁵Täpsemalt öeldes nimetatakse neid pingetensori invariantideks. Tensori mõiste juurde tuleme õige pea.

2.4. Peapinged, pinge invariantid

- Uuritaval juhul on kuupvõrrandil (2.20) kolm reaalarvulist lahendit, mis ✓ järjestatakse kahanevas järjekorras $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
- Neile vastava kolme peasuuna määramiseks asendatakse saadud kolm peapinget kordamööda võrrandisüsteemi (2.17), (2.18). Tulenusena saame iga-
 - le peapingele σ_i vastava peasuuna suunakoosinused $l_i, m_i, n_i, i = 1, 2, 3$.
 - Peasuundade praktilise leidmise juurde tuleme tagasi alajaotuses 2.6.

Sõltuvalt kuupvõrrandi lahendite väärtustest, saab eristada kolme juhtu:

1. Kui kõik kolm peapinget on erinevad, siis saadakse võrrandisüsteemi (2.17), (2.18) lahendamisel kolm ristuvat tihikvektorit.
2. Kui kõik kolm peapinget on võrdsed, siis sobib peapinnaks iga vaadeldavat punkti läbiv pind. Praktilistel kaalutustel valitakse tavaliselt ristuvate pindade kolmik, mis omakorda määrab omavahel ristuvate peasuundade kolmiku.

3. Kui kaks peapinget on võrdsed ja kolmas neist erinev, siis saame määrata sellele kolmandale peapingele vastava peasuuna, mis omakorda määrab peapinna. Ülejäänud kaheks peasuunaks sobib mistahes ristuvate suundade paar, mis on omakorda risti kolmanda peasuunaga.

Kasutades peapingeid saame pinge invariantid kujul

$$\begin{cases} I_1^o = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2^o = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \\ I_3^o = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \quad (2.22)$$

- Pinge invariantid on sõltumatud koordinaatide xyz valikust.
- Kuna invariantid on sõltumatud koordinaatide valikust, tuleb neid vaadelda kui põhilisi suurusi, mis iseloomustavad pinget vaadeldavas punktis — kõik pingekomponendid on määratavad läbi invariantide.

2.5. Pingetensor

2 - 20

2.5 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaattasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ja kuus nihkepinget $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada 3×3 (tasandilisesannete korral 2×2) tabelina nagu maatrikseid. Pingetensor iseloomustab täielikult pingust (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingevektori suvalisel seda punkti läbival pinnal (vt. valemid (2.14)).

Käesolevas kursuses vaatleme kolme liiki füüsikalisi suurusi — skalaare, vektoreid ja (teist järku) tenseoreid.

1. *Skalaar* pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus. Näited: mass, tihedus, temperatuur.

2. *Vektorit* iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund. Vektoriga komponent on samuti seotud tihed suunaga ja tema tähistamisel kasutatakse tihete indekseid. Näited: jõud, pinnanormaal, kiirus, siire.
3. *Teist järku tensori* iga komponenti iseloomustab lisaks moodulile ka suund ja tema tähistamisel kasutatakse kahte indekseid. Näiteks pingetensori korral näitab esimene indeks pinnanormali suunda ja teine indeks pingekomponendi suunda.
- Vektoreid võib nimetada esimest järku tenseoreiks ja skalaare nullindat järku tenseoreiks.

Maatriksite ja tensorite omavaheline suhe

- Kui on fikseeritud koordinaatsüsteem, siis saab iga teist järku tensori esitada 3×3 maatriksina ja iga vektori arvukolmikuna.
- Vastupidine aga ei kehti — iga 3×3 maatriks ei osutu tensoriks.
- Koordinaatide teisendamisel teisenevad nii tensori kui vektori komponendid kindlate reeglite alusel.

2.5. Pingetensor

2 - 22

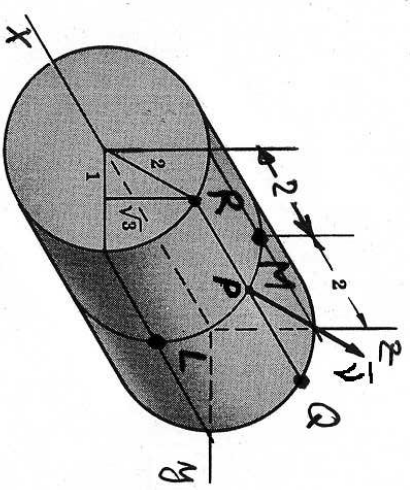
- Pärast koordinaatiseisendust peab tensor (vektor) esitama endiselt täpselt sama füüsikalist suurust, mida enne teisendust.
 - * Kui see nii on, siis ongi tegu tensoriga (vektoriga), vastupidisel juhul mitte.
 - * Vastupidine olukord on füüsikaliselt vastuvõtmatu. Pole võimalik, et pinge keha punktis või punkti siire või kiirus sõltuks koordinaatsüsteemi valikust.
 - * Näide. Vektor ning kaks koordinaatsüsteemi xy ja $x'y'$, mille vaheline nurk on θ .
- Kui tensor (vektor) on määratud igas vaadeldava keha punktis, siis on meil tegu tensorväljaga (vektorväljaga). Näiteks on pingetensori korral tegu tensorväljaga, sest ta on määratud igas vaadeldava keha punktis.
- Pingetensor koordinaatides (x, y, z) on esitatud kujul (2.23) ja peasuundades kujul

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

2.6 Ülesanded

Ülesanne 1. Pingus keha punktides on antud pingetensoriga (Descartes'i ristkoordinaatides)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}.$$



Leida pingevektor), mis mõjub silindri külgpinnal $y^2 + z^2 = 4$ punktides P, Q, R, L ja M ning silindri otspindade punktides Q ja R . Lahutage pingevektor normaal- ja nihkepingeks.

Lahendamisel tuleb kasutada valemeid (2.14), (2.15) ja (2.16).

2.6. Ülesanded

2 - 24

Ülesanne 2. Leida peapinged ja peasuunad pingetensorile

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix}.$$

Ülesannet 2 on võimalik lahendada kahel põhimõtteliselt erineval viisil.

A. «Käsitsi.»»

1. Tuleb koostada võrrandisüsteem (2.17) ja vastav karakteristiklik determinant.
2. Karakteristlikku determinandi abil tuleb moodustada karakteristiklik võrrand ja leida selle lahendid. Viimased ongi peapinged, mis tuleb järjestada kahanevas järjekorras ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

3. Peapinged σ_i ($i = 1, 2, 3$) tuleb asendada tikshaaval võrrandisüsteemi (2.17).
- (a) Iga peapinge σ_i jaoks saate kolm võrrandit, millest peab välja valima suvalised kaks. Neisse tuleb asendada $n_i = 1$ ja leida vastavad l_i ja m_i . Tulemusena saate vektori $\mathbf{N}_i^* = (l_i^*, m_i^*, n_i^*)$, mis määrab peapingele σ_i vastava peasuuna.
- (b) Järgmise sammuna tuleb saadud vektor \mathbf{N}_i^* normeerida, s.t. leida vastav ühikvektor $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i^*/|\mathbf{N}_i^*|$.
4. Peale peasuundade leidmist tuleb kontrollida, kas nad moodustavad parema käe kolmiku, s.t. kas $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.
- Kui $\mathbf{N}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ ja $\mathbf{N}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, siis

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \left\{ \begin{array}{c|c|c} m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{array} \right\} \cdot \begin{array}{c|c|c} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{array}.$$

B. «Arvutiga»

1. Sisestada pingetensori maatriks.
2. Leida peaväärtused ja peasuunad. Harilikult on selleks käsk **eig** (*eigenvalues*).
3. Järjestada peaväärtused ja peasuunad ümber nii, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Kuna koos peaväärtustega tuleb ümberjärjestada ka peavektorid, siis tuleb tihti muuta arvutist saadud peavektori \mathbf{N}_3 orientatsioon selliseks, et peavektorid moodustaksid parema käe kolmiku ja seega $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.