Peatükk 8

Plaatide stabiilsus

8.1 Sissejuhatus

Vaatleme plaati, millele mõjuv koormus on plaadi tasandis.

- Koormus suhteliselt väike
  - tasandülesanne — plaat jääb tasapinnaliseks
- Koormus ületab kriitilise piiri
  - Mõlgid (mõlkumine) — stabiilsuse kadu
  - Analoogia tala stabiilsuse kaoga — tala nõtke
  - Erinevus talast — stabiilsuse kadumisega koos ei pruugi kaduda plaadi kandevõime — painduvate plaatide teooria.

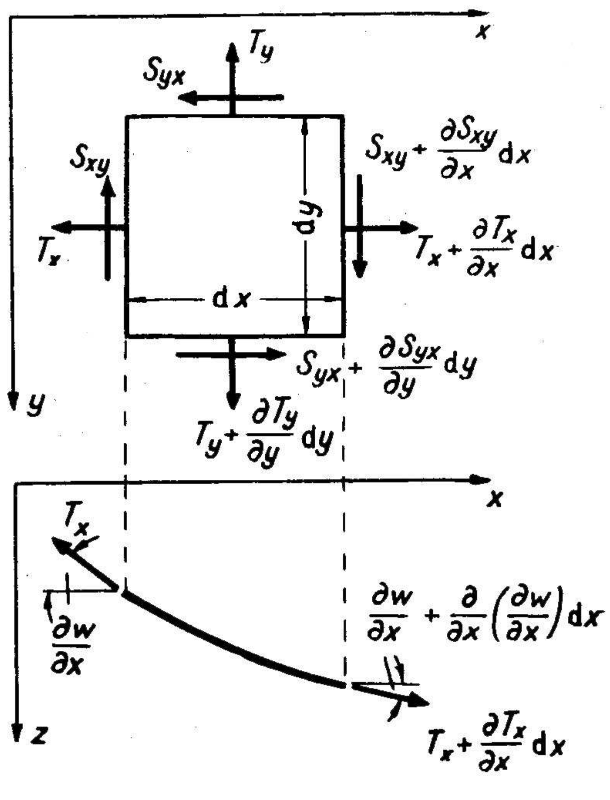
Vt. lisaks R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967 lk. 469–488.

8.2 Kriitilise koormuse määramine staatilise tasakaalu meetodil

Seni oleme EPDV tuletamisel arvesse võtnud vaid sisejõudusid (painde- ja väändemomente ning põikjõudu), mis on põhjustatud plaadile mõjuvast põikkoormusest. Hüljatud on olnud plaadi tasandis mõjuvad piki- ja nihkejõud ehk aheljõud. Stabiilsuse (ja suurte läbipainete) uurimisel tuleb aga needki arvesse võtta.

Idee:

- Plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrandisse (EPDV) tuleb lisada liikmed, mis vastavad plaadi tasandis mõjuvatele jõududele.
- Tuleb leida plaadi läbipainde avaldis, mis rahuldaks nii EPDV-t kui rajatingimusi.



Joonis 8.1: Plaadi element $dx - dy - h$ ja talle mõjuvad jõud

Vaatleme plaadi elementi servapikkustega dx, dy ja h, millele mõjuvad pikijõud T_x ja T_y ning nihkejõud (tangentsiaaljõud) $S_{xy} = S_{yx}$ (vt. joonis 8.1). Vastavad ahelpinged[a] $\sigma_x = T_x/h$, $\sigma_y = T_y/h$ ja $\tau_{xy} = S_{xy}/h$.

Staatilise tasakaalu korral peavad vaadeldavale elemendile mõjuvate summaarsete jõudude projektsioonid koordinaattelgedel olema nullid.

Eeldame, nagu eespoolgi, et pöörded on väikesed ja seega $\cos\alpha \sim 1$ ning $\sin\alpha \sim \tan\alpha \sim \alpha$.

[a] NB! nagu teistelgi sisejõududel on aheljõudude dimensioon N/m

Kuna x- ja y-telgede sihis mõjuvad vaid sisejõud siis saavad tasakaaluvõrrandid kuju

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0. \tag{8.1}$$

Projekteerides jõud T_x, T_y ja $S_{xy} = S_{yx}$ z-teljele saame nn. täiendava jõu, mis tuleb lisada plaadi EPDV-sse (**??**):

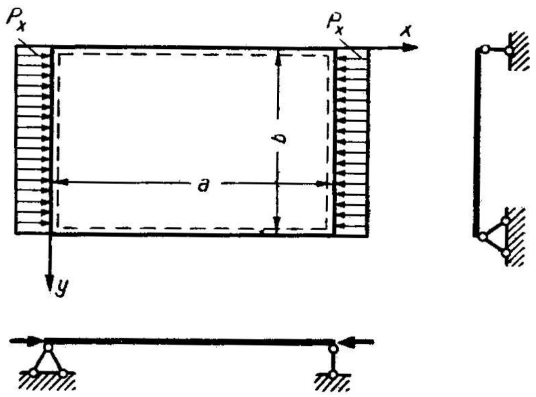
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(p(x,y) + T_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right). \tag{8.2}$$

Valides põikkoormuse $p = 0$, saamegi võrrandi kriitilise koormuse leidmiseks:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = T_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{8.3}$$

8.2.1 Ristkülikplaadi kriitilise koormuse leidmine

Jäigale kontuurile toetuv ühes sihis surutud plaat (joon. 8.2).



Joonis 8.2: Jäigale kontuurile toetuv ristkülikplaat.

- Koormus P_x on rakendatud plaadi servadel $x = 0$ ja $x = a$.
  - $T_x = -P_x$, $T_y = S_{xy} = 0$
  - Kriitilise koormuse määramise võrrand (8.3) lihtsustub

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + P_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{8.4}$$

- Lahendit otsime analoogiliselt Navier' meetodiga kujul

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{8.5}$$

- (8.5) $\longrightarrow$ (8.4)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2-P_x\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=0. \tag{8.6}$$

- (8.6) peab kehtima iga x puhul $\Rightarrow$ üksikud sõltumatud võrrandid

$$P_x=\pi^2 D\frac{\left(m^2/a^2+n^2/b^2\right)^2}{m^2/a^2}=\pi^2 D\frac{\left(m^2b^2+n^2a^2\right)^2}{m^2a^2b^4}. \tag{8.7}$$

- Fikseeritud m korral omab P_x minimaalset väärtust $n=1$ korral.
- Fikseeritud n korral sõltub minimaalset P_x tagav m väärtus suhtest a/b.

- $n=1 \longrightarrow$ (8.7) $\Rightarrow$

$$P_x=\frac{\pi^2 D}{a^2}\left(m+\frac{1}{m}\frac{a^2}{b^2}\right)^2. \tag{8.8}$$

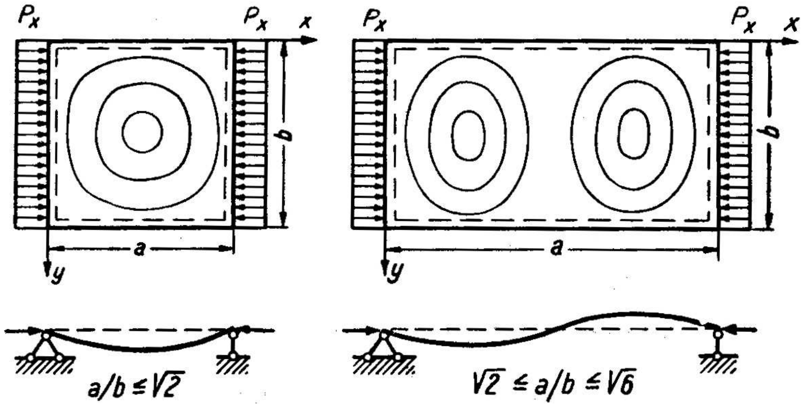
P_x miinimumile vastab

$$\frac{d}{dm}\left(m+\frac{1}{m}\frac{a^2}{b^2}\right)=1-\frac{1}{m^2}\frac{a^2}{b^2}=0 \quad\Rightarrow\quad m=\frac{a}{b}. \tag{8.9}$$

- Kuna poollainete arv m saab olla vaid täisarv, kuid küljepikkuste suhe a/b ei pruugi olla täisarv, siis pole tulemus otseselt rakendatav.
  - Leiame millise a/b väärtuse korral annavad m ja $m+1$ poollainet sama kriitilise koormuse P_{kr}: m & $m+1 \longrightarrow$ (8.8) $\Rightarrow$

$$\frac{a}{b}=\sqrt{m(m+1)} \tag{8.10}$$

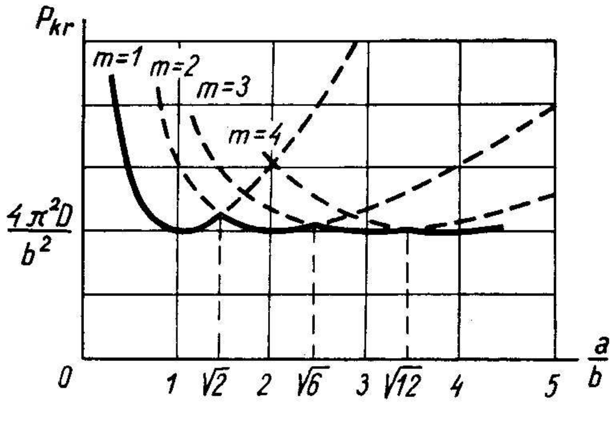
  - Teisisõnu, piir ühe ja kahe poollaine vahel on $a/b=\sqrt{2}$, kahe ja kolme vahel $a/b=\sqrt{6}$, kolme ja nelja vahel $a/b=\sqrt{12}$ jne. (vt. joonised 8.3 ja 8.4).



Joonis 8.3: Ühe ja kahe poollainega mõlkumiskujud.

- Üksikud kõverad joonisel 8.4 vastavad poollainete arvule $m = 1, 2, 3, \ldots$. On selge, et kriitiline koormus P_{kr} omab minimaalset väärtust $4\pi^2 D/b^2$ juhul kui a/b on täisarv. Viimase joonise põhjal on selge, et juhtude $a/b \geq 1$ korral (koormus on rakendatud lühematele külgedele ja mõjub seega pikemate külgede sihis) sobib kriitiliseks koormuseks see sama minimaalne väärtus

$$P_{kr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}. \tag{8.11}$$



Joonis 8.4: Kriitiline koormus sõltuvana suhtest a/b.

- Juhtudel kui $a/b < 1$ (koormus on rakendatud pikematele külgedele ja mõjub seega lühemate külgede sihis) on $m = n = 1$ ja valemist(8.8) saame

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \tag{8.12}$$

- Kui $a/b \ll 1$, siis saab viimane kuju

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a^2}. \tag{8.13}$$

Kriitilise pinge leidmiseks jagatakse kriitiline koormus plaadi paksusega h:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{h}. \tag{8.14}$$

Arvestades, et $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ saame pikemate külgede sihis surutud plaadi $(a/b > 1)$ jaoks

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \tag{8.15}$$

ja lühemate külgede sihis surutud plaati $(a/b < 1)$ jaoks

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \tag{8.16}$$