Peatükk 2

Pinge

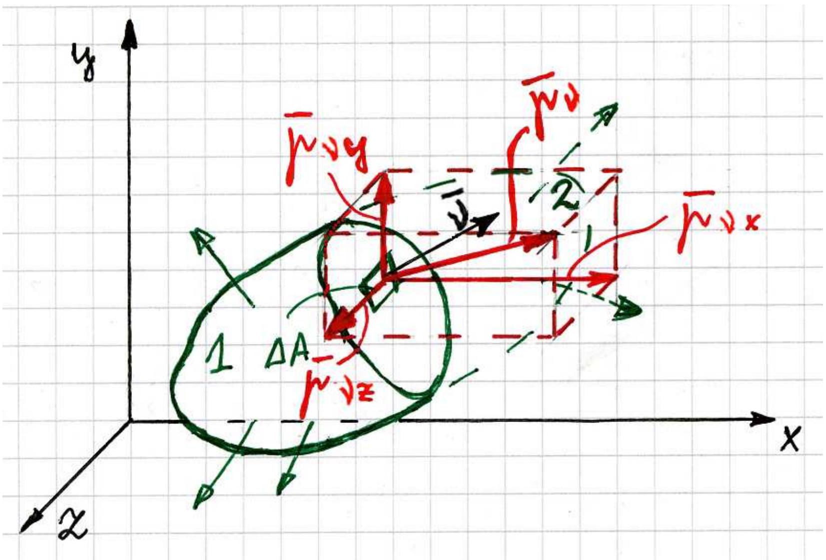
2.1 Jõud ja pinged

Kehale mõjuvad välisjõud saab jagada kahte rühma.

1. *Pindjõud ehk kontaktjõud* on põhjustatud keha kontaktist teiste kehade või keskkondadega. Näiteks survejõud, mis mõjuvad vette asetatud kehale või vundamendi surve pinnasele jne.
   - Pindjõu dimensioon: 1N/m^2
   - Kui pind, millel jõud mõjub on väike võrreldes keha mõõtemetega (keha välispinnaga), siis võib sellist jõudu lugeda koondatud jõuks, st. summaarne jõud loetakse rakendatuks ühte punkti.
2. *Mahujõud ehk ruumjõud* mõjuvad igale keha punktile. Näiteks gravitatsioonijõud (raskusjõud) või elektromagnetilised jõud või inertsjõud.
   - Mahujõu dimensioon: 1N/m^3
   - Mõnedes õpikutes käsiteltakse mahujõu asemel massjõudu. Vastav dimensioon 1N/kg

Vaatleme meelevaldse kujuga keha, millele mõjuv pind- ja mahujõududest koosnev (välis)jõudude süsteem on tasakaalus.

Rakendame lõikemeetodit: jagame keha mõtteliselt osadeks 1 ja 2; hülgame osa 2 ja vaatleme osa 1 (joon. 2.1).

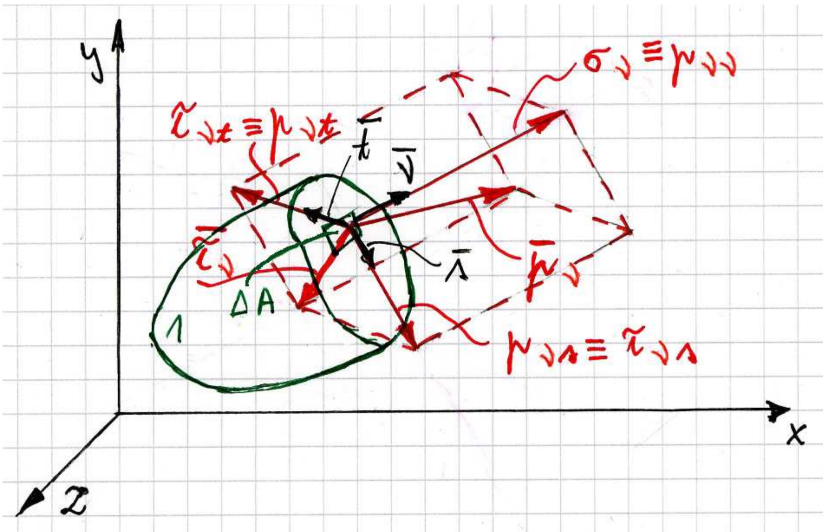


Joonis 2.1: Pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ koordinaatelgede x, y, z suunalised komponendid.

- Selleks, et osa 1 oleks ka peale osa 2 eraldamist tasakaalus tuleb lõikepinnale rakendada osa 2 asendavad jõud, st. sisejõud, mis on jaotunud üle kogu lõikepinna.
- Lõikepind osal 1 on määratud välisnormaaliga $\boldsymbol{\nu}$. Mõjugu väikesel pinnal ΔA, mis ümbritseb punkti P, summaarne sisejõud $\mathbf{\Delta S}$. Suhet $\mathbf{\Delta S}/\Delta A$ võib nimetada keskmiseks pingeks pinnal ΔA. √
- Kui minna piirile $\Delta A \to 0$, saame (tegeliku) *pinge vaadeldavat punkti P läbival pinnal normaaliga $\boldsymbol{\nu}$*

$$\mathbf{p}_\nu = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\mathbf{\Delta S}}{\Delta A}. \tag{2.1}$$

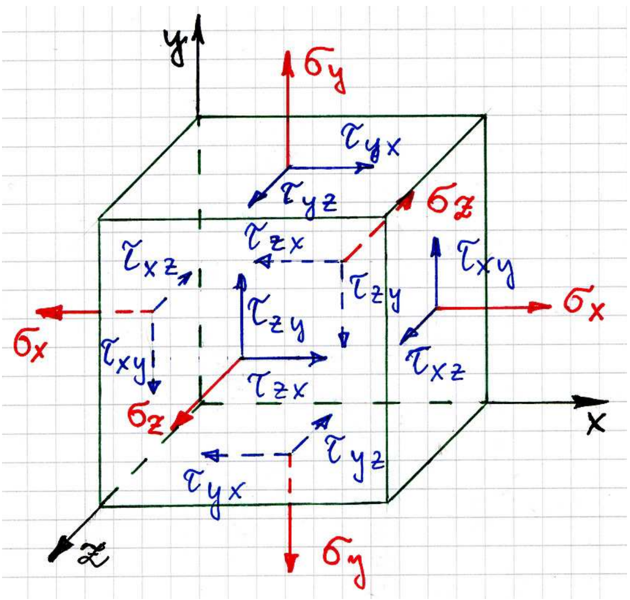
- Üldjuhul vektorite $\boldsymbol{\nu}$ ja $\mathbf{p}_\nu$ suunad ei ühti.
- Edaspidi on tihti otstarbekas kasutada pingevektori asemel tema projektsioone koordinaattelgedel $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$, $p_{\nu z}$, mis omakorda määravad ära pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ koordinaatelgede xyz sihilised komponendid (vt. joon. 2.1). Siin ja edaspidi märgib esimene indeks pinnanormaali sihti ja teine pingekomponendi mõjumise sihti.



Joonis 2.2: Pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ lahutamine normaal- ja nihkepingeks.

- Teisest küljest saab pinnal normaaliga $\boldsymbol{\nu}$ mõjuva pingevektori lahutada *normaal- ja nihkepingeks*: $\mathbf{p}_\nu = \boldsymbol{\sigma}_\nu + \boldsymbol{\tau}_\nu$. Nihkepinge $\boldsymbol{\tau}_\nu$ lahutatakse tavaliselt veelkord kaheks komponendiks: $\boldsymbol{\tau}_\nu = \boldsymbol{\tau}_{\nu s} + \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$ (vt. joon. 2.2, kus $\mathbf{p}_{\nu n} \equiv \boldsymbol{\sigma}_\nu$, $\mathbf{p}_{\nu s} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu s}$ ja $\mathbf{p}_{\nu t} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$).

Kui lõike pind on paralleelne koordinaattasanditega, siis kasutatakse indeksi ν asemel lõikepinnale normaaliks oleva koordinaattelje nime, näiteks x.



Joonis 2.3: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.

Märgireeglid: joonis 2.3.

- *Positiivne sisepind* on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

2.2 Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

Välisjõudude toimel tahkes kehas tekkivad pinged pole üldjuhul konstantsed, vaid võivad omada igas keha punktis erinevaid väärtusi:

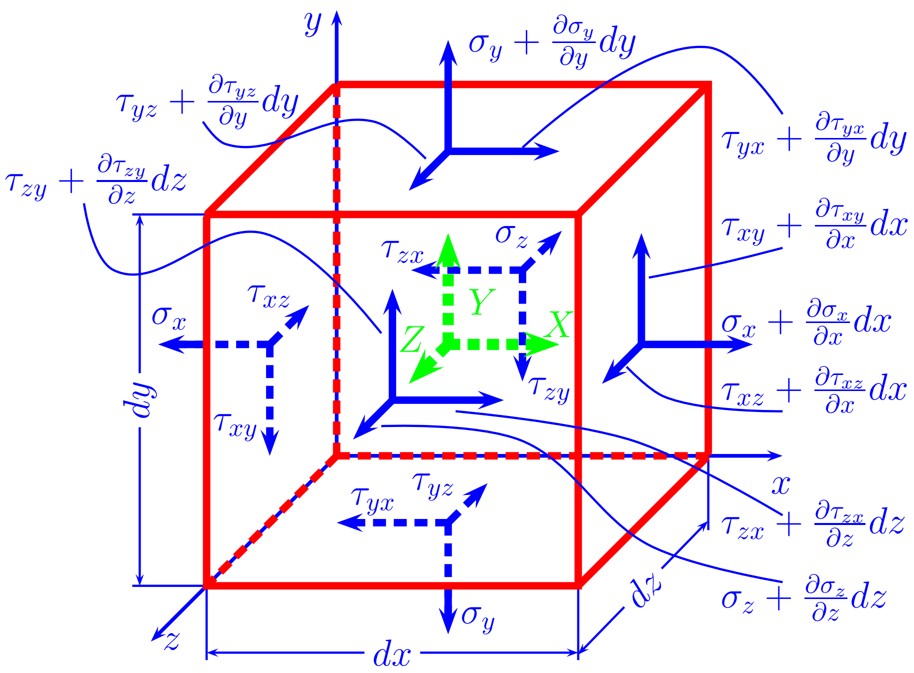
$$\sigma_x = \sigma_x(x,y,z),\ \sigma_y = \sigma_y(x,y,z),\ \sigma_z = \sigma_z(x,y,z),\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y,z),\ldots \quad (2.2)$$

Vaatleme välisjõudude mõju all tasakaalus olevast kehast välja lõigatud elementaarristtahukat (joon. 2.4). Igal risttahuka tahul mõjub 3 pingekomponenti, kokku seega 18 pingekomponenti. Olgu punktis koordinaatidega x, y, z normaalpinge väärtus $\sigma_x(x,y,z)$. Kasutades Taylori rittaarendust[1] (säilitades seejuures vaid esimest järku väikesed suurused) võime kirjutada

$$\sigma_x(x+dx, y+dy, z+dz) = \sigma_x(x,y,z) + \frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial z}dz. \quad (2.3)$$

- Avaldise (2.3) põhjal $\sigma_x(x+dx,y,z) = \sigma_x(x,y,z) + \frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x}dx$.
- Teiste pingekomponentide jaoks saab tuletada analoogilised valemid.

[1]Ühe muutuja funktsiooni korral $f(x+dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)dx^k$



Joonis 2.4: Elementaarristtahukas

- Kehale mõjuvate mahujõudude projektsioonid tähistame X, Y, Z (NB! mahujõu dimensioon on 1 N/m^3).

Keha on tasakaalus, järelikult peab ka elementaarristtahukas olema tasakaalus ja talle mõjuvate jõudude peavektor ja peamoment olema võrdsed nulliga. Tasakaaluvõrrandite koostamiseks liidame esiteks risttahukale mõjuvate jõudude projektsioonid x-teljele ja võrrutame saadu nulliga:

$$\begin{gathered}\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dxdz - \tau_{yx} dxdz + \\ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy - \tau_{zx} dxdy + X dxdydz = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

Avame sulud ja jagame saadud võrrandi elementaarruumalaga $dV = dxdydz$:

$$\frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\tau_{zx}}{dz} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\tau_{zx}}{dz} + X = 0.$$

Peale koondamist saame ühe otsitavatest võrranditest

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \tag{2.5}$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks tasakaaluvõrrandit kasutades jõudude projektsioone y- ja z-teljel:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Saadud võrrandid ongi *elastse keha tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid*.Kui mahujõudude projektsioonid sisaldavad inertsjõudusid, saab viimste abil lahendada ka dünaamika ülesandeid. √

Järgnevalt leiame momendid ristahuka keskpunkti läbiva x-telje suhtes ja võrrutame tulemuse nulliga:

$$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dxdz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dxdz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dxdy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dxdy \frac{dz}{2} = 0. \tag{2.7}$$

Avame sulud:

$$\tau_{yz}dxdydz - \tau_{zy}dxdydz + \underbrace{\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dxdz\frac{dy^2}{2} - \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dxdy\frac{dz^2}{2}}_{\text{kõrgemat järku väikesed liikmed }\to 0} = 0. \tag{2.8}$$

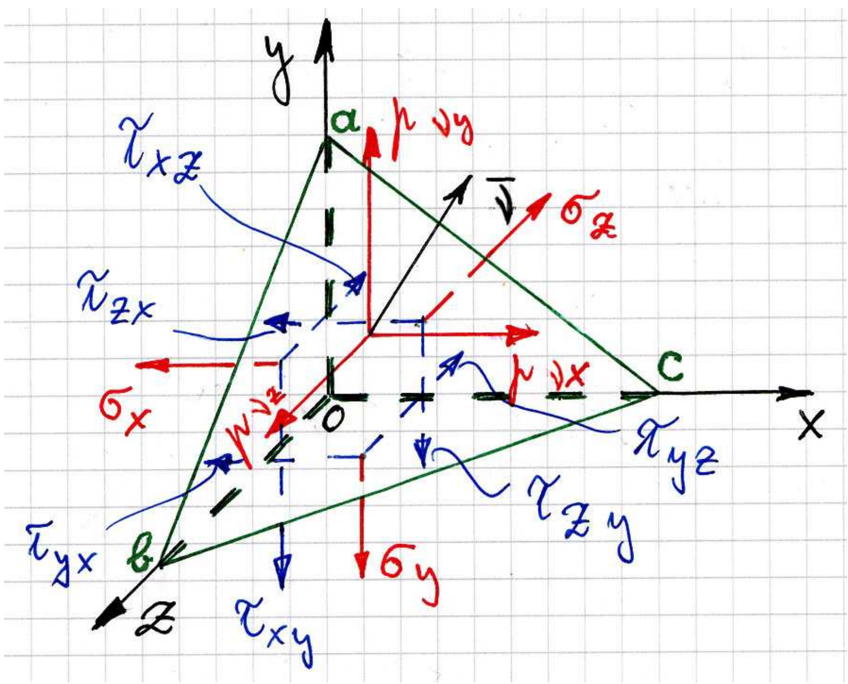
Pärast kõrgemat järku väikeste liikmete hülgamist saame $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Leides analoogiliselt momendid y- ja z-telje suhtes saame kokkuvõttes

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \tag{2.9}$$

mis on tuntud *nihkepingete paarsuse seadusena.*[2] Tänu nihkepingete paarsusele väheneb tundmatute pingekomponentide arv üheksalt kuuele. Nende määramiseks on meil aga ainult kolm tasakaaluvõrrandit. Seega on tegu staatiliselt määramata ülesandega ja me vajame lisavõrrandeid, mis võtaks arvesse materjali füüsikalisi omadusi. Neist tuleb lähemalt juttu järgmises peatükis.

[2]Sama seadus oli homogeense pinguse jaoks tuletatud 2. peatükis.

2.3 Pinged kaldpinnal, rajatingimused keha pinnal



Joonis 2.5: Pinged kaldpinnal. Kaldpinnal normaaliga ν mõjuv pingevektor $\mathbf{p}_\nu$ on esitatud läbi tema projektsioonide $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$ ja $p_{\nu z}$.

Selleks, et uurida pingeseisundit suvalises keha punktis on vaja osata leida pingeid meelevaldse orientatsiooniga kaldpinnal. Joonisel 2.5 kujutatud kaldpinna *abc* orientatsioon koordinaattelgede suhtes on määratud pinnanormaali $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinustega

$$l = \cos(\boldsymbol{\nu}, x), \qquad m = \cos(\boldsymbol{\nu}, y), \qquad n = \cos(\boldsymbol{\nu}, z). \tag{2.10}$$

Koos koordinaatpindadega moodustub lõpmata väike tetraeeder $Oabc$. Tähistame kaldpinna *abc* pindala dA. Tetraeedri teiste külgede pindalad avalduvad nüüd läbi vektori $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinuste[3]:

$$A_{Oab} = dA \cdot l, \qquad A_{Obc} = dA \cdot m, \qquad A_{Oac} = dA \cdot n. \tag{2.11}$$

Koostame tetraeedri jaoks tasakaalu võrrandid. Peale joonisel 2.5 näidatud pingete mõjuvad tetraeedrile veel mahujõud X, Y, Z, mida pole joonisel näidatud. Projekteerime tetraeedrile mõjuvad jõud x-teljele:

$$\begin{aligned} &p_{\nu x} dA - \sigma_x A_{Oab} - \tau_{yx} A_{Obc} - \tau_{zx} A_{Oac} + X dV = \\ &p_{\nu x} dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{yx} dA \cdot m - \tau_{zx} dA \cdot n + X dV = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

[3]Nurgad tetraeedri tahkude ja vastavate normaalide vahel on võrdsed.

Jagame viimase avaldise pindalaga dA, hülgame viimase liikme kui kõrgemat järku väikese[4] ja saame avaldise

$$p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n. \tag{2.13}$$

Korrates sama protseduuri teiste telgedega saame avaldised pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ ülejäänud kahe projektsiooni leidmiseks. Kokku saame

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \tag{2.14}$$

Valemid (2.14) võimaldavad leida mis tahes kaldpinnal mõjuva pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ komponente kui on teada pinnanormaal $\boldsymbol{\nu}$ ja pingekomponendid koordinaatpindadel $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots$.

Kui pind *abc* ühtib keha välispinnaga, siis esitavad võrrandid (2.14) *rajatingimusi (ääretingimusi) keha pinnal.*

[4]$\lim_{dA \to 0}(dV/dA) = 0$

2.4 Peapinged, pinge invariandid

Kuna vaadeldav tetraeeder on lõpmata väike, siis tegelikult võimaldavad valemid (2.14) määrata pingeid keha mis tahes punkti läbival mis tahes kaldpinnal kui on teada pinnanormaal $\boldsymbol{\nu}$ ja pinged (pingekomponendid $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$) seda punkti läbivatel koordinaattasanditel.

Pinnal normaaliga $\boldsymbol{\nu}$ mõjuva pinge saab omakorda jagada normaalpingeks $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ ja nihkepingeks $\boldsymbol{\tau}_\nu$. Kui on teada pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ komponendid ja normaali $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinused, siis saame leida pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ projektsiooni normaalil $\boldsymbol{\nu}$:

$$\sigma_\nu = \mathbf{p}_\nu \cdot \boldsymbol{\nu} = p_{\nu x} l + p_{\nu y} m + p_{\nu z} n. \tag{2.15}$$

On selge, et vaadeldav projektsioon on samal ajal ka normaalpinge $\boldsymbol{\sigma}$ projektsioon pinnanormaalil $\boldsymbol{\nu}$ ja seetõttu kasutamegi siin tähistust σ_ν. Kasutades valemeid (2.14) saab σ_ν omakorda avaldada koordinaattasandeil mõjuvate pingete kaudu. Nihkepinge $\boldsymbol{\tau}_\nu$ kujutab endast pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ projektsiooni vaadeldaval pinnal ja tema moodul

$$\tau_\nu^2 = p_\nu^2 - \sigma_\nu^2. \tag{2.16}$$

On selge, et nii $\mathbf{p}_\nu$, kui $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ ja $\boldsymbol{\tau}_\nu$ sõltuvad pinna orientatsioonist. Saab näidata, et igas punktis leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat pinda, millel nihkepinge $\boldsymbol{\tau}_\nu = 0$ ja normaalpinge $\boldsymbol{\sigma}_\nu = \mathbf{p}_\nu$. Selliseid pindasid nimetatakse *peapindadeks*, neil pindadel mõjuvaid normaalpingeid *peapingeteks* ja neid pindu määravaid pinnanormaale *peasuundadeks.*

Peapingete ja peasuundade leidmise protseduur.

- Tähistame otsitava peapinge σ ja talle vastava pinnanormaali suunakoosinused l, m, n.
- Nende nelja tundmatu määramiseks on võrrandsüsteem

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = 0, \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy} n = 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

koos lisatingimusega ⋆

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{2.18}$$

- Meid huvitab selle VS-i mittetriviaalne lahend (l, m, n pole korraga nullid). See tingimus on täidetud kui karakteristlik determinant

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.19}$$

- Viimasest saadakse omakorda karakteristlik võrrand

$$\sigma^3 - I_1^\sigma \sigma^2 + I_2^\sigma \sigma - I_3^\sigma = 0, \tag{2.20}$$

kus suuruseid

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{cases} \tag{2.21}$$

nimetatakse *pinge invariantideks*[5].

[5] Täpsemalt öeldes nimetatakse neid pingetensori invariantideks. Tensori mõiste juurde tuleme õige pea.

- Uuritaval juhul on kuupvõrrandil (2.20) kolm reaalarvulist lahendit, mis järjestatakse kahanevas järjekorras $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

- Neile vastava kolme peasuuna määramiseks asendatakse saadud kolm peapinget kordamööda võrrandisüsteemi (2.17), (2.18). Tulemusena saame igale peapingele σ_i vastava peasuuna suunakoosinused l_i, m_i, n_i, $i = 1, 2, 3$.

- Peasuundade praktilise leidmise juurde tuleme tagasi alajaotuses 2.6.

Sõltuvalt kuupvõrrandi lahendite väärtustest, saab eristada kolme juhtu:

1. Kui kõik kolm peapinget on erinevad, siis saadakse võrrandisüsteemi (2.17), (2.18) lahendamisel kolm ristuvat ühikvektorit.

2. Kui kõik kolm peapinget on võrdsed, siis sobib peapinnaks iga vaadeldavat punkti läbiv pind. Praktilistel kaalutustel valitakse tavalistelt ristuvate pindade kolmik, mis omakorda määrab omavahel ristuvate peasuundade kolmiku.

3. Kui kaks peapinget on võrdsed ja kolmas neist erinev, siis saame määrata sellele kolmandale peapingele vastava peasuuna, mis omakorda määrab peapinna. Ülejäänud kaheks peasuunaks sobib mistahes ristuvate suundade paar, mis on omakorda risti kolmanda peasuunaga.

Kasutades peapingeid saame pinge invariandid kujul

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2^\sigma = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \\ I_3^\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \tag{2.22}$$

- Pinge invariandid on sõltumatud koordinaatide xyz valikust.
- Kuna invariandid on sõltumatud koordinaatide valikust, tuleb neid vaadelda kui põhilisi suurusi, mis iseloomustaved pinget vaadeldavas punktis — kõik pingekomponendid on määratavad läbi invariantide.

2.5 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaattasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ja kuus nihkepinget $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada 3×3 (tasandülesannete korral 2×2) tabelina nagu maatrikseid. Pingetensor iseloomustab täielikult pingust (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingevektori suvalisel seda punkti läbival pinnal (vt. valemid (2.14)).

Käesolevas kursuses vaatleme kolme liiki füüsikalisi suurusi — skalaare, vektoreid ja (teist järku) tensoreid.

1. *Skalaar* pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus. Näited: mass, tihedus, temperatuur.

2. *Vektorit* iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund. Vektori iga komponent on samuti seotud ühe suunaga ja tema tähistamisel kasutatakse ühte indeksit. Näited: jõud, pinnanormaal, kiirus, siire.
3. *Teist järku tensori* iga komponenti iseloomustab lisaks moodulile kaks suunda ja tema tähistamisel kasutatakse kahte indeksit. Näiteks pingetensori korral näitab esimene indeks pinnanormaali suunda ja teine indeks pingekomponendi suunda.

- Vektoreid võib nimetada esimest järku tensoreiks ja skalaare nullindat järku tensoreiks.

Maatriksite ja tensorite omavaheline suhe

- Kui on fikseeritud kordinaatsüsteem, siis saab iga teist järku tensori esitada 3×3 maatriksina ja iga vektori arvukolmikuna.
- Vastupidine aga ei kehti — iga 3×3 maatriks ei osutu tensoriks.
- Koordinaatide teisendamisel teisenevad nii tensori kui vektori komponendid kindlate reeglite alusel.

  - Pärast koordinaatteisendust peab tensor (vektor) esitama endiselt täpselt sama füüsikalist suurust, mida enne teisendust.
    - Kui see nii on, siis ongi tegu tensoriga (vektoriga), vastupidisel juhul mitte.
    - Vastupidine olukord on füüsikaliselt vastuvõtmatu. Pole võimalik, et pinge keha punktis või punkti siire või kiirus sõltuks koordinaatsüsteemi valikust.
    - Näide. Vektor ning kaks koordinaatsüsteemi xy ja $x'y'$, mille vaheline nurk on θ.

- Kui tensor (vektor) on määratud igas vaadeldava keha punktis, siis on meil tegu tensorväljaga (vektorväljaga). Näiteks on pingetensori korral tegu tensorväljaga, sest ta on määratud igas vaadeldava keha punktis.
- Pingetensor koordinaatides (x, y, z) on esitatud kujul (2.23) ja peasuundades kujul

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

- Kui tähistame pingetensori ja pinna ühiknormaali

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\nu} = [l, m, n],$$

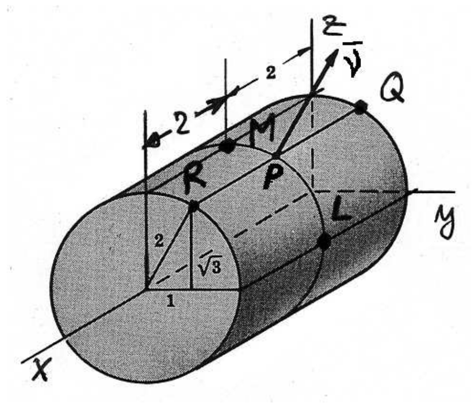
siis vastavalt maatriksite teooriast tuntud valemitele

$$\mathbf{p}_\nu = [p_{\nu x}, p_{\nu y}, p_{\nu z}] = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S}, \qquad \sigma_\nu = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{p}_\nu, \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}, \qquad \mathbf{p}_\nu = \boldsymbol{\sigma}_\nu + \boldsymbol{\tau}_\nu. \tag{2.26}$$

Neid valemeid on mugav kasutada ülesannete lahendamisel

2.6 Ülesanded



Ülesanne 1. Pingus keha punktides on antud pingetensoriga (Descartes'i ristkoordinaatides)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}.$$

Leida pinge(vektor), mis mõjub silindri külgpinnal $y^2 + z^2 = 4$ punktides P, Q, R, L ja M ning silindri otspindade punktides Q ja R. Lahutage pingevektor normaal- ja nihkepingeks.

Lahendamisel tuleb kasutada valemeid (2.14), (2.15), (2.16), (2.25) ja (2.26)

Ülesanne 2. Leida peapinged ja peasuunad pingetensorile

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix}.$$

Ülesannet 2 on võimalik lahendada kahel põhimõtteliselt erineval viisil.

A. «Käsitsi.»

1. Tuleb koostada võrrandisüsteem (2.17) ja vastav karakteristlik determinant.

2. Karakteristliku determinandi abil tuleb moodustada karakteristlik võrrand ja leida selle lahendid. Viimased ongi peapinged, mis tuleb järjestada kahanevas järjekorras ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

3. Peapinged σ_i ($i = 1, 2, 3$) tuleb asendada ükshaaval võrrandisüsteemi (2.17).

   (a) Iga peapinge σ_i jaoks saate kolm võrrandit, millest peab välja valima suvalised kaks. Neisse tuleb asendada $n_i = 1$ ja leida vastavad l_i ja m_i. Tulemusena saate vektori $\mathbf{N^*}_i = (l_i^*, m_i^*, n_i^*)$, mis määrab peapingele σ_i vastava peasuuna.

   (b) Järgmise sammuna tuleb saadud vektor $\mathbf{N}^*$ normeerida, s.t. leida vastav ühikvektor $\mathbf{N}_i = \mathbf{N^*}_i / |\mathbf{N^*}_i|$.

4. Peale peasuundade leidmist tuleb kontrollida, kas nad moodustavad parema käe kolmiku, s.t. kas $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.

   - Kui $\mathbf{N}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ ja $\mathbf{N}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, siis

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

B. «Arvutiga»

1. Sisestada pingetensori maatriks.
2. Leida peaväärtused ja peasuunad. Harilikult on selleks käsk `eig` (*eigenvalues*).
3. Järjestada peaväärtused ja peasuunad ümber nii, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Kuna koos peaväärtustega tuleb ümberjärjestada ka peavektorid, siis tuleb tihti muuta arvutist saadud peavektori $\mathbf{N}_3$ orientatsioon selliseks, et peavektorid moodustaksid parema käe kolmiku ja seega $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.