

## Peatükk 3

# Deformatsioon ja olekuvõrrandid

---

### 3.1. Siire ja deformatsioon

3 - 2

## 3.1 Siire ja deformatsioon

### 3.1.1 Cauchy seosed

Vaatleme deformeeruva keha meelevaldset punkti  $A$ . Algolekus on tema koordinaadid  $x, y, z$ . Välisjõudude toimel liigub ta asendisse  $A'$  koordinaatidega  $x', y', z'$ . Vektorit  $\overline{AA'}$  nimetatakse punkti  $A$  *siirdeks ehk siirdevektoriks*.<sup>1</sup>

Eristame kahte liiki siirded:

- keha kui terviku siirded (toimuvad ilma deformatsioonideta) — jäiga keha mehaanika<sup>2</sup>
- siirded, mis on seotud keha deformatsiooniga — käesolevas kursuses vaadeldakse vaid selliseid siirdeid.

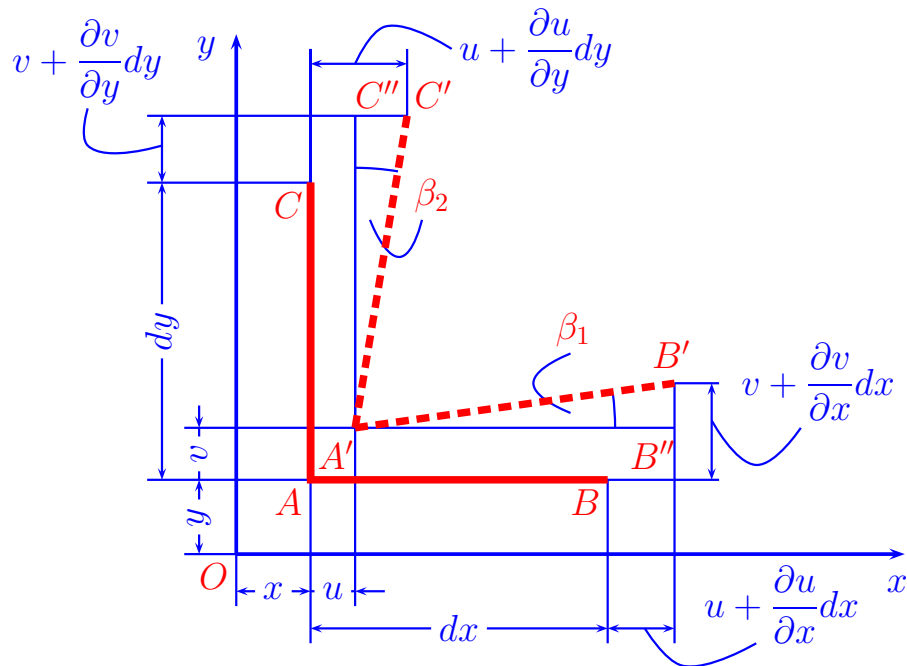
Siirdevektori koordinaattelgede  $x, y, z$  sihilisi komponente tähistatakse  $u, v, w$ , st.,

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z. \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Siirde sünonüüm on paigutis.

<sup>2</sup>Mitmed pideva keskkonna mehaanika õpikud nimetavad selliseid siirdeid *jäigaks deformatsiooniks*.



Joonis 3.1: Normaali- ja nihkedeformatsioon

Kui keha deformeerub, siis peavad erinevate punktide siirded olema erinevad, st.,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (3.2)$$

Vaatleme lõpmata väikese risttahuka kahe serva käitumist  $x, y$  tasandil (joon. 3.1). Enne deformatsiooni:

- $AB = dx \parallel x$  ja  $AC = dy \parallel y$ ;
- Punktide koordinaadid:  $A : (x, y)$ ;  $B : (x + dx, y)$ ;  $C : (x, y + dy)$ .

Peale deformatsiooni:  $A \rightarrow A'$ ;  $B \rightarrow B'$  ja  $C \rightarrow C'$ . Vastavad siirded:

- Punkt  $A$ :  $u$  ja  $v$ ;
- Punkt  $B$ :  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$  ja  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ ;
- Punkt  $C$ :  $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$  ja  $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ ;

Kuna lineaarses elastsusteoorias on kõik muutused väikesed, siis on väikesed ka servade  $AB$  ja  $AC$  pöördenurgad, st.,  $\cos \beta \sim 1$ ,  $\sin \beta \sim \beta$  ja  $\tan \beta \sim \beta$ .

Seetõttu lõikude  $AB$  ja  $AC$  suhtelised pikenemised (koordinaatide  $x$  ja  $y$  sihilised normaaldeformatsioonid)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{A'B'' - AB}{AB} = \frac{(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u) - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} \approx \frac{A'C'' - AC}{AC} = \frac{(dy + v + \frac{\partial v}{\partial y}dy - v) - dy}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

ja pöörded

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 \approx \tan \beta_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{(1 + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=\varepsilon_x \ll 1})dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \beta_2 \approx \tan \beta_2 = \frac{C'C''}{A'C''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy + \frac{\partial u}{\partial y}dy} = \dots = \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

*Nihe ehk nihkedeformatsioon on defineeritud kui algse täisnurga muutus*, st. nihe  $xy$  tasandil

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Analoogiliselt saab leida suhtelised pikenemised (normaaldeformatsioonid) ja nihked teistel koordinaattasanditel. Kokku saame kuus seost deformatsiooni-komponentide  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  ja siirdekompontentide  $u, v, w$  vahel:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Saadud seoseid nimetatakse tihti *Cauchy võrranditeks* või *Cauchy seosteks*.

**Märgireeglid:**

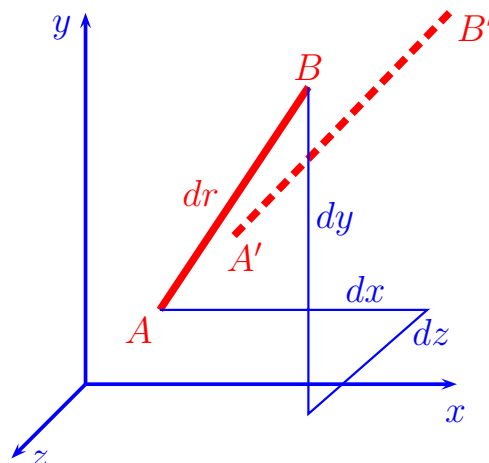
- pikenemisele vastav normaaldeformatsioon on positiivne;
- koordinaattelgede positiivsete suundade vahelisele täisnurga vähenemisele vastav nihe on positiivne.

**Järeldus:** Positiivsed pinged põhjustavad positiivseid deformatsioone.

### 3.1.2 Orienteeritud lõigu pikenemine

Vaatleme kahte lõpmata lähedast punkti  $A$  ja  $B$ , kusjuures vektor  $\overline{AB} = d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ . Siinjuures on vektori  $d\mathbf{r}$  suunakoosinused

$$l = \frac{dx}{dr}, \quad m = \frac{dy}{dr}, \quad n = \frac{dz}{dr}.$$



Joonis 3.2: Lõigu  $AB$  deformatsioon

Vastava joonelemendi  $AB$  suhteline pikenemine (deformatsioon)

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB}. \quad (3.7)$$

Siin

$$\begin{cases} AB = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dr, \\ A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial r} dr\right)^2} = \dots \\ = dr \sqrt{1 + 2\left(l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}\right)}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Kombineerides kahte viimast avaldist ning hinnates liikmete suurusjärke saame †

$$\varepsilon_r = l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3.9)$$

Teisendades osatuletised  $r$  järgi osatuletisteks koordinaatide  $x, y, z$  järgi, saame<sup>3</sup> ‡

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + lm \gamma_{xy} + mn \gamma_{yz} + ln \gamma_{xz}. \quad (3.10)$$

<sup>3</sup>Detailset tuletuskäiku vt. R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967 lk. 279–282.

**Rakendus tensomeetrias.** Olgu vaja määrata  $xy$  tasandi meelevaldses punktis normaaldeformatsioonid (suhtelised pikenemised)  $\varepsilon_x$  ja  $\varepsilon_y$  ning nihe  $\gamma_{xy}$ . Kuna antud juhul on  $n = 0$ , siis saame valemile (3.10) kuju

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + lm \gamma_{xy}. \quad (3.11)$$

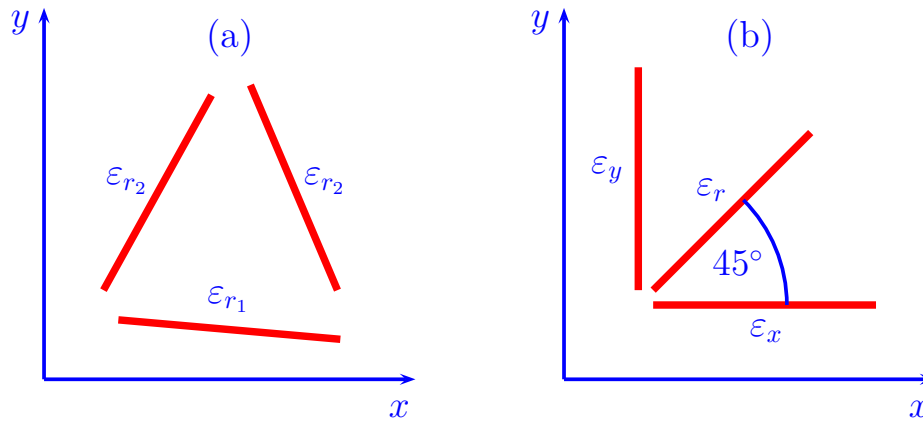
Kaks lahendust:

1. Vaadeldava punkti ümbrusse asetatakse kolm suvaliselt orienteeritud tensomeetrit (joon. 3.3 (a)). Tensomeetrite lugemid esitavad valemi (3.11) vasakut poolt kolme erineva orientatsiooniga lõigu jaoks. Kuna tensomeetrite orientatsioon on teada (s.o. määratud sihikoosinustega  $l, m, n$ ) saadakse kolmest lugemist kolm võrrandit otsitavate suuruste  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  ja  $\gamma_{xy}$  määramiseks.
2. Kui orienteerida kaks tensomeetrit telgede  $x$  ja  $y$  sihis (joon. 3.3 (b)), siis saame deformatsioonid  $\varepsilon_x$  ja  $\varepsilon_y$  otse tensomeetrite lugemitest,  $\gamma_{xy}$  aga avaldame võrrandist (3.11)

$$\gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_r - l^2 \varepsilon_x - m^2 \varepsilon_y}{lm}. \quad (3.12)$$

Üldjuhul on kolmas tensomeeter koordinaattelgede suhtes  $45^\circ$  nurga all. Seega  $l = m = \sqrt{2}/2$  ja

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_r - \varepsilon_x - \varepsilon_y. \quad (3.13)$$



Joonis 3.3: Tensomeetria näide.

## 3.2 Deformatsioonitensor

Normaaldeformatsioonidest (suhtelistest piknemistest) ja nihetest saab moodustada deformatsioonitensori

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Erinevalt pingetensorist on siin nihete kordajaks 0,5. *Ilma selliste kordajateta ei alluks deformatsioonitensor tensorarvutuste reeglitele.*

Analoogiliselt pingetensoriga saab ka deformatsioonitensorile leida peaväärtused ja peasuunad (ehk peavektorid) ning invariandid — tuleb lihtsalt rakendada analoogilisi valemeid ja arvutuseeskirju.

### 3.3 Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus

Üldjuhul muutub keha ruumala (maht) deformatsiooni käigus. Vaatleme lõpma- ta väikest risttahukat, mille ruumala enne deformatsiooni oli  $dV = dx dy dz$ . Ser- va  $AB$  pikkus enne deformatsiooni (vt. joon. 3.1) on  $dx$  ja peale deformatsiooni  $dx_1 = dx(1 + \varepsilon_x)$ . Analoogiliselt  $dy \rightarrow dy_1 = dy(1 + \varepsilon_y)$  ja  $dz \rightarrow dz_1 = dz(1 + \varepsilon_z)$ . Keha ruumala peale deformatsiooni leiame lähtudes eeldusest, et normaalde- formatsioonid ja nihked on väikesed. Pärast mõningaid teisendusi, mille käigus hüljatakse teist ja kolmandat järku väikesed liikmed, saame deformeerunud ele- mentaarristküliku mahuks  $dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ . *Ruumde- formatsioon ehk suhteline mahumuutus*<sup>4</sup> avaldub seega kujul

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.15)$$

Seega on ruumdeformatsioon võrdne deformatsioonitensori esimese invariandi- ga. Teisest küljest, arvestades deformatsioonide  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ja  $\varepsilon_z$  definitsioone (3.6) on ruumdeformatsioon siirde divergents:

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

---

<sup>4</sup>I. k. *dilatation*

### 3.4 Pidevustingimused

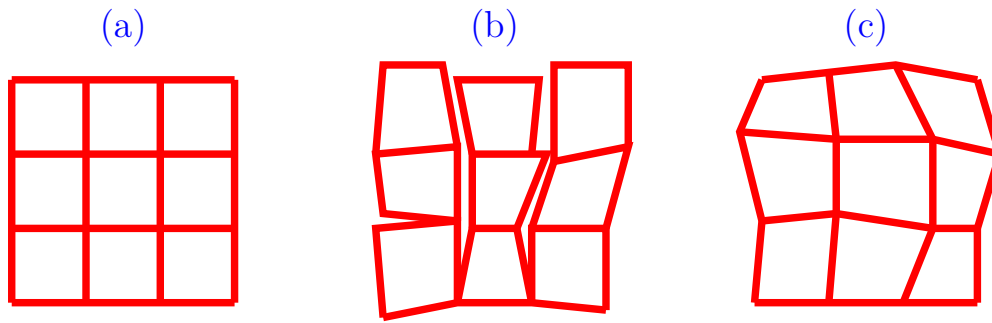
Cauchy võrrandid (3.6) seovad kuus deformatsioonikomponenti  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  kolme siirdekomponendiga  $u, v, w$ .

- Kui on antud kolm siirdekomponenti  $u, v, w$ , siis võrrandite (3.6) abil on võimalik üheselt määrata kuus deformatsioonikomponenti  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ .
- Kui on antud kuus deformatsioonikomponenti  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ , siis pole võrrandite (3.6) abil võimalik kolme siirdekomponenti  $u, v, w$  üheselt määrata. Ühese lahendi saamiseks tuleb sisse tuua kuut deformatsiooni- komponenti siduvad lisatingimused (lisavõrrandid). Neid lisatingimusi ni- metatakse *pidevustingimusteks*.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Pidevustingimusi nimetatakse ka pidevusvõrranditeks või sobivustingimusteks. Ingl. k. *compatibility condi- tions*.

### Alternatiivne põhjendus pidevustingimuste sissetoomiseks.



Joonis 3.4: Pidevustingimused

Oletame, et vaadeldav keha on algolekus lõigatud väikesteks kuupideks (joon. 3.4 a). Kui iga kuupi on seejärel eraldi deformeeritud, siis on nende uuesti ühendamine selliselt, et tekkiks pidev keha üldjuhul võimatu (joon. 3.4 b). Selleks, et peale deformatsiooni oleks meil endiselt tegu pideva kehaga (joon. 3.4 c), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama teatud tingimusi, mida eestikeelses kirjanduses nimetatakse tavaliselt *pidevustingimusteks*.

**Pidevusvõrrandite tuletamine.** Diferentseerime võrrandit (3.6)<sub>1</sub> kaks korda koordinaadi  $y$  järgi ja võrrandit (3.6)<sub>2</sub> kaks korda koordinaadi  $x$  järgi ning liidame saadud tulemused.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\gamma_{xy}} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.16)$$

Kombineerides võrrandeid (3.6)<sub>1-3</sub> saame veel kaks analoogilist pidevusvõrrandit.

Neist aga ei piisa. Selleks, et saada veel kolm võrrandit, leiame võrrandeist (3.6)<sub>4-6</sub> osatuletised «puuduva koordinaadi» järgi, liidame (3.6)<sub>4-5</sub> ja lahutame saadud summast (3.6)<sub>6</sub>. Seejärel võtame saadud tulemusest osatuletise  $y$  järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \quad (3.17)$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks pidevusvõrrandit.



Kokku oleme saanud kuus võrrandit, mis väljendavadki *pidevustingimusi*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Need võrrandid on tuntud ka *Saint-Venant'i pidevusvõrranditena*.

Saadud kuuel võrrandil on väga selge füüsikaline sisu.

1. Esimesed kolm: kui on antud normaaldeformatsioonid (suhtelised pikened) kolmes ristuvast sihis, siis nende sihtidega määratud tasandites ei saa nihkedeformatsiooni meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega (3.18)<sub>1-3</sub>.
2. Viimased kolm: kui on antud nihkedeformatsioonid kolmes ristuvast tasapinnas, siis ei saa normaaldeformatsioone meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega (3.18)<sub>4-6</sub>.

Neid võrrandeid on vaja arvesse võtta kui elastsusteooria ülesannet lahendatakse deformatsioonides või pingetes.

✓

## 3.5 Üldistatud Hooke'i seadus

### 3.5.1 Deformatsioonide avaldamine pingete kaudu

*Olekuvõrranditeks nimetatakse seoseid pingete ja deformatsioonide vahel.*

Klassikalise elastsusteooria olekuvõrrand on *üldistatud Hooke'i seadus*, mis ütleb, et deformatsioonitensori komponendid on lineaarsed funktsioonid pingetensori komponentidest. Kõige üldisemal juhul saab vastavad seosed esitada kujul<sup>6</sup>

$$\begin{cases} \varepsilon_x = C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{xy} + C_{15}\tau_{yz} + C_{16}\tau_{zx}, \\ \varepsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{xy} + C_{25}\tau_{yz} + C_{26}\tau_{zx}, \\ \varepsilon_z = C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}\tau_{xy} + C_{35}\tau_{yz} + C_{36}\tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} = C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}\tau_{xy} + C_{45}\tau_{yz} + C_{46}\tau_{zx}, \\ \gamma_{yz} = C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}\tau_{xy} + C_{55}\tau_{yz} + C_{56}\tau_{zx}, \\ \gamma_{zx} = C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}\tau_{xy} + C_{65}\tau_{yz} + C_{66}\tau_{zx}. \end{cases} \quad (3.19)$$

<sup>6</sup>Sellisel kujul on pingete ja deformatsioonide vahelised seosed esitaud näiteks õpikutes R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967 ja V. I. Samul, Osnovõ Teorii Uprugosti i Plastitšnosti /Elastsus- ja plastsusteooria alused/, Moskva, Võšaja Škola, 1982.

Viimased avaldised sisaldavad 36 *elastsuskonstanti* — seda on palju! Kui eeldada, et keha on ideaalselt elastne (st. peale koormuse kõrvaldamist taastub algne kuju) ja isotroopne, siis jääb järele vaid kaks sõltumatut elastsuskonstanti, mis on määratavad väga lihtsate eksperimentide abil ja on kasutuses ka tugevusõpetuses. Need kaks konstanti on Youngi moodul  $E$  ja Poissoni koefitsent (Poissoni tegur)  $\nu$

- Tõmme–surve ( $x$ -telje sihis).
  - Elastsuskonstant ehk Youngi moodul  $E$ :  $\varepsilon_x = \sigma_x/E$
  - Poissoni koefitsent  $\nu$ :  $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$
- Nihe ( $xy$  tasandis).
  - Nihkeelastsusmoodul  $G$ :  $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$ , kus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.20)$$

Kuna nihkeelastsusmoodul  $G$  on avaldatav  $E$  ja  $\nu$  kaudu, siis ei saa teda pidada iseseisvaks elastsuskonstandiks.

Üldistatud Hooke'i seaduse tuletamiseks vaatleme lõpmata väikest isotroopset risttahukat, milles mõjuvad vaid normaalpinged  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Pinge  $\sigma_x > 0$  põhjustab pikenemist  $x$ -telje sihis ja lühenemist  $y$ - ja  $z$ -telje sihis. Analooiline toime on normaalpingetel  $\sigma_y > 0$  ja  $\sigma_z > 0$ . Seega on summaarne suhteline pikenemine  $x$ -telje sihis ehk normaaldeformatsioon

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (3.21)$$

Nihkepingete ja nihkedeformatsioonide vahelised seosed on määratud Hooke'i seadusega iga koordinaattasandi jaoks sõltumatult, s.t.,  $\tau_{xy}$  põhjustab vaid nihet  $\gamma_{xy}$ , jne. (vrd. normaaldeformatsioonidega).

Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad *üldistatud Hooke'i seadust* isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (3.22)$$

### 3.5.2 Hooke'i seadus ruumdeformatsiooni jaoks

Vastavalt üldistatud Hooke'i seadusele (3.22)

$$\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{=\theta} = \frac{(1 - 2\nu)}{E} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{=I_1^\sigma} \quad (3.23)$$

Seega

$$\theta = \frac{(1 - 2\nu)I_1^\sigma}{E}. \quad (3.24)$$

Suurust  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  nimetatakse *ruumdeformatsiooniks* ja ta on ühtlasi ka deformatsioonitensori esimene invariant. Tuues sisse *ruumpaisumismooduli*  $K$  ja *keskmise normaalpinge*  $\sigma_0$ ,

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1^\sigma}{3}, \quad (3.25)$$

saame lineaarse seose keskmise normaalpinge ja ruumdeformatsiooni vahel kujul

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (3.26)$$

### 3.5.3 Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu

Liidame avaldise (3.22)<sub>1</sub> paremale poolele ja lahutame avaldise (3.22)<sub>1</sub> paremast poolest suuruse  $\frac{1}{E}\nu\sigma_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_x - \nu I_1^\sigma]. \quad (3.27)$$

Avaldades (3.24)-st invariandi  $I_1^\sigma = E\theta/(1 - 2\nu)$ , saame

$$\varepsilon_x = \frac{(1 + \nu)\sigma_x}{E} - \frac{\nu\theta}{(1 - 2\nu)}, \quad \text{kust} \quad \sigma_x = \frac{E\nu\theta}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{1 + \nu} \quad (3.28)$$

Tuues sisse *Lamé koefitsiendid*

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad (3.29)$$

saame valemist (3.28)<sub>2</sub>  $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$ .

Leides analoogilised avaldised  $\sigma_y$  ja  $\sigma_z$  jaoks ning avaldades seostest (3.22) nihkepinged, olemegi saanud *Hooke'i seaduse alternatiivse kuju*

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Kasutades viimaseid valemleid leiaime seose pingetensori ja deformatsiooniten-  
sori esimese invariandi vahel

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{=I_1^\sigma} = 3\lambda\theta + 2\mu \underbrace{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}_{\theta}, \quad \text{kust} \quad I_1^\sigma = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (3.31)$$

Kui tähistada keskmist normaaldeformatsiooni

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\theta}{3}, \quad (3.32)$$

saame seose keskmise normaalpinge ja keskmise normaaldeformatsiooni vahel

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0. \quad (3.33)$$

### 3.5.4 Anisotroopsed kehad

Paljudes õpikutes<sup>7</sup> esitatakse valemitega (3.19) analoogilised pingete ja deformatsioonide vahelised seosed natuke teisel kujul. Esiteks tuuakse sisse tähistused

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad \sigma_4 = \tau_{yz}, \quad \sigma_5 = \tau_{xz}, \quad \sigma_6 = \tau_{xy} \quad (3.34)$$

ja

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_4 = 2\gamma_{yz}, \quad \varepsilon_5 = 2\gamma_{xz}, \quad \varepsilon_6 = 2\gamma_{xy}. \quad (3.35)$$

Seejärel esitatakse pinge sõltuvana deformatsioonist kujul

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

<sup>7</sup>Vt. näiteks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999

ja deformatsioon sõltuvana pingest kujul

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Elastsuskoefitsentidest moodustatud maatriksit  $[C_{ij}]$  nimetatakse *jäikusmaatriksiks*<sup>8</sup>. Maatriksit  $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$  võib eesti keeles seega nimetada *pöördjäikusmaatriksiks*<sup>9</sup>.

<sup>8</sup>I. k. *stiffness matrix*

<sup>9</sup>I. k. *compliance matrix*. Tehnikasõnastikus on ingliskeelse sõna *compliance* eestikeelseks vasteks pakutud ka *vetruvus*.

Eelmistes alajaotustes vaatlesime isotroopseid materjale ning seal oli pingete ja deformatsioonide vaheliste seoste kirjeldamiseks vaja vaid kahte sõltumatut elastsuskoeffitsienti. Anisotroopse keha puhul on elastsuskonstantide arv loomulikult suurem. Kuna anisotroopseid materjale on mitut liiki, siis tuleb vajalik elastsuskonstantide arv määrata iga liigi jaoks eraldi.

Ortotroopset materjalid, näiteks vineer, on üks sagedamini esinevaid anisotroopse materjali liike. Sellisest materjalist kehade jaoks on võimalik määrata 3 omavahel ristuvat telge (peasuunada), mille sihis rakendatud normaalpinged ei põhjusta telgedevaheliste nurkade muutumist. Ortotropse materjali elastsed omadused ei muutu telgede pööramisel  $180^\circ$  võrra, kuid muutuvad iga teistsuguse pöörde korral. Ortotropse materjali iseloomustamiseks on vaja üheksat elastsuskonstanti. Valemid (3.37) saavad selliste materjalide korral kuju

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

kus

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3}, \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \\ S_{55} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{44} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

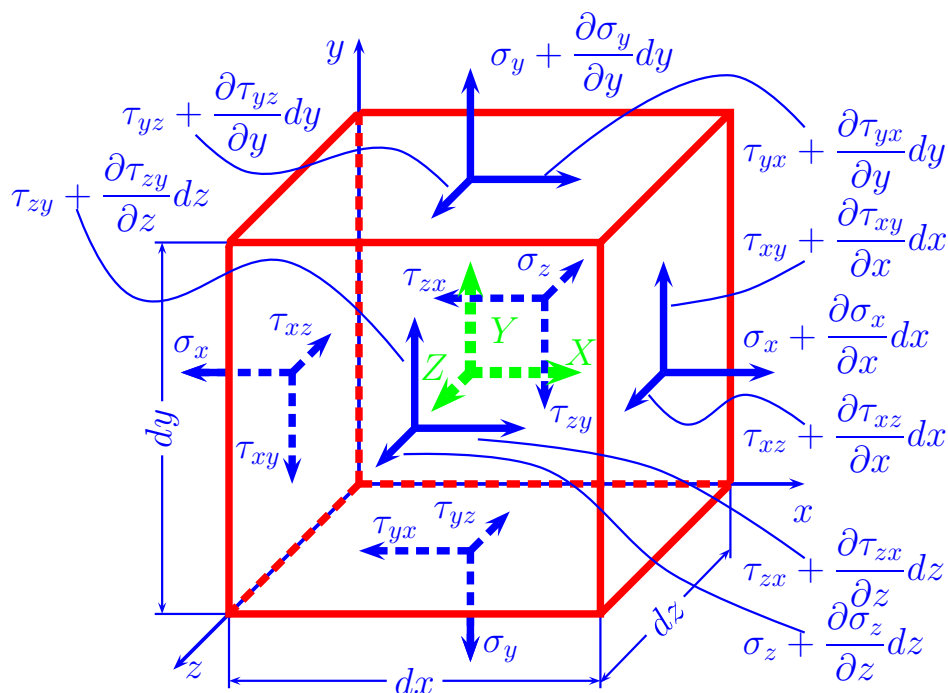
Konstandid  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  ja  $G_{23}$  on vastavalt Youngi moodulid, Poissoni tegurid ja nihkeelastsusmoodulid peatelgedega 1, 2, 3 määratud sihtides<sup>10</sup>.

<sup>10</sup>Vt. lisaks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999 §1.4.6

### 3.6 Deformatsiooni potentsiaalne energia

Vaatleme lõpmata väikest risttahukat (joon. 3.5). Nagu on jooniselt näha, ei eelda me antud juhul enam homogeenet pingust. Arvestame aga klassikalise elastsusteooria eeldusi ja hüpoteese, mille kohasel on materjal ideaalselt elastne, deformatsioonid on väikesed ja kehtib superpositsiooni printsiip. Eesmärgiks on leida *deformatsiooni potentsiaalne energia*, mis kehas on salvestunud. Selleks tuleb kõigepealt leida *töö, mida tehakse deformatsiooni muutumisel (suurenemisel) elementaarristtahukas*.

- Vaatleme tahke, mis on risti  $x$  teljega. Eeldame, et normaalpingete toimel suureneb deformatsioon  $d\varepsilon_x$  võrra ja tahkude vaheline kaugus seega  $d\varepsilon_x dx$  võrra.
  - Vastav elastsusjõu elementaartöö (hüljates kõrgemat järku väikesed suurused):  $\sigma_x dydz d\varepsilon_x dx$ .



Joonis 3.5: Elementaarristtahukas

- Vaatleme tahke, mis on risti  $x$  teljega ja tahke, mis on risti  $y$  teljega. Eeldame, et nihkepingete toimel muutub nurk  $x$  ja  $y$  telje vahel väikese suuruse  $d\gamma_{xy}$  võrra.
  - Vastav elastsusjõu elementaartöö (hüljates kõrgemat järku väikesed suurused):  $\tau_{xy}dydzd\gamma_{xy}dx$ . \*
- Analoogiliselt saab leida pingetele  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  ja  $\tau_{xz}$  vastavad tööd.

Rakendame superpositsiooni printsiipi ja saame summaarse elementaartöö

$$dA^* = (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}) dx dy dz. \quad (3.40)$$

Jagades viimase elementaarruumalaga  $dV = dx dy dz$ , saame *elementaartöö tiheduse*  $dA = dA^*/dV$ . Kuna eelduse põhjal on materjal ideaalselt elastne, siis † on tehtud töö tõttu suurendatud elementaarristahuka potentsiaalset energiat  $dW^* = dA^*$  võrra. Edaspidi vaatleme seega suurust  $dW$ , st. potentsiaalse energia juurdekasvu ühikruumala kohta ehk potentsiaalse energia tiheduse diferentiaali:

$$dW = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}. \quad (3.41)$$

Asendame saadud avaldisse pinged  $\sigma_x, \dots$  üldistatud Hooke'i seadusest (3.30) ja saame

$$\begin{aligned} dW &= (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x) d\varepsilon_x + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y) d\varepsilon_y + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z) d\varepsilon_z + \\ &\quad + \mu\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \mu\gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \mu\gamma_{zx} d\gamma_{zx} = \\ &= \lambda\theta d\theta + 2\mu (\varepsilon_x d\varepsilon_x + \varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z) + \\ &\quad + \mu (\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \gamma_{zx} d\gamma_{zx}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Viimast avaldist integreerides leiame potentsiaalse energia tiheduse sõltuvana deformatsioonidest

$$W = \frac{1}{2} [\lambda\theta^2 + 2\mu (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (3.43)$$

Kuna Lamé koefitsiendid (3.29) on positiivsed, siis peab ka potentsiaalne energia olema positiivne (või null) igas ideaalselt elastse keha punktis.

Kasutades taas Hooke'i seadust kujul (3.30) saame *Clapeyroni valemi* ‡

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (3.44)$$

Viimasest saab omakorda avaldada  $W$  läbi pingete ja elastsuskonstantide  $E$  ja



$\nu$  kui kasutada Hooke'i seadust kujul (3.22)

$$W = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + 2(1 + \nu) (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]. \quad (3.45)$$

Kuna  $W$  on potentsiaalne energia, siis peab avaldis (3.41) olema funktsiooni  $W$  täisdiferentsiaal, mis omakorda tähendab, et

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, & \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, & \sigma_z = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}, \\ \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, & \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}. \end{cases} \quad (3.46)$$

Viimased avaldised on tuntud *Castigliano valemite*na. Ülaltoodu kontrolliks leiame avaldistest (3.43)

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x = \sigma_x, \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = \mu \gamma_{xy} = \tau_{xy}, \quad \dots \end{cases} \quad (3.47)$$

Et leida kehas salvestunud summaarne potentsiaalne energia  $\mathcal{W}$  tuleb potentsiaalse energia tihedust integreerida üle kogu keha ruumala  $V$ , st.

$$\mathcal{W} = \int_V W dV = \int \int \int_V W dx dy dz. \quad (3.48)$$

Rakendes Clapeyroni valemit avaldub summaarne potentsiaalne energia kujul

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.49)$$