

# Peatükk 5

## Elastusteooria tasandülesanne

### 5.1. Tasandülesande mõiste

5 - 2

### 5.1 Tasandülesande mõiste

Selleks, et iseloomustada *pingust* või *deformatsiooni elastse keha punktis* kasutatakse peapinge ja peadeformatsiooni mõistet. Pinguse puhul eristatakse järgmist kolme juhtu:

- *ruumpingus* — kõik kolm peapinget on nullist erinevad;
- *tasandpingus* — kaks peapinget on nullist erinevad;
- *joonpingus* — vaid üks peapinge on nullist erinev.

Analoogiliselt, st. läbi peadeformatsioonide, defineeritakse *ruum-, tasand- ja joondeformatsiooni*.

Üldjuhul võib nii pinguse kui deformatsiooni iseloom olla keha erinevates punktides erinev. Kui igas keha punktis on pingus (deformatsioon) sama iseloomuga siis öeldakse, et kehas on *ihtlane pingus (deformatsioon)*.

Elastusteooria ülesannet nimetatakse *tasandülesandeks* (ehk tasapinnaliseks ülesandeks) kui deformatsioon või pinge on kogu keha ulatuses tasapinnaline.

## 5.2 Tasanddeformatsioon

Vaadeldaval juhul on kõigis keha punktides deformatsioon tasapinnaline, st. üks peadeformatsioonidest on null. *Tasanddeformatsioon saab tekkida kui siirded*

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0. \quad (5.1)$$

Vastavalt Cauchy seoste (4.2)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Selline deformatsiooniseisund tekib pikas kehas, millele mõjub keha pinnaga ( $z$ -teljega) ristuv koormus.

*Näiteks:* pikk tugisein; (metroo)tunnel; pikk radiaalselt surutud völli; pika plaadi silindriline paine (NB! Saint Venant'i printsiip).

### 5.2. Tasanddeformatsioon

### 5 - 4

Pingete leidmiseks kasutame tildistatud Hooke'i seadust nn. pöördkujul (4.4):

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y = \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} = 0, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y), & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Teisest küljest, arvestades Hooke'i seadust kujul (4.3), peab

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0,$$

kust saame

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Kuna siirded  $u$  ja  $v$  sõltuvad vaid koordinaatidest  $x$  ja  $y$ , siis avaldiste (5.2) ja (5.3) põhjal ka pinge  $\sigma_z$  sõltub vaid koordinaatidest  $x$  ja  $y$ .

Tasakaaluvõrrandid (4.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

Arvestades ülesande sisu jääb järgi kaks võrrandit

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

kusjuures ka mahujõud  $Z = 0$ .

### 5.2. Tasanddeformatsioon

Rajatingimustest (4.5)

$$\begin{cases} p_{vx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{vz} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases}$$

jääb samuti alles 2 esimest võrrandit —

$$\begin{cases} p_{vx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m, \\ p_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m; \end{cases} \quad (5.5)$$

- keha külgpind on paralleelne  $z$ -tejega ning seetõttu normaali suunakoosinus  $n = 0$ ;
- $p_{vz} = 0$  kuna muidu poleks meil tasanddeformatsiooni.

Pidevusvõrranditest deformatsioonides (4.6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

jääb alles vaid esimene

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.6)$$

### 5.3. Tasandpingus

## 5.3 Tasandpingus

Vaatleme olukorda, kus kõigis keha punktides üks peapingetest on null. Sellisel juhul saame valida Descartes'i ristkoordinaadid nii, et

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (5.7)$$

Selline pingus tekib näiteks õhukeses plaadis, millele mõjub servades rakendatud koormus, mis on risti  $z$ -teljega.

Üldistatud Hooke'i seadusest (4.4) saame

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}, & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}, & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\nu \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}, & \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 0. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Tasakaaluvõrrandid on tasandpinguse korral samad kui olid tasanddeformatsiooni korral, st. esitatud kujul (5.4).

## 5.4 Tasanditlisesande lahendamine pingetes

Väga sageli lahendatakse elastusteooria itlisesanded pingetes, sest sellel meetodil on võrreldes siiretes lahendamisega mõned eelised:

- sageli ongi itlisesande lahendina vaja leida vaid pingeid, siirded on teisejärgulise tähtsusega ning neid polegi vaja leida;
- tldjuhul on siirete avaldised võrreldes pingete avaldisega tunduvalt keerukamad.

*Tundmatud:* pingetensori komponendid  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$ .

### 5.4. Tasanditlisesande lahendamise pingetes

Esmalt peame pidevustingimuse (5.6)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

avaldama pingetes. Selleks kasutame tldistatud Hooke'i seadust kujul (5.8) kust leiame vajalikud osatuletised läbi pingete:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Seega saab pidevustingimuse kujul

$$\left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.10)$$

Viimastest avaldisest saab tasakaaluvõrrandite (5.4) abil elimineerida nihkepinge. Selleks diferentseerime (5.4)<sub>1</sub>  $x$  järgi ja (5.4)<sub>2</sub>  $y$  järgi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial X}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial Y}{\partial y}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Eeldades, et mahujõu on konstantsed, saame viimaste liitmise tulemusena

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}. \quad (5.12)$$

Asendades viimase tulemuse pidevustingimusse (5.10) saame peale teisendusi

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0. \quad (5.13)$$

Kasutades Laplace'i operaatorit  $\nabla^2$  saame väljendada *tasandilisesande pidevustingimuse pingetes* kujul

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (5.14)$$

#### 5.4. Tasandilisesande lahendamise pingetes

#### 5 - 12

Tasandilisesande lahendamise pingetes lihtsustub oluliselt kui tuua sisse *Airy'* *pingefunktsioon*  $\varphi(x, y)$ , mis on seotud pingekomponentidega järgmisel kujul:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx, \quad (5.15)$$

kus  $X$  ja  $Y$  on konstantsed mahujõud. Alternatiivne võimalus siduda pingekomponendid ja pingefunktsioon:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (5.16)$$

Nii (5.15) kui (5.16) korral on tasakaaluvõrrandid (5.4) automaatselt rahuldatud. Pannes selliselt defineeritud pingekomponendid pidevustingimusse (5.14) saame *biharmoonilise võrrandi*

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0. \quad (5.17)$$

Lahti kirjutatult saab viimane kuju

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (5.18)$$

Funktsiooni, mis rahuldab biharmoonilist võrrandit (5.17) või (5.18) nimetatakse *biharmooniliseks funktsiooniks*.

Kuna tasakaaluvõrrandid on antud juhul automaatselt rahuldatud, siis taandub tasandilisesande lahendamine pingetes neljandat järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamisele. Siinjuures tuleb loomulikult arvesse võtta pingetes antud ääretingimusi. Peale pingefunktsiooni leidmist määratakse pingetensori komponendid (näiteks avaldistest (5.15)). Seejärel saab üldistatud Hooke'i seaduse abil leida deformatsioonikomponendid ja Cauchy seostest siirdekomponendid.

Tegelikult on pingefunktsiooni leidmine mitmel juhul suhteliselt lihtne. Vastavad meetodid võib nimetada *poolvastupidiseks meetodiks*. Selle põhjal antakse pingefunktsioon ette kas polünoomina või trigonomeetrilise reana, mis sisalduvad määramata konstante. Viimased määratakse üllesande lahendamise käigus ääretingimuste ja biharmoonilise võrrandi abil.

#### 5.5. Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides

5 - 14

### 5.5 Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides

Kui väljendada Airy funktsioon polünoomina

$$\begin{aligned} \varphi = & \left( \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2 \right) + \left( \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3 \right) + \\ & + \left( \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} xy^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4 \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

saab konstrueerida terve rea tasandilisesande lahendusi. Vaadeldav lähenemiseviis on rakendatav kui uuritakse ristkihtlikulisi plaate või talasid. Mahujõud, k.a. keha kaal, hülgame. Käesolevas alajaotuses vaatleme talasid, mille pikkus on  $l$ , kõrgus  $2c$  ja laius 1. Tala teljeks on  $x$ -telg ja  $y$  telg on suunatud alla. Kuna tjoonislinearses elastsusteoorias kehtib superpositsiooni printsiip, siis vaatleme algul polinome kuni 5. astmeni eraldi. Järgmises alajaotuses konstrueerime saadud tulemuste abil erinevaid lahendeid.



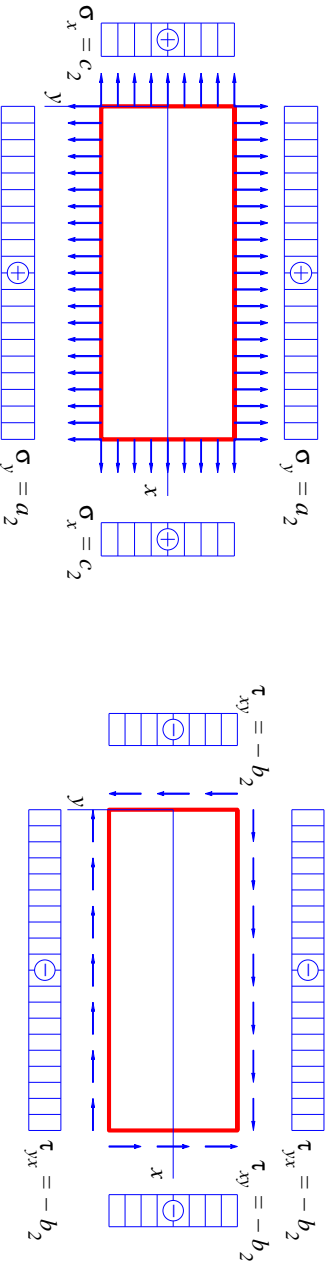
## A) Ruutpolünoom

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2. \quad (5.20)$$

Sellise valiku puhul on biharmooniline võrrand (5.18) automaatselt rahuldatud. Mahujõude hülgamise puhul saame avaldistest (5.15) pingekomponendid kujul

$$\sigma_x = c_2; \quad \sigma_y = a_2; \quad \tau_{xy} = -b_2. \quad (5.21)$$

Selline pingeseisund tähendab  $a_2 > 0$ ,  $b_2 > 0$  ja  $c_2 > 0$  puhul ühtlast tõmme kahes ristavas sihis koos ühtlase nihkega. Vastavad rajatingimused on esitatud joonisel 5.1. Võttes osa polünoomi koefitsente võrdses nulliga, saab rajatingimusi varieerida.



Joonis 5.1: Ruutpolünoomile vastavad rajatingimused.

## 5.5. Biharmoonilise võrrandi lahendamise polünoomides

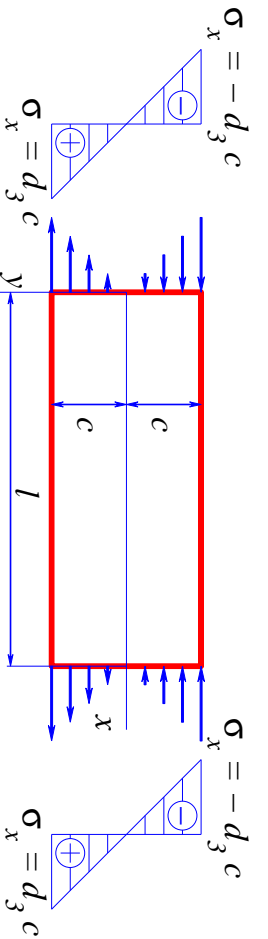
## 5 - 16

## B) Kuuppolünoom

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2}y^3. \quad (5.22)$$

Ka antud juhul on biharmooniline võrrand (5.18) automaatselt rahuldatud. Pingete avaldiste (5.15) põhjal aga

$$\sigma_x = c_3x + d_3y; \quad \sigma_y = a_3x + b_3y; \quad \tau_{xy} = -b_3x - c_3y. \quad (5.23)$$

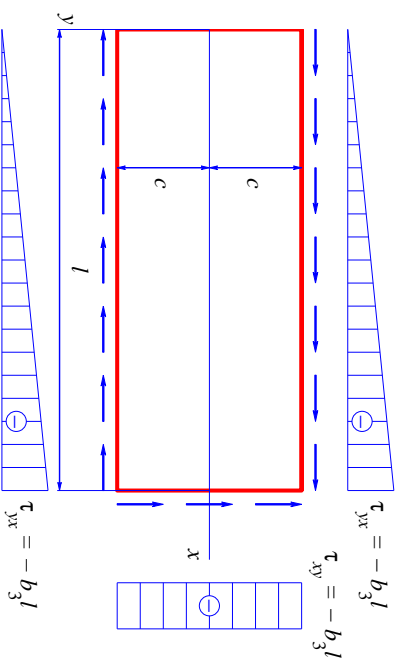
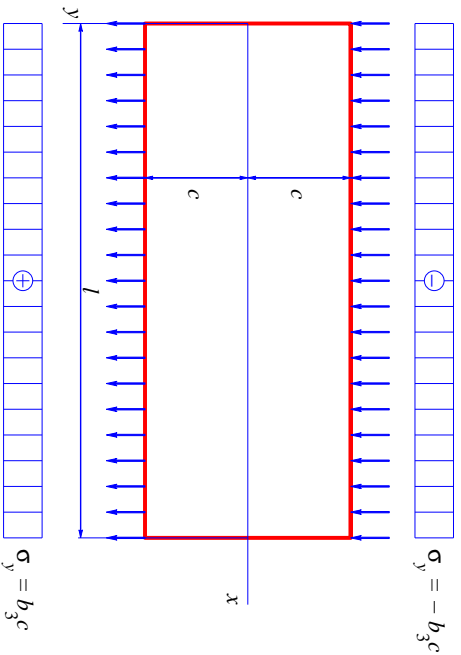


Valides vaid  $d_3 \neq 0$  saame puhtale paindele vastava pingeseisundi. Rajatingimused, mis vastavad juhule  $d_3 > 0$  on esitatud joonisel 5.2.

Joonis 5.2: Kuuppolünoomile vastavad rajatingimused:  $d_3 \neq 0$ ,  $a_3 = b_3 = c_3 = 0$ .

Valides vaid  $b_3 \neq 0$  saame pingeseisundi, mille korral pindadel  $y = \pm c$  mõjuvad pinged  $\sigma_y = \pm b_3c$  ja  $\tau_{yx} = -b_3x$  ning pinnal  $x = l$  pinge  $\tau_{xy} = -b_3l$ . Juhul  $b_3 > 0$  jaoks on vastavad rajatingimused esitatud joonisel 5.3.



Joonis 5.3: Kuuppõlinoomile vastavad rajatingimused:  $b_3 \neq 0$ ,  $a_3 = c_3 = d_3 = 0$ .

Muud võimalused:

- Vaid  $c_3 \neq 0 \dots$
- Vaid  $a_3 \neq 0 \dots$
- Jne. ...

### 5.5. Biharmoonilise võrrandi lahendamise polünoomides

Teist ja kolmandat järku polünoomide puhul polnud vaja esitada täiendavaid kitsenduspolünoomide koefitsientidele, sest biharmooniline võrrand oli automaatselt rahuldatud. Kõrgemat järku polünoomide puhul pole asi aga enam nii lihtne.

### C) Neljandat järku polünoom

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4. \quad (5.24)$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (5.18) rahuldatud vaid juhul kui

$$e_4 = -(2c_4 + a_4) \quad (5.25)$$

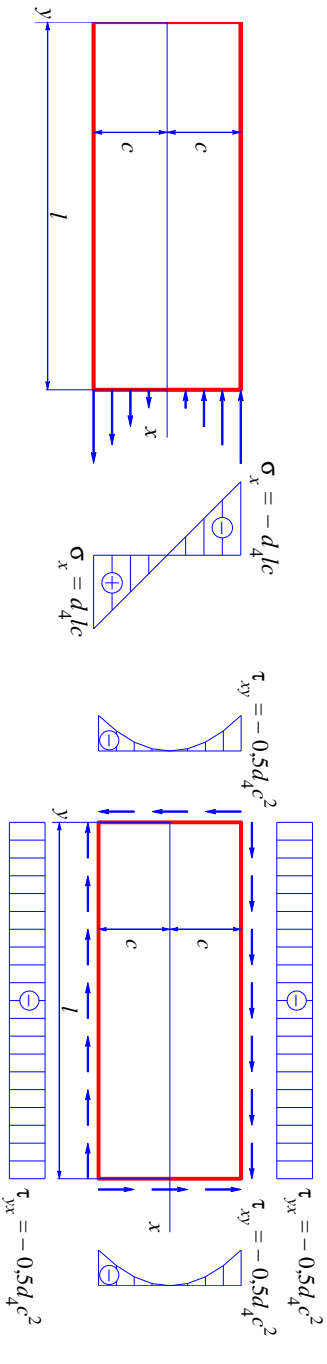
ning pingekomponendid (5.15) saavad kuju

$$\begin{cases} \sigma_x = c_4 x^2 + d_4 x y - (2c_4 + a_4) y^2; \\ \sigma_y = a_4 x^2 + b_4 x y + c_4 y^2; \\ \tau_{xy} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 x y - \frac{d_4}{2} y^2. \end{cases} \quad (5.26)$$

Kuna koefitsientide  $a_4, \dots, d_4$  valik on vaba, siis on (5.26) abil võimalik kirjelada mitmesuguseid rajatingimusi.

Näiteks kui vaid  $d_4$  on nullist erinev polünoomi koefitsent, siis

$$\sigma_x = d_4 xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2. \quad (5.27)$$



Joonis 5.4: Neljandat järku polünoomile vastavad rajatingimused juhul kui  $d_4 > 0$  ja  $a_4 = b_4 = c_4 = 0$ .

Juhule  $d_4 > 0$  vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} \tau_{yx} = -\frac{d_4}{2} c^2, & \text{kui } y = \pm c; \\ \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2, & \sigma_x = d_4 ly, & \text{kui } x = l; \end{cases} \quad (5.28)$$

on kujutatud joonisel 5.4.

### 5.5. Biharmoonilise võrrandi lahendamise polünoomides

### 5 - 20

Kui vaid  $c_4 > 0$  oleks nullist erinev polünoomi koefitsent, siis saaksime avaldis-test (5.26)

$$\sigma_x = c_4 x^2 - 2c_4 y^2; \quad \sigma_y = c_4 y^2; \quad \tau_{xy} = -2c_4 xy. \quad (5.29)$$

Jne., jne.

### D) Viendat järku polünoom

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5. \quad (5.30)$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (5.18) rahuldatud kui

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5) \text{ ja } f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5). \quad (5.31)$$

Pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} = \dots \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x^2} = \dots \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} = \dots \end{cases} \quad (5.32)$$

Valides vaid  $d_5 > 0$  nullist erinevaks polinoomikoefitsendiks, saame pingejäotuse

$$\sigma_x = d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3), \quad \sigma_y = \frac{1}{3}d_5y^3, \quad \tau_{xy} = -d_5xy^2. \quad (5.33)$$

Vimasele vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} y = \pm c, & \sigma_y = \pm \frac{1}{3}d_5c^3, & \tau_{yx} = -d_5xc^2 \\ x = 0, & \sigma_x = -\frac{2d_5y^3}{3}, & \tau_{xy} = 0, \\ x = l, & \sigma_x = d_5(l^2y - \frac{2}{3}y^3), & \tau_{xy} = -d_5ly^2. \end{cases} \quad (5.34)$$

Kuna biharmooniline võrrand (5.18) on lineaarne diferentsiaalvõrrand, siis on tema lahendiks ka suvaline lahendite superpositsioon. Seega, liites eespool leitud elementaarlahendeid, saame leida meid huvitava probleemi lahendi.

---

### 5.5. Biharmoonilise võrrandi lahendamine polinoomides

**Tala pinnal mõjuvate pingete (pindjõudude) peavektori ja peamendi leidmine**

- Vaatleme tala, mille pikkus on  $l$ , kõrgus  $2c$  ja laius 1.
- Eldame, et tala kontuuril mõjuvad normaal- ja nihkepinged on positiivsed.
- Valime taandamistsentriks koordinaatide alguse.

Peavektori projektsioonid koordinaattelgedel  $x$  ja  $y$ :

$$\begin{aligned} R_x &= R_x(\sigma_x)|_{x=l} + R_x(\sigma_x)|_{x=0} + R_x(\tau_{yx})|_{y=c} + R_x(\tau_{yx})|_{y=-c} = \\ &= \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=l} dy - \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=0} dy + \int_0^l \tau_{yx}|_{y=c} dx - \int_0^l \tau_{yx}|_{y=-c} dx; \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} R_y &= R_y(\sigma_y)|_{y=c} + R_y(\sigma_y)|_{y=-c} + R_y(\tau_{xy})|_{x=0} + R_y(\tau_{xy})|_{x=l} = \\ &= \int_0^l \sigma_y|_{y=c} dx - \int_0^l \sigma_y|_{y=-c} dx - \int_{-c}^c \tau_{xy}|_{x=0} dy + \int_{-c}^c \tau_{xy}|_{x=l} dy. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Peamoment koordinaatide alguse suhtes<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 M_O &= M_O(\sigma_x)|_{x=0} + M_O(\sigma_x)|_{x=l} + M_O(\sigma_y)|_{y=c} + M_O(\sigma_y)|_{y=-c} + \\
 &+ M_O(\tau_{yx})|_{y=c} + M_O(\tau_{yx})|_{y=-c} + M_O(\tau_{xy})|_{x=l} = \\
 &= \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=0} y dy - \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=l} y dy + \\
 &+ \int_0^l \sigma_y|_{y=c} x dx - \int_0^l \sigma_y|_{y=-c} x dx - \\
 &- \int_0^l \tau_{yx}|_{y=c} c dx - \int_0^l \tau_{yx}|_{y=-c} c dx + \int_{-c}^c \tau_{xy}|_{x=l} l dy.
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

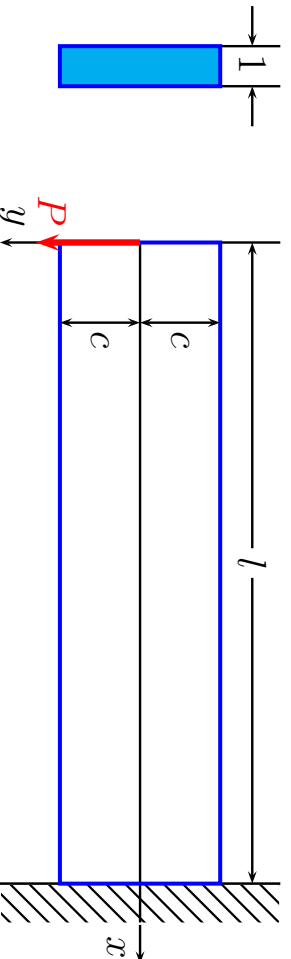
<sup>1</sup>Kuna  $y$  telg on suunatud alla, siis on positiivne moment päripäeva.

## 5.6. Konsooli paine

5 - 24

### 5.6 Konsooli paine

Vaatleme kitsa ristkülikulise ristlõikega konsooli, mille vabas otsas ( $x = 0$ ) on rakendatud jõud  $\mathbf{P}$ , mida võib vaadelda kui otspinnal mõjuvate nihkepingete peavektorit (joonis 5.5). Konsooli pikkus on  $l$ , kõrgus  $2c$  ja laius  $1$ . Konsooli pealmine ja alumine pind on pingevabad ja ots  $x = l$  jäigalt kinnitatud.



Joonis 5.5: Kitsa ristkülikulise ristlõikega konsooli; pikkus  $l$ , kõrgus  $2c$  ja laius  $1$ .

Sellist olukorda saab vaadelda kui superpositsiooni puhtast nihkest (alajaotus 5.5 A valemid (5.21)  $a_2 = c_2 = 0$  ja  $b_2 \neq 0$ ) ja valemitega (5.27) esitatud juhust (alajaotus 5.5 C  $a_4 = b_4 = c_4 = e_4 = 0$  ja  $d_4 \neq 0$ ). Saame

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2 = \tau_{yx}. \quad (5.38)$$

Rajatingimused

$$\tau_{yx}|_{y=\pm c} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}, \quad (5.39)$$

$$\sum F_{iy} \Big|_{x=0} = P = - \int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \int_{-c}^c \left( b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{3P}{4c}. \quad (5.40)$$

Pannes nüüd konstandid  $b_2$  ja  $d_4$  valemitest (5.39) ja (5.40) pingete avaldisse (5.38) saame

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right). \quad (5.41)$$

### 5.6. Konsooli paine

Arvestades, et inertsimoment  $I \equiv I_z = 2c^3/3$ , siis

$$\sigma_x = -\frac{P}{I} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} (c^2 - y^2). \quad (5.42)$$

Lahend on täpne Saint-Venanti printsibi mõttes, st., 5.5 C puhul on tala otsas nihkepinged parabolse jaotusega.

Leiame nüüd siirdekomponeendid  $u$  ja  $v$ . Lähtume Hooke'i seadusest ja Chauchy seostest, mille põhjal

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{P}{EI} xy, & \nu P \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\nu P}{EI} xy, & \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2GI} (c^2 - y^2). & \end{cases} \quad (5.43)$$

Integreerime (5.43)<sub>1</sub> koordinaadi  $x$  järgi ja (5.43)<sub>2</sub> koordinaadi  $y$  järgi:

$$u = -\frac{P}{2EI} x^2 y + f(y), \quad v = \frac{\nu P}{2EI} x y^2 + f_1(x), \quad (5.44)$$

kus funktsioonid  $f(y)$  ja  $f_1(x)$  on integreerimiskonstantide analoogid.

Pannes (5.44) valemisse (5.43)<sub>3</sub> saame

$$-\frac{P}{2EI}x^2 + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu P}{2EI}y^2 + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2GI}(c^2 - y^2). \quad (5.45)$$

Viimane on esitatav kujul

$$F(x) + G(y) = K, \quad (5.46)$$

kus

$$F(x) = \frac{df_1(x)}{dx} - \frac{P}{2EI}x^2, \quad G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \left( \frac{\nu P}{2EI} - \frac{P}{2GI} \right) y^2, \quad K = -\frac{P}{2GI}c^2. \quad (5.47)$$

Kuna  $F(x) + G(y) = K = const.$ , siis peavad ka  $F(x)$  ja  $G(y)$  olema konstantseid. Tähistades  $F(x) = d$  ja  $G(y) = e$  saame valemitest (5.46) tingimuse

$$d + e = -\frac{P}{2GI}c^2 \quad (5.48)$$

ja diferentsiaalvõrrandid

$$\frac{df(y)}{dy} = \left( \frac{P}{2GI} - \frac{\nu P}{2EI} \right) y^2 + e, \quad \frac{df_1(x)}{dx} = \frac{P}{2EI}x^2 + d. \quad (5.49)$$

### 5.6. Konsooli paine

Viimaste integreerimisel saame

$$f(y) = \left( \frac{P}{6GI} - \frac{\nu P}{6EI} \right) y^3 + ey + g, \quad f_1(x) = \frac{P}{6EI}x^3 + dx + h. \quad (5.50)$$

Seega saavad siirete avaldised (5.44) kujul

$$u = -\frac{P}{2EI}x^2y + \left( \frac{P}{6GI} - \frac{\nu P}{6EI} \right) y^3 + ey + g, \quad v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 + dx + h. \quad (5.51)$$

Konstandid  $d, e, g$  ja  $h$  määratakse tingimusest (5.48) ja kolmest rajatingimusest siiretele.

Olgu punkt  $A$  tala ristlõike  $x = l$  kese. Jäiga kinnituse tõttu peab see punkt olema fikseeritud — tema siirded on nullid ja ristlõige  $x = l$  ei saa pöörduda timber punkti  $A$ . Seega kui  $x = l$  ja  $y = 0$ , siis  $u = v = 0$  ning

$$g = 0 \quad \text{ja} \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl. \quad (5.52)$$

Võttes valemis (5.51)<sub>2</sub>  $y = 0$ , saame konsooli kõverdunud telje võrrandi (enne

deformatsiooni on teljeks  $x$ -telg, st. sirge  $y = 0$ ):

$$v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l-x). \quad (5.53)$$

Konstandi  $d$  määramiseks kasutame kolmandat rajatingimust, mis ei luba vaadeldaval ristlõikel pöörelda ümber punkti  $A$ . Seda tingimust võib ette anda mitmel viisil. Vaatleme kahte:

a) tala telje element on punktis  $A$  fikseeritud, st.,

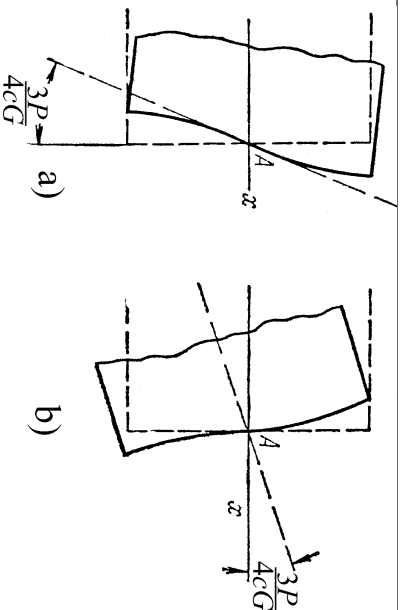
$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0; \quad (5.54)$$

b) tala ristlõike vertikaalne element on punktis  $A$  fikseeritud, st.,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0. \quad (5.55)$$

Juhul a) saame avaldiste (5.54), (5.53) ja (5.48) põhjal

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} \text{ ja } e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI}. \quad (5.56)$$



Joonis 5.6: Rajatingimused otsas  $x = l$ .

Seega saavad siirdekompontentide avaldised (5.51) ja kõverdunud telje võrrand (5.53) kujul

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + \left( \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI} \right) y, \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI}, \\ v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI}. \end{cases} \quad (5.57)$$



Võrrand (5.57)<sub>3</sub> annab konsooli vaba otsa  $x = 0$  läbipaindeks  $P l^3 / 3EI$ , mis ühtib tugevusõpetusest tuntud tulemustega.

Juhul b) saame konstantidele väärtused

$$e = \frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{ja} \quad d = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI} \quad (5.58)$$

ning siirdekomponeentide ja tala kõverdunud telje jaoks avaldised

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + \frac{Pl^2}{2EI}y, \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \left(\frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Pc^2}{2GI}\right)x + \frac{Pc^2l}{2GI} + \frac{Pl^3}{3EI}, \\ v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2GI}(l-x). \end{cases} \quad (5.59)$$

Seega saame võrrandi (5.59)<sub>3</sub> kasutamise puhul tala teljele

$$\frac{Pc^2}{2GI}(l-x) = \frac{3P}{4Gc}(l-x) \quad (5.60)$$

võrra suuremad läbipainded kui võrrandi (5.57)<sub>3</sub> puhul. Põhjus on selles, et rajatingimused (5.54) keelavad tala telje pöörded kuid lubavad otspinna pöörded

### 5.6. Konsooli paine

### 5 - 32

punktis  $A$  (vt. joonis 5.6 a). Rajatingimused (5.55) keelavad aga tala otspinna pöörded kuid lubavad telje pöörded (vt. joonis 5.6 b). Mõlemal juhul toimuvad pöörded ühe ja sama nurga  $\alpha$  võrra kuigi pöörduvad erinevad elemendid:  $\checkmark$

$$\alpha \sim \tan \alpha = -\frac{Pc^2}{2GI} = \begin{cases} -\frac{3P}{4cG} & \text{kui } b = 1, \\ -\frac{3P}{4cbG} & \text{kui } b \neq 1. \end{cases} \quad (5.61)$$

Tegelikult jääb aga kogu otspind  $x = l$  paigale ja õiget tulemust ei anna ei juht a) ega b) ning kinnituskoha läheduses ei vasta ka pingeaotus valemitega (5.42) antule. Avaldise (5.42) puhul tuleb rakendada Saint-Venant'i printsiipi, st., et (5.42) annaks tööpärasema tulemuse, peame olema otsast  $x = l$  piisavalt kaugel. Seega pikkade konsoolide puhul on tulemus „täpsem“, st. vastab enam tegelikkusele, kui lühikeste puhul.

## Näited

Joonistada:

1. tala kõverduvad telg (elastne joon) ja
2. ristlõigete  $x = 0; 0, 5l; l$  deformeerunud kuju

erinevate  $c$ ,  $l$  ja  $P$  väärtuste jaoks mõlema ülalvaadeldud ääretõingu korral.

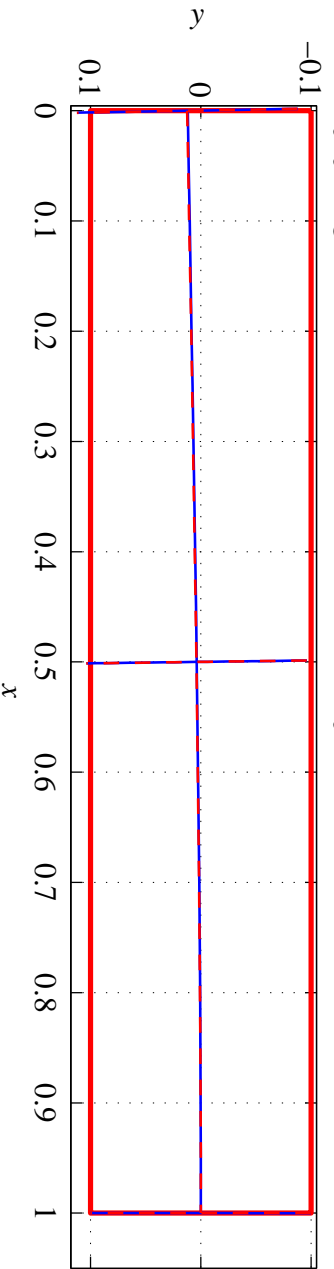
Tala materjal on teras, mille elastsuskonstant  $E = 210 \text{ GPa}$  ja  $\nu = 0,3$  ning tala laius  $b = 0,1 \text{ m}$ .

Järgnevatel joonistel tähistavad  $\alpha_{telg}$  ja  $\alpha_{ots}$  vastavalt kõverduvad telje ja otspinna numbriliselt leitud tõusumurka kraadides punktis  $A$ . Nurk  $\alpha_{teor}$ , mis on leitud avaldisest  $\tan \alpha_{teor} = 3P/(4cbG)$ , vastab rajatingimuste a) korral kõverduvad otspinna tõusule ja rajatingimuste b) korral kõverduvad telje tõusule punktis  $A$  (võrdle joon. 5.6).

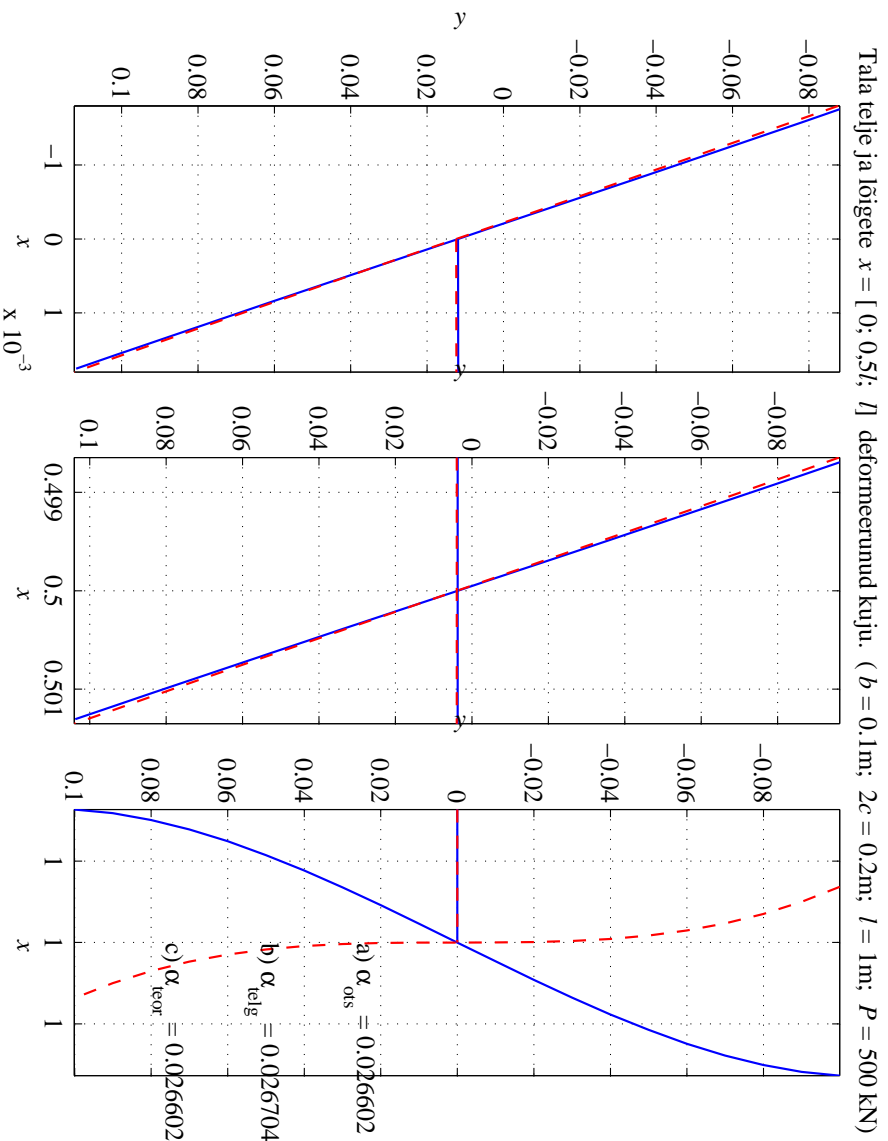
### 5.6. Konsooli paine

5 - 34

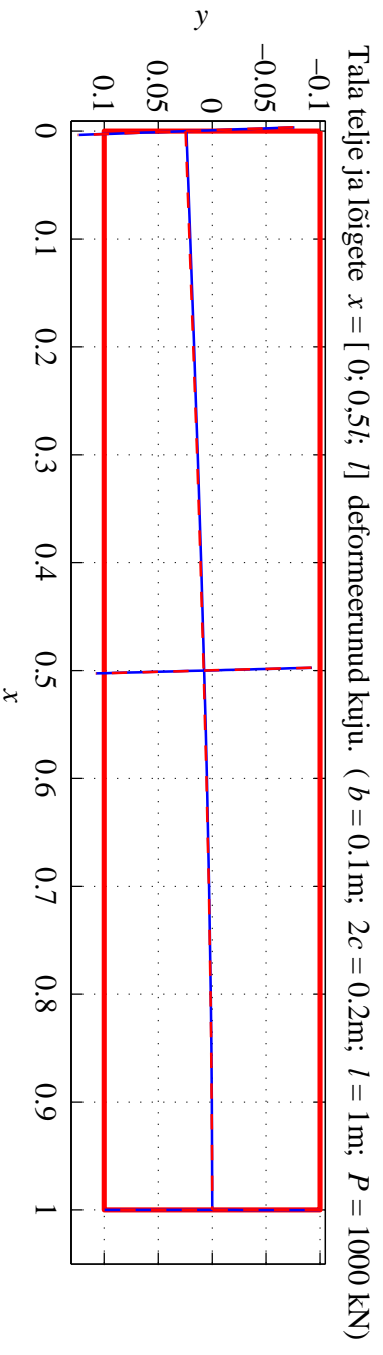
Tala telje ja lõigete  $x = [0; 0,5l; l]$  deformeerunud kuju. ( $b = 0,1\text{m}$ ;  $2c = 0,2\text{m}$ ;  $l = 1\text{m}$ ;  $P = 500 \text{ kN}$ )



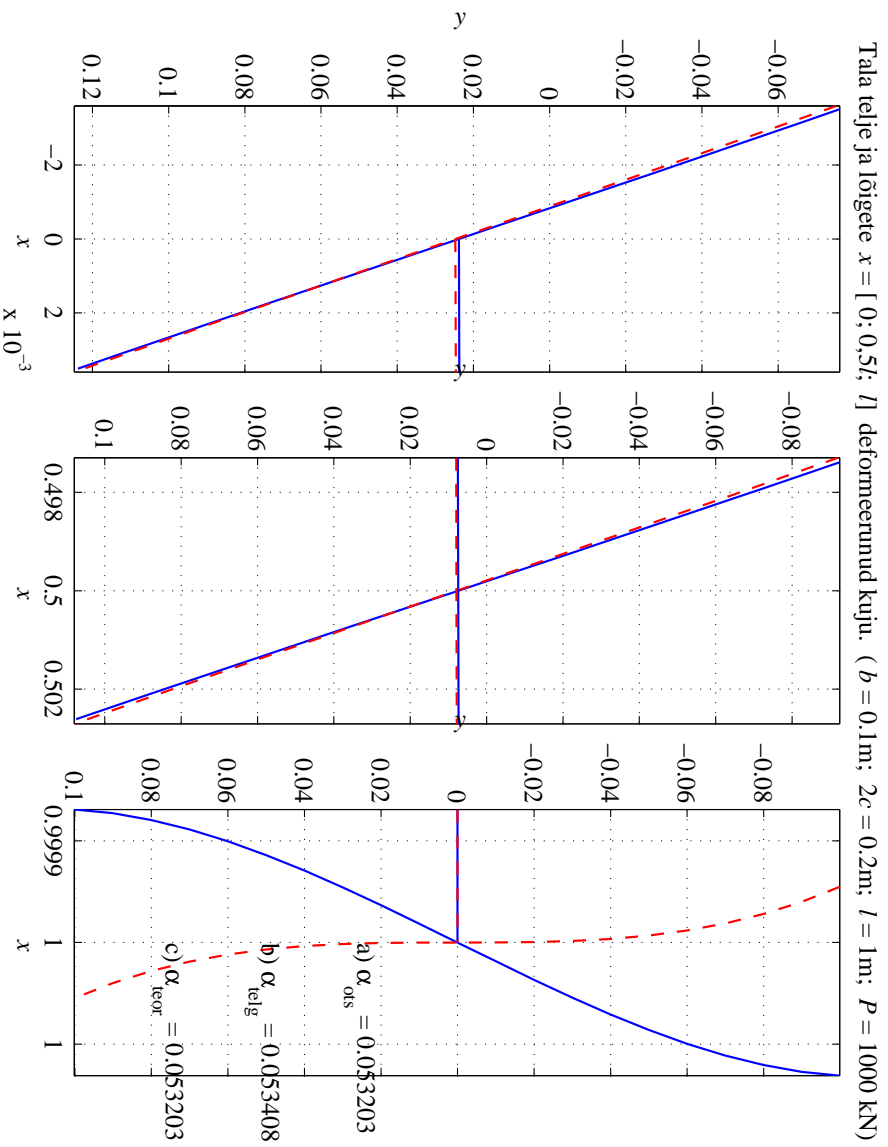
Joonis 5.7: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



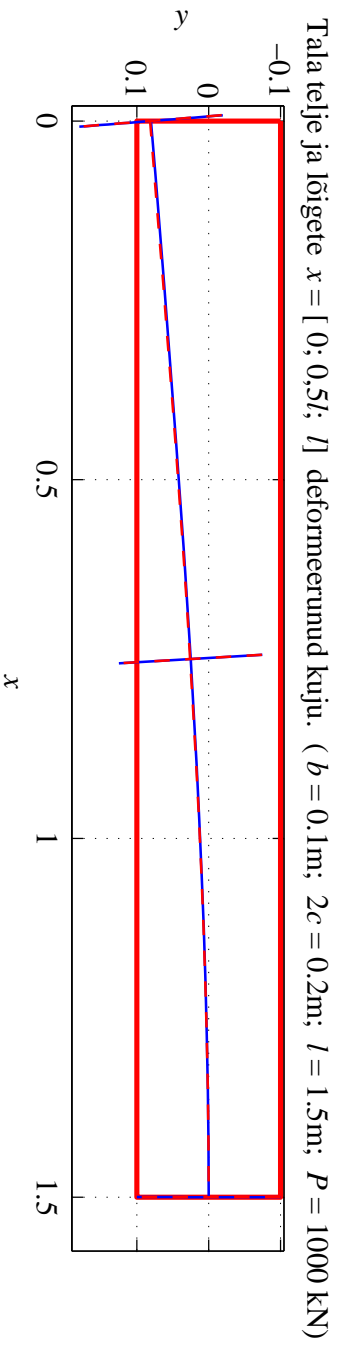
Joonis 5.8: Rajatõingimused a) — sinine pidev joon; rajatõingimused b) — punane kriipsjoon.



Joonis 5.9: Rajatõingimused a) — sinine pidev joon; rajatõingimused b) — punane kriipsjoon.

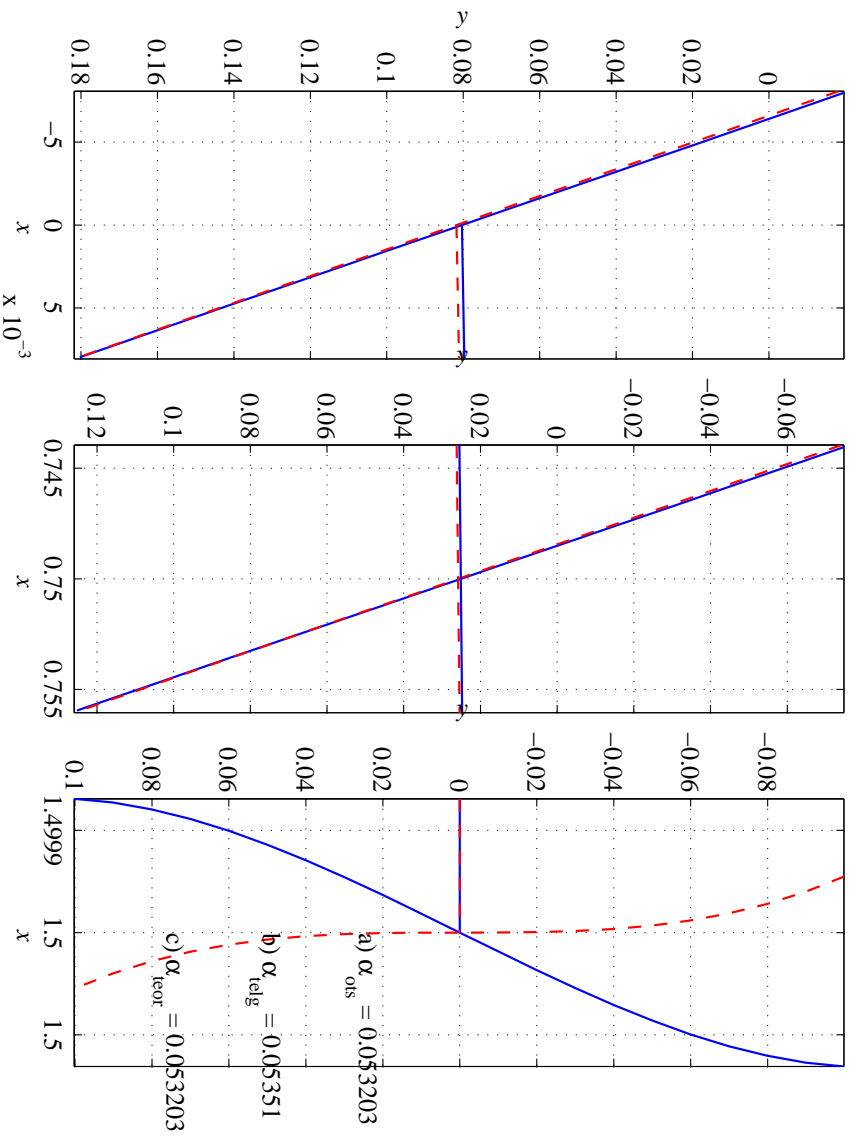


Joonis 5.10: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



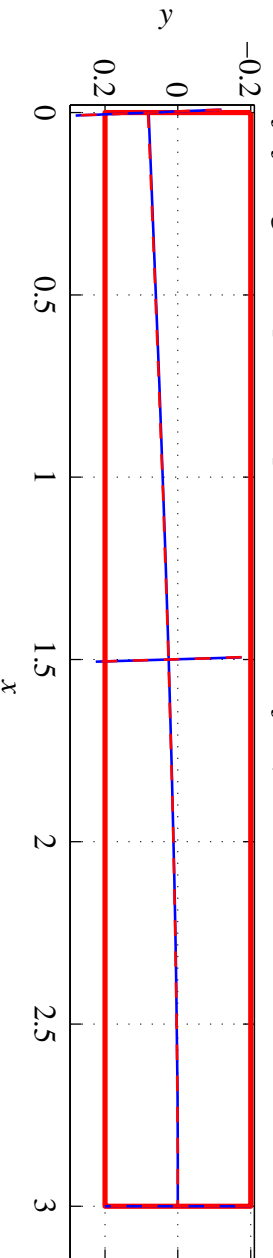
Joonis 5.11: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.

Tala telje ja lõigete  $x = [0; 0,5l; l]$  deformeerunud kuju. ( $b = 0,1\text{m}$ ;  $2c = 0,2\text{m}$ ;  $l = 1,5\text{m}$ ;  $P = 1000\text{ kN}$ )

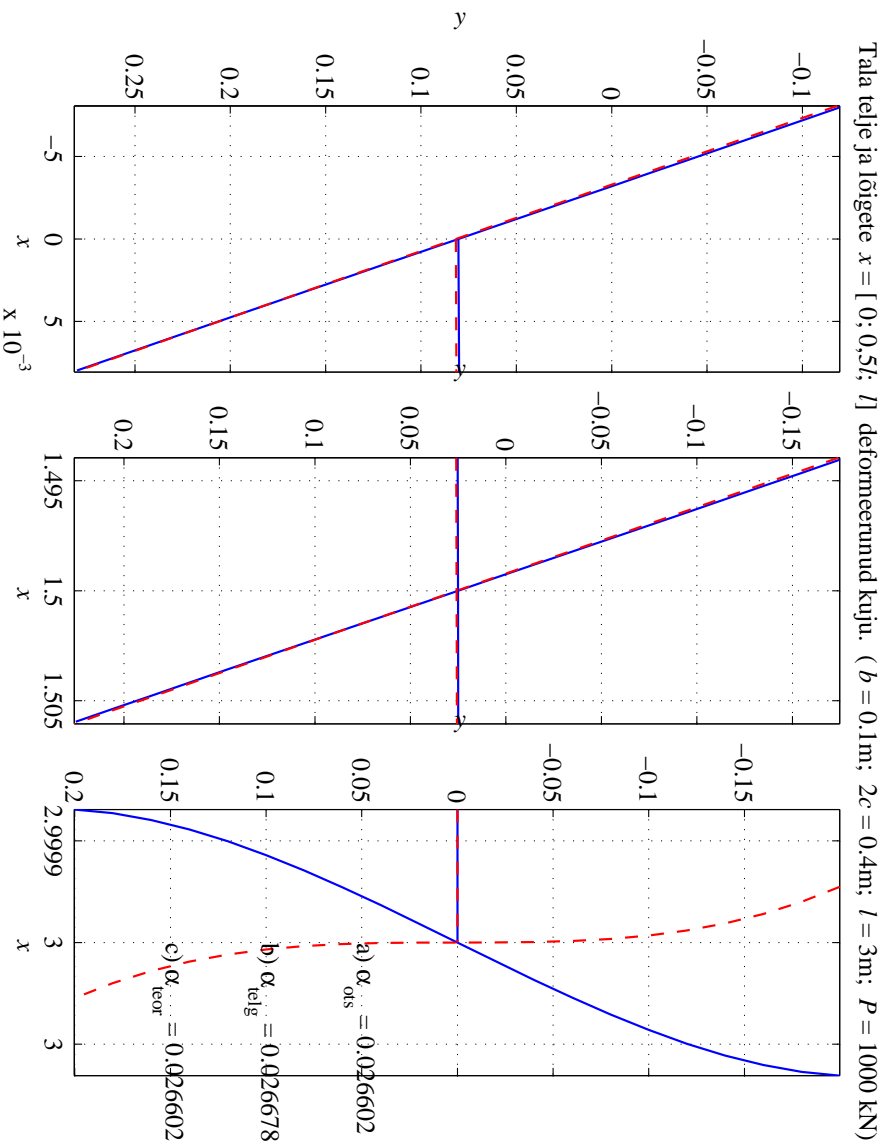


Joonis 5.12: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.

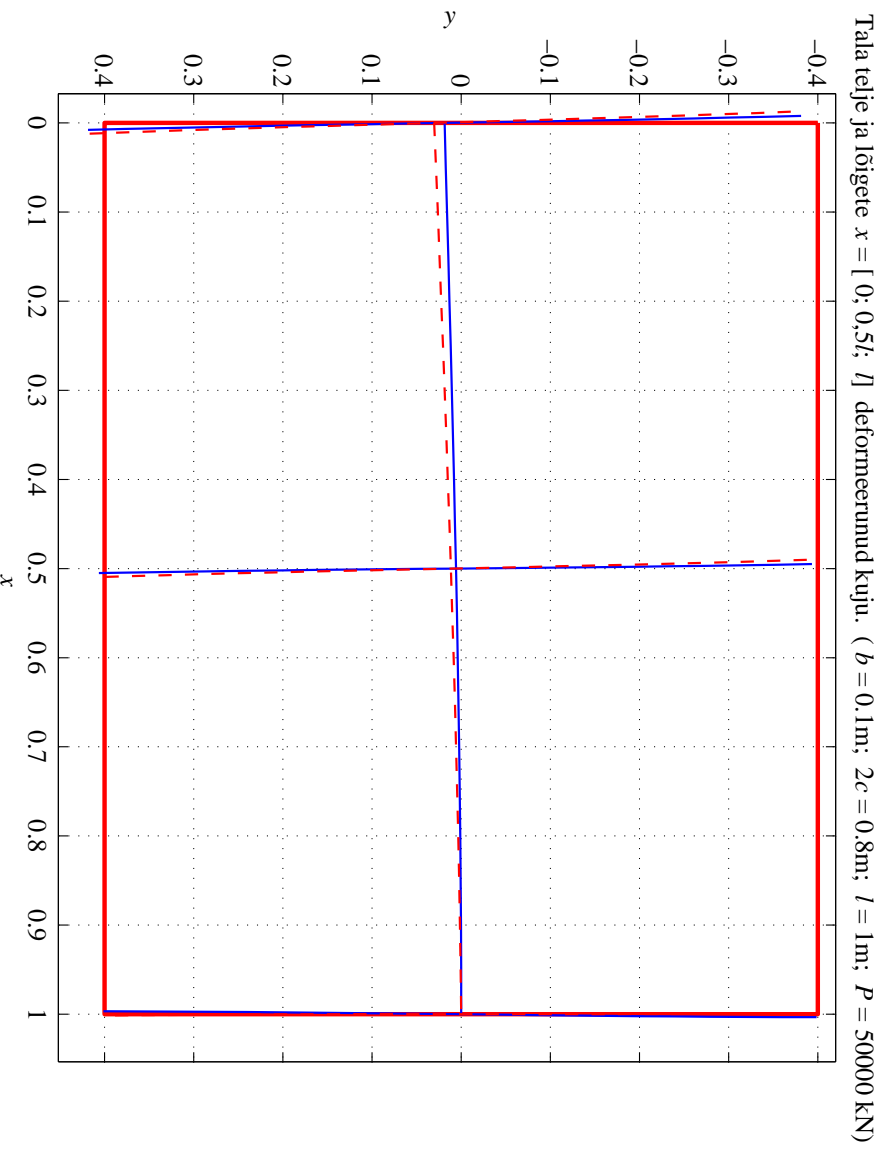
Tala telje ja lõigete  $x = [0; 0,5l; l]$  deformeerunud kuju. ( $b = 0,1\text{m}$ ;  $2c = 0,4\text{m}$ ;  $l = 3\text{m}$ ;  $P = 1000\text{ kN}$ )



Joonis 5.13: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.

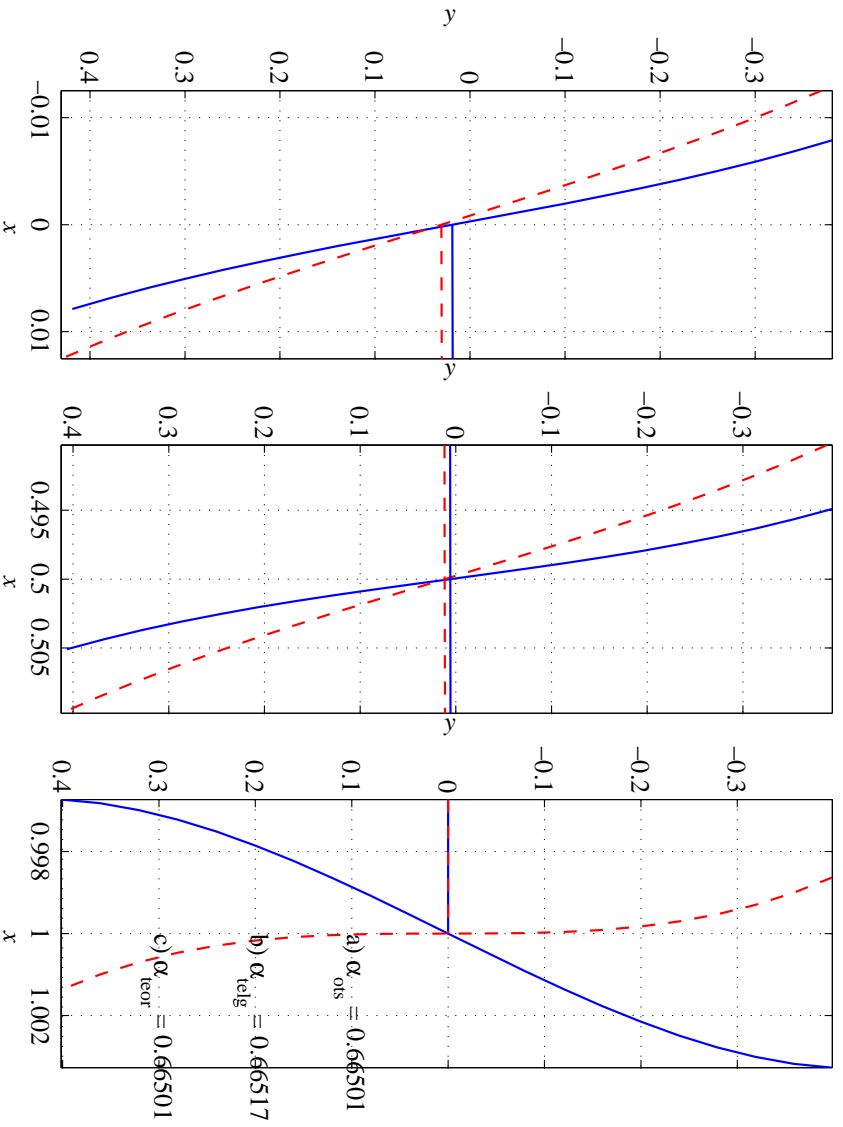


Joonis 5.14: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



Joonis 5.15: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.

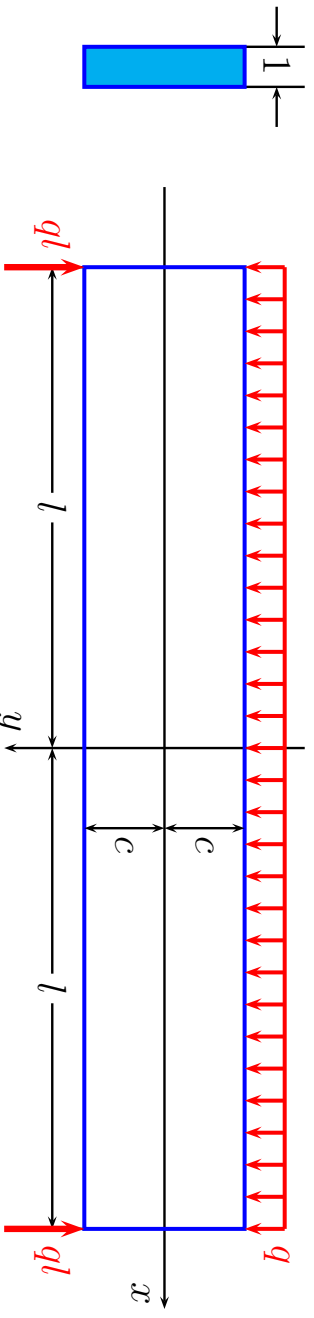
Tala telje ja lõigete  $x = [0; 0,5l; l]$  deformeerunud kuju. ( $b = 0,1\text{m}$ ;  $2c = 0,8\text{m}$ ;  $l = 1\text{m}$ ;  $P = 50000\text{ kN}$ )



Joonis 5.16: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.

## 5.7 Ühtlaselt koormatud tala paine

Vaatleme kitsa ristkülikulise ristlõikega tala (joonis 5.17). Tala on otstes vabalt toetatud ja talle mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $q$ . Joonisel on tugede asemel kujutatud juba toereaktsioonid.



Joonis 5.17: Ühtlaselt koormatud kitsas ristkülikulise ristlõikega tala; pikkus  $2l$ , kõrgus  $2c$  ja laius  $1$ .



Rajatingimused: a) külgpindadel  $y = \pm c$

$$\tau_{xy}|_{y=\pm c} = 0, \quad \sigma_y|_{y=+c} = 0, \quad \sigma_y|_{y=-c} = -q; \quad (5.62)$$

b) otspindadel  $x = \pm l$

$$\begin{cases} \int_{-c}^c \tau_{xy}|_{x=\pm l} dy = \mp ql, & \text{põikjõud tala otstes,} \\ \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=\pm l} dy = 0, & \text{pikijõud tala otstes,} \\ \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=\pm l} y dy = 0, & \text{paindemoment tala otstes.} \end{cases} \quad (5.63)$$

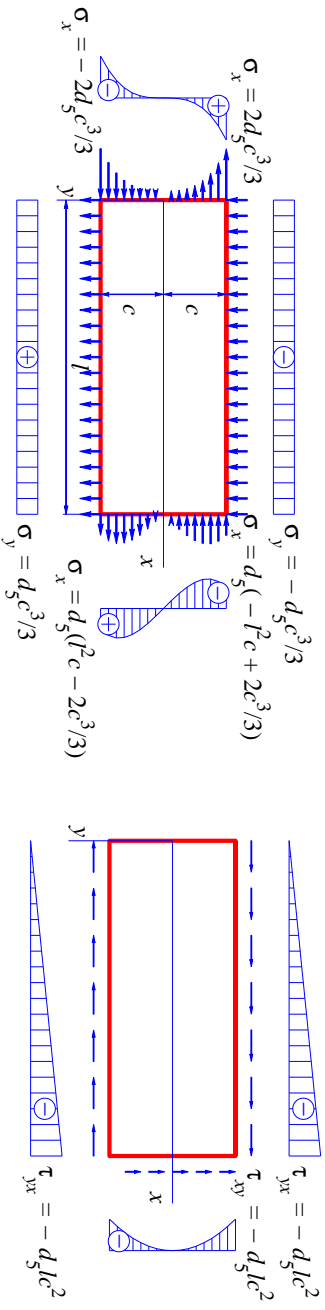
Rajatingimusi (5.62) ja (5.63) saab rahuldada kui kombineerida alajaotuses 5.5 leitud lahendeid.

Lähtume lahendist (5.33) (lk. 21)

$$\sigma_x = d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3), \quad \sigma_y = \frac{1}{3}d_5y^3, \quad \tau_{xy} = -d_5xy^2,$$

millele vastavad rajatingimused on kujutatud joonisel 5.18.

### 5.7. Ühtlaselt koormatud tala paine



Joonis 5.18: Viiendat järku polünoomile vastavad rajatingimused  $d_5 \neq 0$  ja  $a_5 = b_5 = c_5 = e_5 = f_5 = 0$  puhul.

Et vabaneeda tõmbepingetest küljel  $y = c$  ja nihkepingetest külgedel  $y = \pm c$  lisame tõmbe  $\sigma_y = a_2$  lahendist (5.21) ja pinged  $\sigma_y = b_3y$  ning  $\tau_{xy} = -b_3x$  lahendist (5.23). Kokku saame

$$\begin{cases} \sigma_x = d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3), & \sigma_y = \frac{1}{3}d_5y^3 + b_3y + a_2, \\ \tau_{xy} = -d_5xy^2 - b_3x. \end{cases} \quad (5.64)$$

Rajatingimustest (5.62) määrame

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3q}{4c}, \quad d_5 = -\frac{3q}{4c^3}. \quad (5.65)$$

Arvestades, et  $I = I_z = 2c^3/3$  saame valemitest (5.64) ja (5.65)

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{q}{2I}(x^2y - \frac{2}{3}y^3), & \sigma_y = -\frac{q}{2I}(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3), \\ \tau_{xy} = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x. \end{cases} \quad (5.66)$$

Leitud pingekomponendid rahuldavad lisaks rajatingimustele (5.62) ka (5.63)<sub>1-2</sub>. Et oleks rahuldatud ka (5.63)<sub>3</sub> lisame puhtale paindele vastavad pinged  $\sigma_x = d_3y$  ja  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$  lahendist (5.23). Rajatingimusest (5.63)<sub>3</sub> leiame

$$d_3 = \frac{3q}{4c} \left( \frac{b^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right). \quad (5.67)$$

Seega avaldub normaalpinge  $\sigma_x$  lõpuks kujul

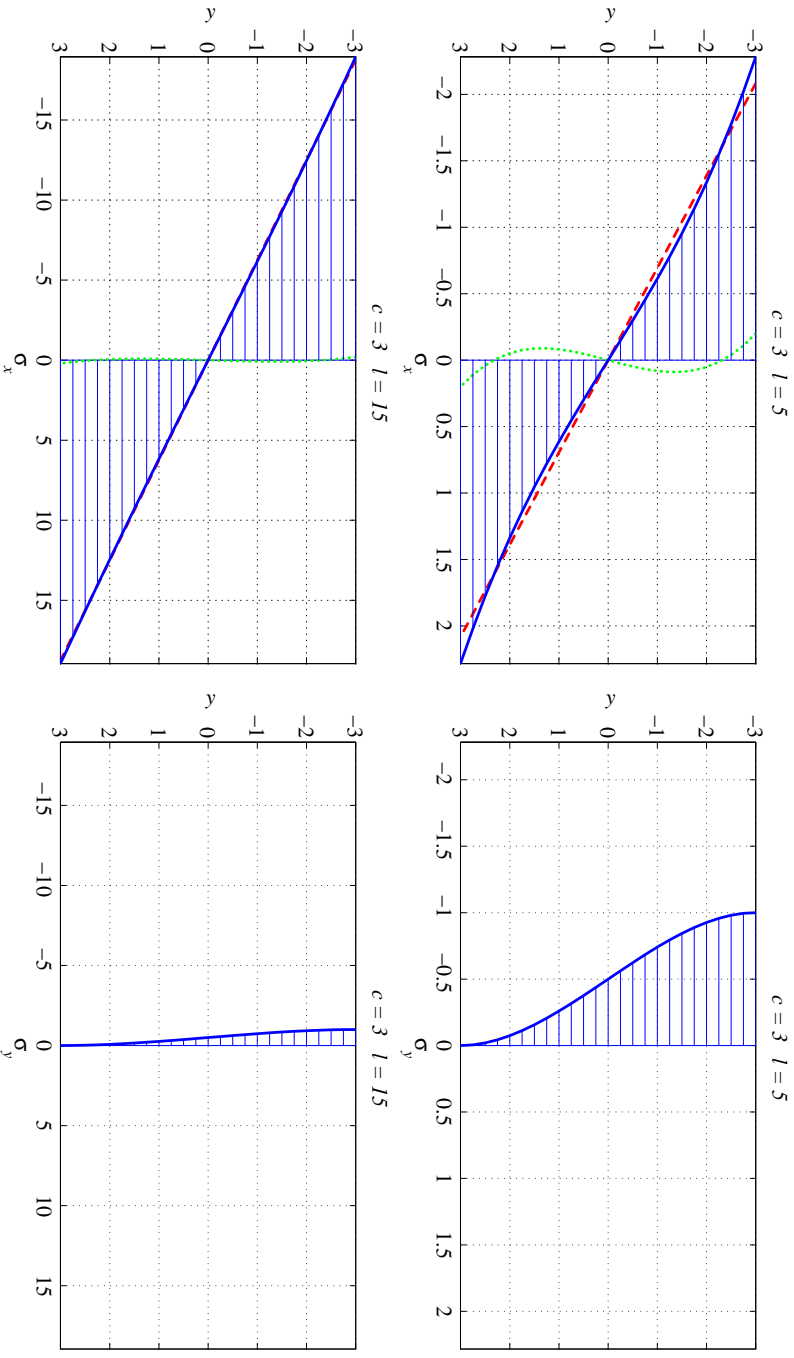
$$\sigma_x = \frac{q}{2I} (t^2 - x^2) y + \frac{q}{2I} \left( \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y \right). \quad (5.68)$$

---

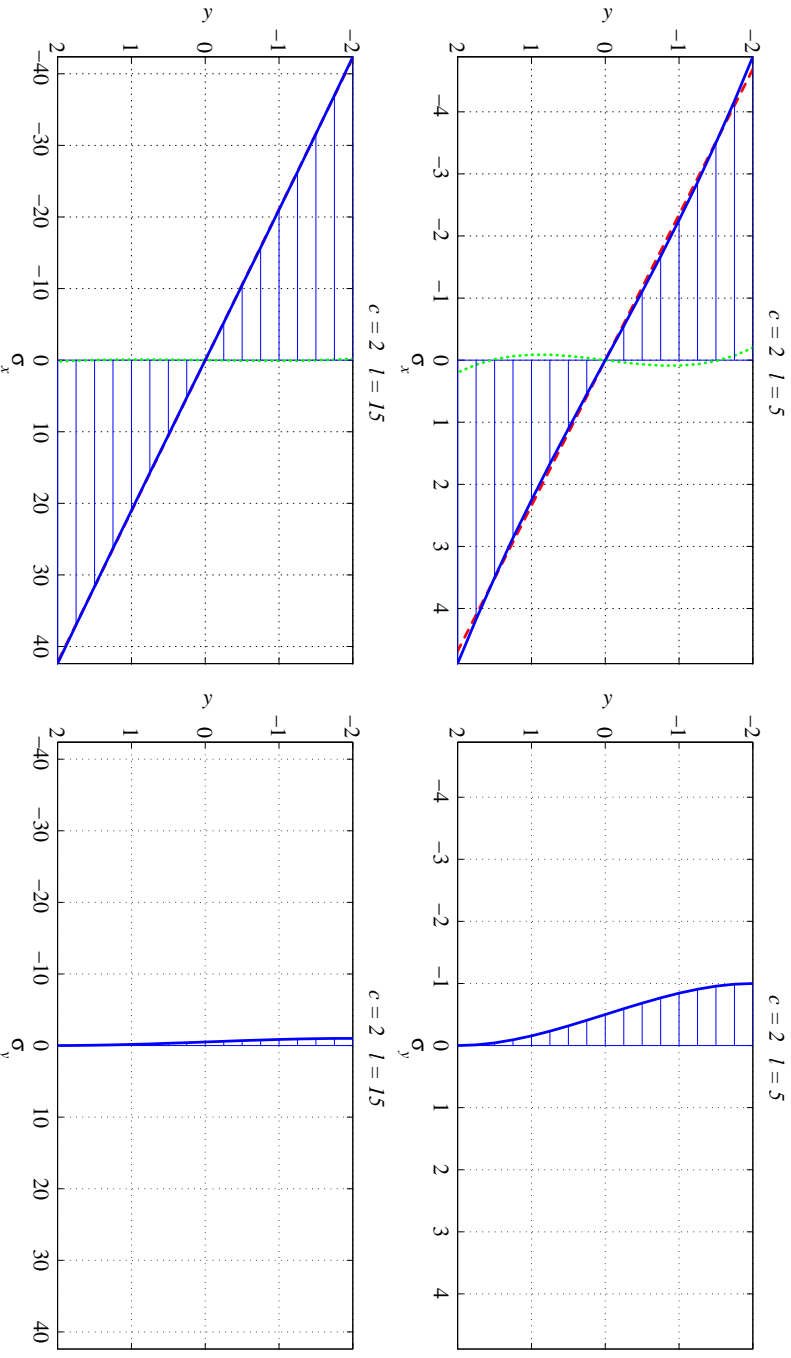
### 5.7. Ühtlaselt koormatud tala paine

Avaldise (5.68) esimene liige vastab elementaarsetele paindeteooriale ning teist saab vaadelda kui parandusliiget ja ta on väike võrreldes esimesega. „Parandusliige” on põhjustatud sellest, et elementaarteooria puhul eeldatakse, et  $\sigma_y \equiv 0$ , kuid (5.66) põhjal pole see nii. Lisaks on valemite (5.66) ja (5.68) põhjal selge, et  $\sigma_y$  ja  $\sigma_x$  avaldise „parandusliige” ei sõltu koordinaadist  $x$ .

Joonistel 5.19 ja 5.20 on esitatud pingete  $\sigma_x$  ja  $\sigma_y$  epiüürid võrdluse mõttes samas mõõtkavas. Sinine pidevjoon vastab  $\sigma_x$  puhul summaarsele pingele vastavalt valemile (5.68), punane kriipsjoon esitab nn. põhiliiget ja roheline punktiirjoon parandusliiget. Nendelt joonistelt selgub, et mida suurem on tala pikkuse ja kõrguse suhe  $l/c$ , seda tühisem on parandusliikme mõju ja pinge  $\sigma_y$  maksimaalne väärtus võrreldes  $\sigma_x$  maksimaalse väärtusega.



Joonis 5.19: Pinged  $\sigma_x$  ja  $\sigma_y$  ühtlaselt koormatud talas vastavalt valemitele (5.66) ja (5.68). Tala laius on 1 ja kõrgus  $2c = 6$ . Ülemistel joonistel on tala pikkus  $2l = 10$  ja alumistel joonistel  $2l = 30$ . Pinge  $\sigma_x$  on esitatud tala keskel kohal  $x = 0$ . Punane kriipsjoon vastab elementaar-teooriast pärit põhiilikele ja roheline punktirjoon parandusiikmele.



Joonis 5.20: Pinged  $\sigma_x$  ja  $\sigma_y$  ühtlaselt koormatud talas vastavalt valemitele (5.66) ja (5.68). Tala laius on 1 ja kõrgus  $2c = 4$ . Ülemistel joonistel on tala pikkus  $2l = 10$  ja alumistel joonistel  $2l = 30$ . Pinge  $\sigma_x$  on esitatud tala keskel kohal  $x = 0$ . Punane kriipsjoon vastab elementaar-teooriast pärit põhiilikele ja roheline punktirjoon parandusiikmele.



Tala punktide siirded  $u$  ja  $v$  leitakse analoogiliselt alajaotusele 5.6. Nüüd eeldatakse, et punktis  $x = y = 0$  on horisontaalsed siirded võrdsed nulliga ja vertikaalsed siirded võrdsed läbipaindega  $\delta$ . Kokku saame, et

$$\begin{cases} u = \frac{q}{2EI} \left[ \left( l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \nu x \left( \frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right], \\ v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + \nu \left[ (l^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\} - \\ - \frac{q}{2EI} \left[ \frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left( 1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right] + \delta. \end{cases} \quad (5.70)$$

Kuna (5.70)<sub>1</sub> põhjal horisontaalsed siirded tala keskjoonel

$$u|_{y=0} = \frac{\nu q x}{2EI}, \quad (5.71)$$

siis ei osutu keskjoon neutraalseks jooneks. Tala keskjoone punktide vertikaalne siire

$$v|_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI} \left[ \frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left( 1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right]. \quad (5.72)$$

### 5.7. Ühtlaselt koormatud tala paine

5 - 54

Kuna tala otsad on vabalt toetatud, siis  $v|_{x=\pm l} = 0$  ja

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{q l^4}{EI} \left[ 1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left( \frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (5.73)$$

Avaldises (5.73) nurksulgude ees olev kordaja esitab elementaartheoriale vastavat läbipainet (eeldades, et tala ristlõiked jäävad deformatsioonil tasapinnalisteks). Teine liige nurksulgudes esitab parandust, st. arvestab põikjõu mõju läbipaindele.

Diferentseerides (5.72) kaks korda saame keskjoone kõverust iseloomustava avaldise

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[ \frac{l^2 - x^2}{2} + c^2 \left( \frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (5.74)$$

Ka selles avaldises vastab esimene liige elementaartheoria valemile ning on portsionaalne paindemomendiga  $q(l^2 - x^2)/2$ .

Kui soovitakse arvesse võtta ka omakaalu, tuleb lisada pinge

$$\sigma_y = \rho g(c - y), \quad (5.75)$$

mis annab tala üllemisel pinnal  $y = -c$  pingeks  $\sigma_y = 2\rho g(c)$  ja alumisel pinnal  $y = c$  vastavalt  $\sigma_y = 0$ .

## Näide

- Tala pikkus  $2l = 10$  m, kõrgus  $2c = 0,8$  m ja laius  $b = 0,1$  m, koormus  $q = 100$  kN/m.

- Materjalid:

Teras:  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>,  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0.3$ , omakaal 61,2144 kN.

Alumiinium:  $\rho = 2600$  kg/m<sup>3</sup>,  $E = 70$  GPa,  $\nu = 0.35$ , omakaal 20,4048 kN.

Vask:  $\rho = 8900$  kg/m<sup>3</sup>,  $E = 110$  GPa,  $\nu = 0.32$ , omakaal 69,8472 kN.

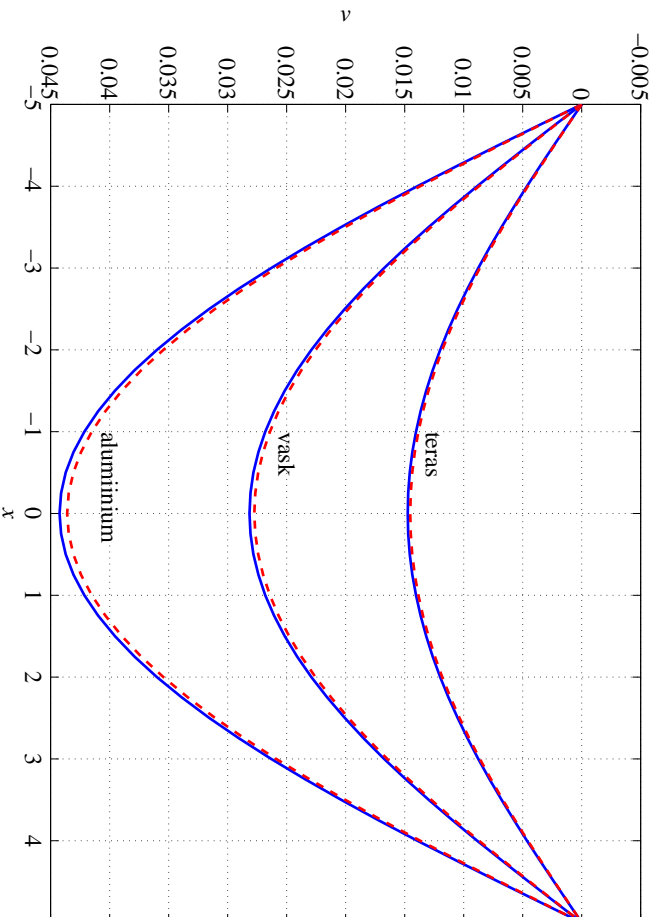
Joonistada tala kõverduunud keskjoon vastavalt valemile (5.72) ja elementaar-teooria valemile<sup>2</sup>

$$v = \frac{q}{EI} \left[ \frac{(x+l)^4}{24} - \frac{l(x+l)^3}{6} + \frac{l^3(x+l)}{3} \right] \quad (5.76)$$

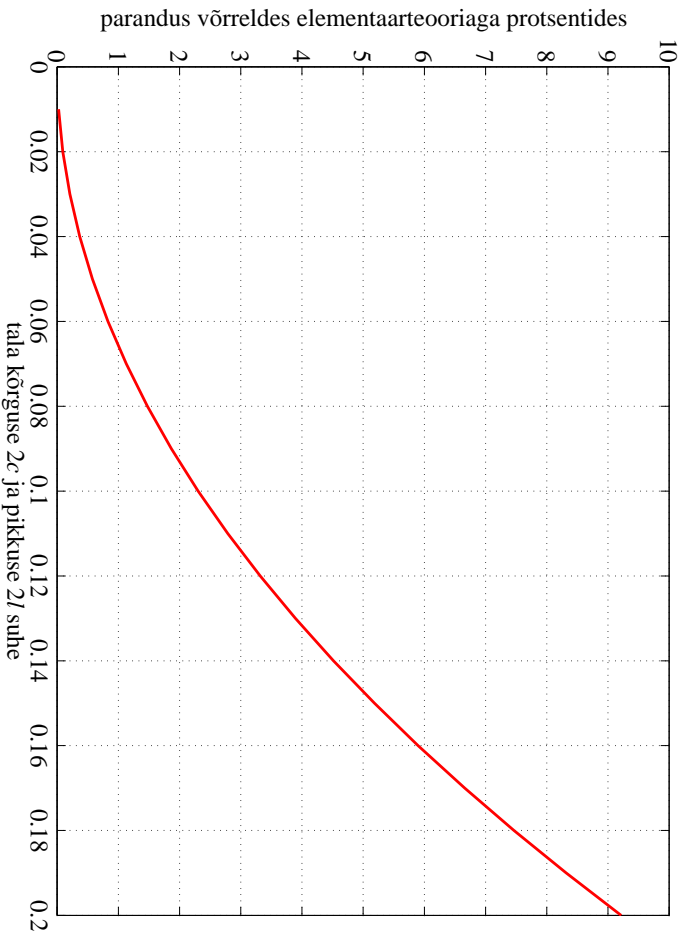
ning hinnata valemil (5.73) mm. parandusliikme osatähtsust sõltuvana tala kõrguse ja pikkuse suhtest.

<sup>2</sup>Parnes, Raymond. Solid mechanics in engineering. Wiley, Chichester, 2001.

### 5.7. Ühtlaselt koormatud tala paine



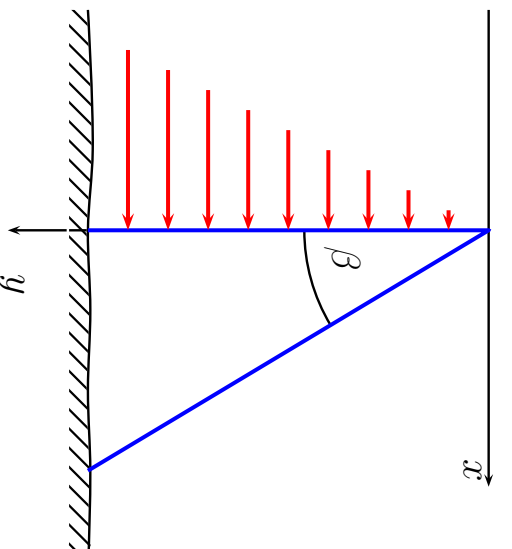
Joonis 5.22: Vabalt toetatud tala telje siirded. Punane kriipsjoon vastab mm. elementaar-teooriale ja sinine pidevjoon valemile (5.72).



Joonis 5.23: Vabalt toetatud tala paine. Valemi (5.73) parandusliikme osatähtsus protsentides sõltuvana tala kõrguse ja pikkuse suhtest (vt. alajaotus 5.7 lk. 54).

### 5.8. Hüdrostaatiliselt koormatud tugiseina arvutus.

## 5.8 Hüdrostaatiliselt koormatud tugiseina arvutus.



Joonis 5.24: Hüdrostaatiliselt koormatud kolmnurkse ristlõikega tugisein.

Vaatleme kolmnurkse ristlõikega tugiseina, millele mõjub hüdrostaatiline surve (joon 5.24). Olgu vedeliku tihedus  $\rho$ , tugiseina kaldenurk  $\beta$  ja sein materjali erikaal  $\gamma$ . Seega on seinalle mõjuvateks välisjõududeks vedelikust põhjustatud hüdrostaatiline surve  $p = \rho g y$  ja mahujõud  $Y = \gamma$  (seina erikaal). Hülgame sein ja vundamenti vahelised jõud, st., vaatleme  $0 \leq y < \infty$ .



Sellistel eeldustel on tegu tasapinnalise ülesandega ja rajatingimused

$$\begin{cases} p_{vx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m, \\ p_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m. \end{cases}$$

Vertikaalsel küljel  $x = 0$  ja pinnanormaali suunakoosinused  $l = -1$  ning  $m = 0$ . Kuna sellele seinale mõjub hüdrostaatiline surve  $p$ , siis vastavalt rajatingimustele

$$\begin{cases} \rho g y = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{yx} 0, \\ 0 = \tau_{xy} \cdot (-1) + \sigma_y 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -\rho g y, \\ \tau_{xy} = 0. \end{cases} \quad (5.77)$$

Kaldküljel  $x = y \tan \beta$ ,  $l = \cos \beta$ ,  $m = -\cos(90^\circ - \beta) = -\sin \beta$ . Kuna kaldkülg on koormusest vaba, siis saavad rajatingimused kuju

$$\begin{cases} 0 = \sigma_x \cos \beta + \tau_{yx}(-\sin \beta), \\ 0 = \tau_{xy} \cos \beta + \sigma_y(-\sin \beta), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \tau_{yx} \tan \beta, \\ \tau_{xy} = \sigma_y \tan \beta. \end{cases} \quad (5.78)$$

Lahendi leidmisel lähtume kuuppolünoomist (5.22)

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} x y^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3.$$

---

### 5.8. Hüdrostaatiliselt koormatud tugiseina arvutus.

Vastavalt valemitele (5.15) avalduvad pingekomponendid kujul

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y; \quad \sigma_y = a_3 x + b_3 y; \quad \tau_{yx} = -b_3 x - c_3 y - \gamma x. \quad (5.79)$$

Alternatiivsete valemite (5.16) kaudu aga kujul

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y; \quad \sigma_y = a_3 x + b_3 y - \gamma y; \quad \tau_{yx} = -b_3 x - c_3 y. \quad (5.80)$$

Järgnevalt näeme, et mõlemal juhul saame pärast rajatingimuste (5.77) ja (5.78) rahuldamist sama tulemuse.

Lähtume esiteks valemist (5.79). Rajatingimused vertikaalküljel (5.77) annavad

$$d_3 = -\rho g \quad \text{ja} \quad c_3 = 0. \quad (5.81)$$

Kaldküljel  $x = y \tan \beta$  ja rajatingimused (5.78) saavad kuju

$$\begin{cases} 2c_3 \tan \beta + b_3 \tan^2 \beta + d_3 + \gamma \tan^2 \beta = 0 \\ a_3 \tan^2 \beta + 2b_3 \tan \beta + c_3 + \gamma \tan \beta = 0 \end{cases} \quad (5.82)$$

Arvestades (5.81) saame viimastest avaldada

$$a_3 = \frac{\gamma}{\tan \beta} - \frac{2\rho g}{\tan^3 \beta}, \quad b_3 = \frac{\rho g}{\tan^2 \beta} - \gamma. \quad (5.83)$$

Sellega ongi neli tundmatut konstanti määratud ning pingete avaldised (5.79) saavad kuju

$$\sigma_x = -\rho g y; \quad \sigma_y = (\gamma - 2A) \frac{x}{\tan \beta} + (A - \gamma) y; \quad \tau_{yx} = -Ax, \quad (5.84)$$

kus konstant

$$A = \frac{\rho g}{\tan^2 \beta}. \quad (5.85)$$

Kui teha sama protseduur läbi alternatiivsete pingevaldiste (5.80) jaoks, siis saame rajatingimustest (5.77) tulemuseks avaldised (5.81). Rajatingimused kaldkülgjel annavad aga valemist (5.83) erineva tulemuse konstandi  $b_3$  jaoks

$$a_3 = \frac{\gamma}{\tan \beta} - \frac{2\rho g}{\tan^3 \beta}, \quad b_3 = \frac{\rho g}{\tan^2 \beta}. \quad (5.86)$$

Pannes aga avaldistega (5.81) ja (5.86) esitatud konstantide  $a_3, \dots, d_3$  väärtused pingete avaldistesse (5.80) saame sama tulemuse, mis eelmiselgi juhul. Seega võime kokkuvõttes öelda, et vaadeldava tilesande korral on pinged tugiseinas leitavad valemite (5.84) abil.

### 5.8. Hüdrostaatiliselt koormatud tugiseina arvutus.

### 5 - 62

Valemi (5.84)<sub>2</sub> põhjal vertikaalkülgjel  $\sigma_y = (A - \gamma) y$ . Seega selleks, et vältida tõmbepingeid ( $\sigma_y > 0$ ) peab  $A < \gamma$ , kust saame kaldenurga jaoks kriitilise väärtuse

$$\beta^* = \arctan \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}. \quad (5.87)$$

Kui  $\beta > \beta^*$ , siis on vertikaalkülg surrutud. Võttes vee tiheduseks  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  ja sein materjaliks betooni erikaluga  $\gamma = 2400g \text{ N/m}^3$  saame  $\beta^* = \arctan \sqrt{1000/2400} = 32,8^\circ$ . Erikalu  $\gamma = 2000g \text{ N/m}^3$  korral saame aga  $\beta^* = 35,2^\circ$ .

Vaatleme nüüd tugiseina lõiget  $y = y_0$ . On selge, et selles lõikes  $0 \leq x \leq y_0 \tan \beta$ . Vastavalt valemile (5.84) on normaalpinge  $\sigma_x = -\rho g y_0$ , st. konstantne. Teine normaalpinge, st.  $\sigma_y$ , muutub aga väärtusest  $\sigma_y|_{x=0} = (A - \gamma)y_0$  väärtuseni  $\sigma_y|_{x=x_0} = -Ay_0$ . Nihkepinge  $\tau_{xy}|_{x=0} = 0 \leq \tau_{xy} \leq \tau_{xy}|_{x=x_0} = -Ay_0 \tan \beta$ . Tugevusõpetuse kursuse raames saadud valemid, mn. 0-järku lahend, erineb saadust oluliselt pingete  $\sigma_x$  ja  $\tau_{xy}$  osas, kusjuures  $\sigma_y$  langeb kokku:

$$\sigma_x^0 = 0; \quad \sigma_y = \sigma_y^0 \quad \tau_{xy}^0 = -\frac{3\rho g}{\tan^3 \beta} \left( x \tan \beta - \frac{x^2}{y} \right). \quad (5.88)$$

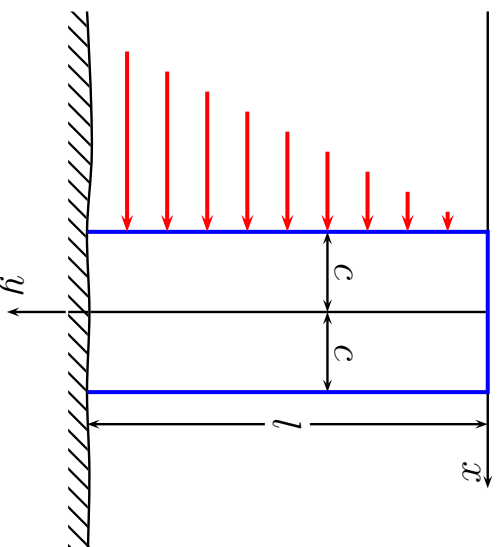
Nihkepinge avaldise puhul on 0-järku teoorias lähtunud samadest eeldustest, mis talade paindel ja saadud paraboolne jaotus.

### Märkused:

- Vaadeldava tillesande lahendusele ei anna polinoomi järgu tõstmine mitte mingeid lisaliikmeid — kõik kõrgemat järku liikmed peavad vaadeldavate rajatingimuste korral olema nullid.
- Käesoleva lahendi puhul pole arvestatud vundamendi mõju — tugiseina alumisel osal on lubatud vabalt deformeeruda. Tegelikult sõltub aga suurenemate  $y$  väärtuste korral vertikaalne deformatsioon vundamendi jäikusest.
- Kui me sooviksime arvestada ka rajatingimusi tugiseina alumisel osal (seina ja vundamendi kinnituskohas), siis muutuks tillesanne tunduvalt keerukamaks ja teda poleks võimalik lahendada polinoomides.
- Võttes kasutusele kuugendat järku polinoomid, saab leida lahendi ristkülikulise tugiseina (vertikaalse konsooli) jaoks. Seda vaadeldakse järgmises alajaotuses.

### 5.9. Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool

## 5.9 Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool



Joonis 5.25: Vertikaalsele konsoolile mõjuv hüdrostaatiline surve.

Kui tildistada alajaotuses 5.5 esitatud lahendusmeetodikat ja vaadelda 6. järku polinoomi, siis saame leida pingejaotuse hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalse konsooli jaoks<sup>3</sup>:

<sup>3</sup>Vaadeldav lahend pärineb Timoshenko ja Goodier õpikust ning tegelikult pole ka siin arvesse võetud vundamendi mõju.

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{\rho g y}{2} + \rho g y \left( \frac{x^3}{4c^3} - \frac{3x}{4c} \right), & \sigma_y = \frac{\rho g y^3 x}{4c^3} + \frac{\rho g}{4c^3} \left( -2yx^3 + \frac{6}{5}c^2yx \right), \\ \tau_{xy} = \frac{3\rho g y^2}{8c^3} (c^2 - x^2) - \frac{\rho g}{8c^3} (c^4 - x^4) + \frac{\rho g}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - x^2). \end{cases} \quad (5.89)$$

Siin tähistab  $\rho$  vedeliku tihedust ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) ja seega on koormuse intensiivsus sügavusel  $y$  võrdne  $\rho g y$ , põikjõud  $\rho g y^2/2$  ja paindemoment  $\rho g y^3/6$ .  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$  avaldiste esimesed liikmed vastavad jällegi elementaarooriale.

Konsooli vabal otsal  $y = 0$  on leitud lahendi põhjal normaalpinged nullid. Nihkepinged

$$\tau_{xy} = -\frac{\rho g}{8c^3} (c^4 - x^4) + \frac{\rho g}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - x^2) \quad (5.90)$$

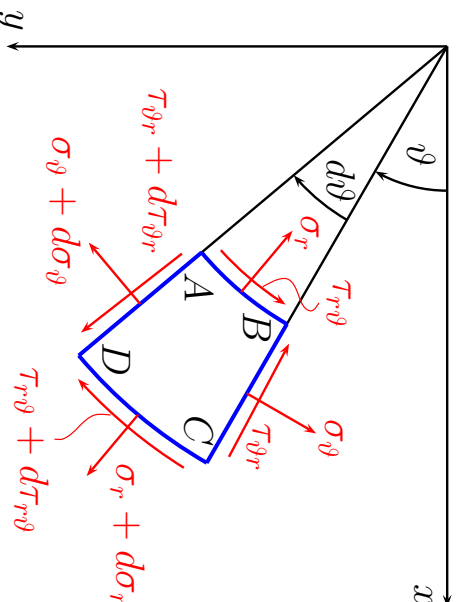
pole nullid, kuid on väikesed üle kogu pinna ning nende peavektor on ligikaudu null. See võimaldab lugeda väliskoormuse kohal  $y = 0$  nulliks.

Kui tahetakse arvesse võtta ka konsooli materjali omakaal, siis tuleb  $\sigma_y$  avaldisse lisada liige  $-\gamma y$ , kus  $\gamma$  on konsooli materjali erikaal.

### 5.10. Tasapinnalised tulesanded polaarkoordinaatides

## 5.10 Tasapinnalised tulesanded polaarkoordinaatides

### 5.10.1 Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon



Joonis 5.26: Väikese elemendi ABCD tasakaal.

DRK-s esitatud tasakaaluvõrrandite analoog saadakse kui vaadeldakse elemendi  $ABCD$  tasakaalu ja projekteeritakse tema külgedel mõjuvad summaarsed jõud

ja mahujõud  $\vartheta$  ja  $r$  sihilte. Minnes üle piirile  $d\vartheta \rightarrow 0$  ja  $dr \rightarrow 0$  saame

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + f_r = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{r} + f_\vartheta = 0. \end{cases} \quad (5.91)$$

Siin tähistavad  $f_r$  ja  $f_\vartheta$  mahujõudude projektsoone radiaal ja tangentsiaal suunale ( $r$  ja  $\vartheta$  kasvamise suunale).

Ka siin saab mahujõudude puudumisel sisse tuua Airy' pingefunktsiooni  $\varphi = \varphi(\vartheta, r)$ , nii et

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}, & \sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\vartheta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right). \end{cases} \quad (5.92)$$

Nüüd Laplace'i operaator

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \quad (5.93)$$

### 5.10.2. Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides

ja biharmooniline võrrand

$$\nabla^4 \varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (5.94)$$

Kui pingekomponendid ja seega ka  $\varphi$  sõltuvad vaid koordinaadist  $r$ , siis saab võrrandi (5.94) tildlahendi esitada kujul

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D. \quad (5.95)$$

### 5.10.2 Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides

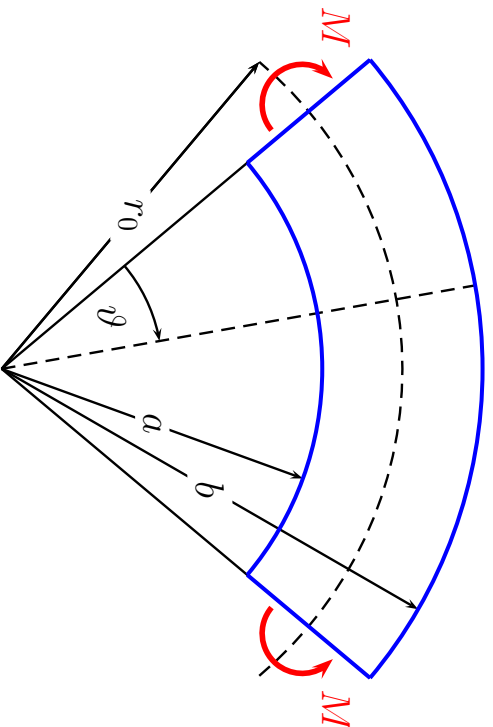
$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \\ \gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{cases} \quad (5.96)$$

Siin mõistetakse suurusi  $u$  ja  $v$  kui radiaalset ja tangentsiaalset siirdekomponeenti. Hooke'i seaduse kuju jääb endiseks:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\vartheta), \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E} (\sigma_\vartheta - \nu \sigma_r), \quad \gamma_{r\vartheta} = \frac{\tau_{r\vartheta}}{G}. \quad (5.97)$$

Siirete määramine toimub analoogiliselt DRK-ga.

## 5.11 Kõvera tala paine



Joonis 5.27: Kõvera tala paine.

Näitena vaatleme kõvera tala puhast painet, st. vaatlеме tala, mis paindub kõverustasapinnas otstesse rakendatud momentide  $M$  mõjul. Sel juhul jääb paindemoment konstantseks kogu varda pikkuse ulatuses, järelikult sõltub pinge vaid radiaalkoordinaadist  $r$ . Seega saab kasutada lahendit (5.95).

### 5.11. Kõvera tala paine

### 5 - 70

Rajatingimused:

$$\begin{cases} \sigma_r = 0, & r = a, \quad r = b, \\ \int_a^b \sigma_{\vartheta} dr = 0, & \int_a^b \sigma_{\vartheta} r dr = -M \\ \tau_{r,\vartheta} = 0, & \text{kõigil rajapindadel.} \end{cases} \quad (5.98)$$

Pärast rajatingimuste (5.98) rahuldarnist ja tähistuse

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \ln^2 \frac{b}{a} \quad (5.99)$$

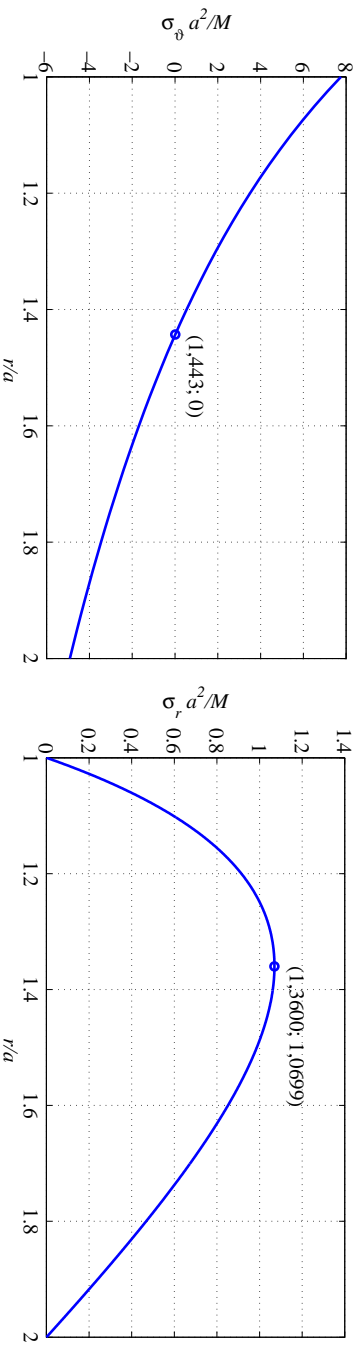
sissetoomist saame

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{4M}{N} \left( \frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right), \\ \sigma_{\vartheta} = -\frac{4M}{N} \left( -\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right), \\ \tau_{r,\vartheta} = 0. \end{cases} \quad (5.100)$$

Lahend on täpne vaid siis kui pingejaotus otspindadel vastab avaldisele (5.100)<sub>2</sub>. Muil juhtudel tuleb rakendada Saint-Venanti printsiipi.



Joonisel 5.28 on esitatud suurused  $\sigma_\vartheta a^2/M$  ja  $\sigma_r a^2/M$  sõltuvana suhtest  $r/a$  juhul kui  $b/a = 2$ .



Joonis 5.28. Pingete jaotus kõvera tala paindel.

Järeldused: 1)  $\sigma_r > 0$  iga  $r$  puhul vaadeldavas piirkonnas; 2) neutraalne telg vastab  $r/a = 1,443$  ja  $\max \sigma_\vartheta > |\min \sigma_\vartheta|$ ; 3)  $\sigma_r$  maksimum ei asu neutraalsel teljel.

### 5.12. Pöörlev ketas

5 - 72

## 5.12 Pöörlev ketas

Teiseks näiteks polaarkoordinaatide puhul on pöörleva ketta ülesanne. Vaatleme ketast, mille välisraadius on  $b$  ja mis pöörleb jääva nurkkiirusega  $\omega$ . Ketta paksuse loeme raadiusega võrreldes väikeseks. Ainsaks mahujõuks (mida arvesse võtame) on inertsjõud, st.  $f_r = \rho\omega^2 r$  ja  $f_\vartheta = 0$ . Antud juhul on tegu nn. polaarsümmeetrilise ülesandega, kus  $\sigma_r$  ja  $\sigma_\vartheta$  sõltuvad vaid koordinaadist  $r$  ja seega valemil (5.92) põhjal  $\tau_{r\vartheta} = 0$ . Teine tasakaluvõrrandeist (5.91) on antud juhul automaatselt rahuldatud ja esimesele saab anda kuju

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\vartheta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \quad (5.101)$$

Kuna ka  $\varepsilon_r$  ja  $\varepsilon_\vartheta$  on vaid  $r$  funktsioonid, siis (5.96) põhjal

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r}. \quad (5.102)$$

Hooke'i seadusest (5.97)

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r - \nu\varepsilon_\vartheta), \quad \sigma_\vartheta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\vartheta - \nu\varepsilon_r). \quad (5.103)$$

Asendades nüüd deformatsioonikomponendid (5.102) Hooke'i seadusse (5.103) ning viimase omakorda tasakaluvõrrandisse (5.101) saame diferentsiaalvõrrandi siirdekomponeendi  $u$  määramiseks:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r^3. \quad (5.104)$$

Selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend avaldub kujul

$$u = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu) C r - (1+\nu) C_1 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8} \rho \omega^2 r^3 \right]. \quad (5.105)$$

Vastavad pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2, \\ \sigma_\theta = C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2. \end{cases} \quad (5.106)$$

Konstandid  $C$  ja  $C_1$  määratakse rajatingimustest.

**Täisketta** (ilma auguta keskel) puhul vastab  $r = 0$  siire  $u = 0$ , seega  $C_1 = 0$ . Ketta serval  $r = b$  jõudude puudumisel  $\sigma_r = 0$ , seega

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2. \quad (5.107)$$

### 5.12. Pöörlev ketas

### 5 - 74

Seega pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) \\ \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{cases} \quad (5.108)$$

Plaadi keskel on neil pingetel maksimaalne väärtus

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2. \quad (5.109)$$

Kui **ketta keskel on aua** raadiusega  $a$ , siis konstandid  $C$  ja  $C_1$  määratakse rajatingimustest  $\sigma_r|_{r=a} = \sigma_r|_{r=b} = 0$  —

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (a^2 + b^2), \quad C_1 = -\frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 a^2 b^2. \quad (5.110)$$

Pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left( b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right), \\ \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left( b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right). \end{cases} \quad (5.111)$$



Radiaalpinge  $\sigma_r$  on nüüd maksimaalne kohal  $r = \sqrt{ab}$  ja tangentsiaalpinge (rõngaspinge, i.k. *hoop stress*)  $\sigma_\vartheta$  sisemisel serval

$$\begin{cases} \max \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b-a)^2, \\ \max \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left( b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} a^2 \right). \end{cases} \quad (5.112)$$

Kui  $a \rightarrow 0$ , siis  $\max \sigma_\vartheta$  läheneb väärtusele, mis on kaks korda suurem kui avaldisega (5.109) esitatud väärtus. Seega kui teha täisketta tsentrisse väike ava, siis suureneb tangentsiaalpinge plaadi tsentris kaks korda.

---

5.13. Radiaalne pingus.

5 - 76

### 5.13 Radiaalne pingus.

Küllaltki tihti esineb ülесandeid, kus igas keha punktis on nullist erinev vaid radiaalne pinge  $\sigma_r$ . Sellist pingust nimetatakse *radiaalseks pinguseks*.

Antud juhul saab esitada pinge  $\sigma_r(r, \vartheta)$  kahe funktsiooni korrutisena:

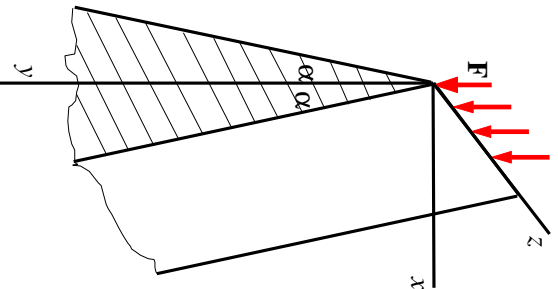
$$\sigma_r(r, \vartheta) = \varphi(r)\psi(\vartheta). \quad (5.113)$$

Pannes viimase tasakaalu- ja pidevusvõrrandesse ning integreerides, saame radiaalse pinguse jaoks pingekomponentide avaldised

$$\sigma_r(r, \vartheta) = -\frac{k}{r} \cos(\vartheta - \vartheta_0), \quad \sigma_\vartheta = \tau_{r\vartheta} = 0, \quad (5.114)$$

kus integreerimiskonstandid  $k$  ja  $\vartheta_0$  määratakse rajatingimustest.

## 5.14 Kiilu surve.

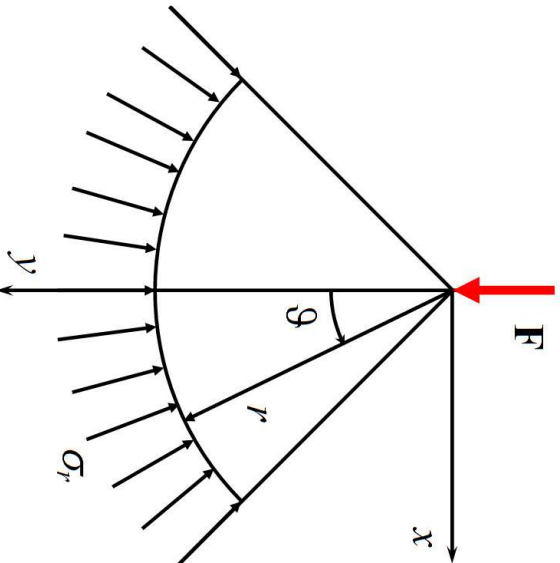


Joonis 5.29: Sümmeeitiline kiil ja tema sümmeeitatasandis mõjuv jõud.

Vaatleme lõpmata pikka sümmeeitulist kiilu (joonis 5.29), mille sümmeeitatasandis mõjub joonkoormus  $\mathbf{F}$ . Kiilu tipunurga tähistame  $2\alpha$ . Analoogiliselt tugiseina arvutusega, hülgame rajatingimused kiilu alaservas ja vaatleme  $0 \leq y \leq \infty$ .

### 5.14. Kiilu surve.

### 5 - 78



Joonis 5.30: Sümmeeitilisele kiilule mõjuv jõud, radiaalne pinge, polaar ja ristkoordinaadid.

Võtame kasutusele polaarkoordinaadid  $r$  ja  $\vartheta$  (joonis 5.30). Sellisel juhul on tegu radiaalse pingusega ja pingekomponendid on esitatavad kujul (5.114). Konstantide  $k$  ja  $\vartheta_0$  määramiseks tuleb kõik joonisel 5.30 kujutatud jõud (ja pinged) projekteerida koordinaatide  $r$  ja  $\vartheta$  (või  $x$  ja  $y$  sihile). Kuna välisjõud on vaadeldaval juhul vertikaalne (ja mõjub sümmeeitatasandis), siis on konstant  $\vartheta_0 = 0$ . Konstandi  $k$  määramiseks projekteeritakse  $\mathbf{F}$  ja  $\sigma_r$   $y$ -teljele:

$$F - \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r(\cos \vartheta) r d\vartheta = 0, \quad (5.115)$$

kust arvestades (5.114) saame

$$F - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{k}{r} \cos^2 \vartheta r d\vartheta = 0, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha}. \quad (5.116)$$

Kokku saame seega lahendi kujul:

$$\sigma_r = -\frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \vartheta}{r}, \quad \sigma_{\vartheta} = \tau_{r\vartheta} = 0. \quad (5.117)$$

Kuna valemite (5.114) tuletamisel kasutati nii tasakaalu kui pidevuse võrrandeid, siis rahuldab ka vaadeldava ülesande lahend (5.117) nii tasakaalu kui pidevuse võrrandeid.

---

#### 5.14. *Kiiklu surve.*

Praktiliste probleemide korral (vt. näiteks järgmist alajaotust) on siiski otstarbekas kasutada koordinaate  $x$  ja  $y$ . Üleminekuks on järgmised valemid:

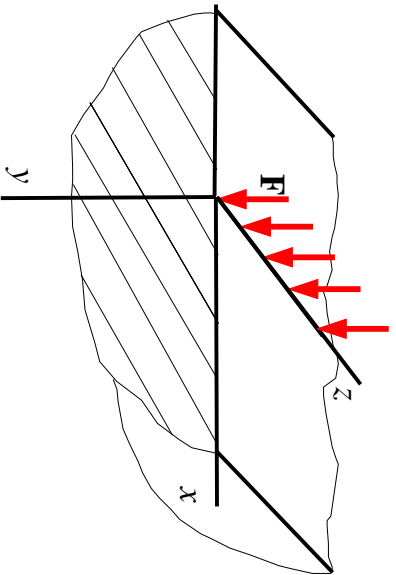
$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_r l^2 + \sigma_{\vartheta} m^2 + 2\tau_{r\vartheta} l m, \\ \sigma_y = \sigma_r l_1^2 + \sigma_{\vartheta} m_1^2 + 2\tau_{r\vartheta} l_1 m_1, \\ \tau_{xy} = \sigma_r l l_1 + \sigma_{\vartheta} m m_1 + \tau_{r\vartheta} (l m_1 + l_1 m), \end{cases} \quad (5.118)$$

$$\begin{cases} l = \cos(r, x) = \sin \vartheta, \\ m = \cos(\vartheta, x) = \cos \vartheta, \\ l_1 = \cos(r, y) = \cos \vartheta, \\ m_1 = \cos(\vartheta, y) = -\sin \vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (5.119)$$

Kokku saame kolm koordinaatidele  $x$  ja  $y$  vastavat pingekomponenti

$$\sigma_x = -\frac{kx^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{ky^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{kxy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (5.120)$$

## 5.15 Joonkoormuse mõju poolruumile



Joonis 5.31: Elastsele poolruumile mõjuv

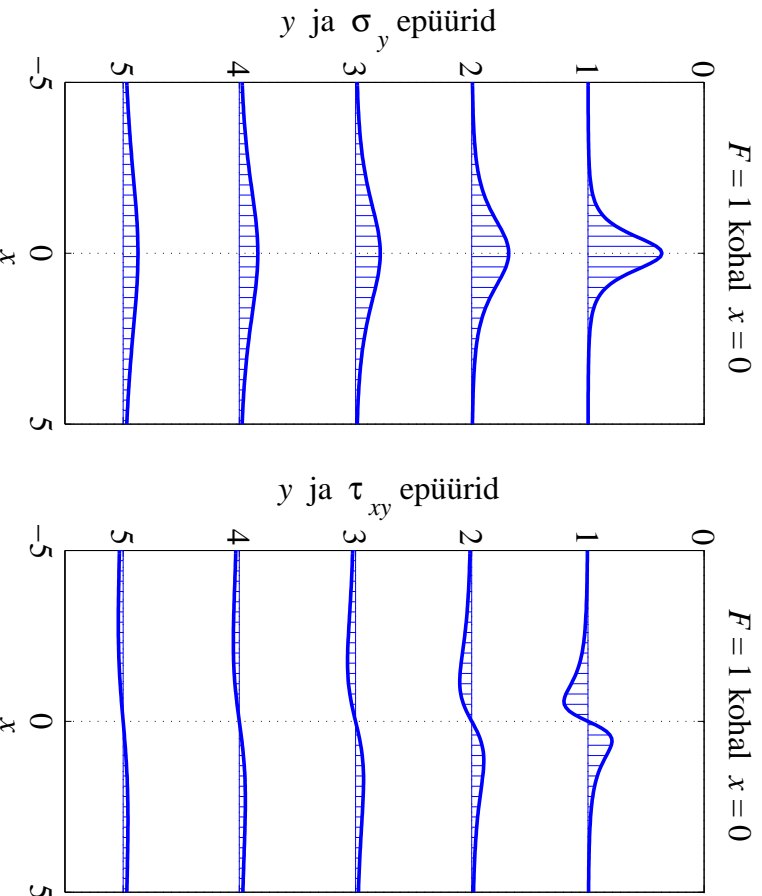
joonkoormus.

ning ristkoordinaatides

$$\sigma_r = -\frac{2F \cos \vartheta}{\pi r}, \quad \sigma_\vartheta = \tau_{r\vartheta} = 0 \quad (5.121)$$

$$\sigma_x = -\frac{2F x^2 y}{\pi(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2F y^3}{\pi(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2F x y^2}{\pi(x^2 + y^2)^2}. \quad (5.122)$$

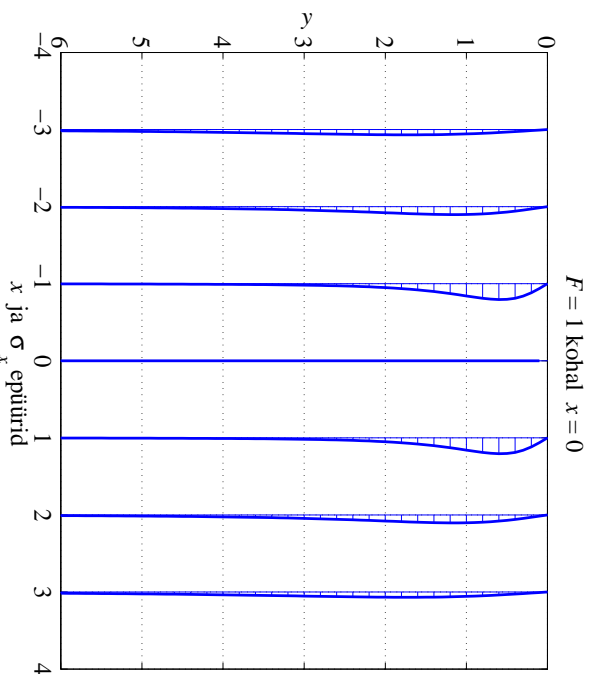
5.15. Joonkoormuse mõju poolruumile



Joonis 5.32: Normaapinge  $\sigma_y$  ja nihkepinge  $\tau_{xy}$  epüürid koordi-

naadi  $y$  fikseeritud väärtuste jaoks kohal  $x = 0$  mõjuva ühikulise jõu  $F$  korral.

On selge, et vaadeldavas piirkonnas on normaalinged negatiivsed iga  $x$  ja  $y$  korral, nihkepinge  $\tau_{xy}$  aga muudab jõu rakenduspunkti kohal oma märki: negatiivsete  $x$  korral on  $\tau_{xy} > 0$  ja positiivsete  $x$  korral on  $\tau_{xy} < 0$ . Joonisel 5.32 on esitatud normaalinge  $\sigma_y$  ja nihkepinge  $\tau_{xy}$  epüürid koordinaadi  $y$  fikseeritud väärtustel  $y_0 = 1, 2, \dots, 5$ .

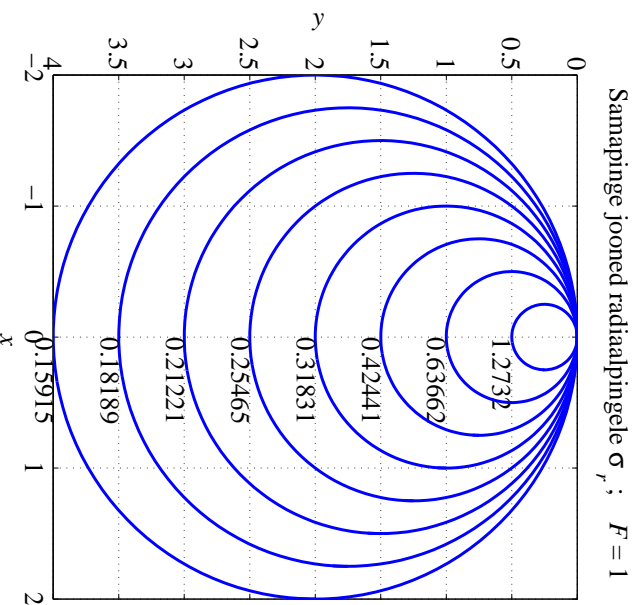


Joonis 5.33: Normaalpinge  $\sigma_x$  epüürid koordinaadi  $x$  fikseeritud väärtuste jaoks kohal  $x = 0$  mõjuva tihikulise jõu  $\mathbf{F}$  korral.

Joonisel 5.33 on esitatud normaalpinge  $\sigma_x$  epüürid koordinaadi  $x$  fikseeritud väärtuste  $x_0 = -3, -2, -1, 1, 2, 3$  jaoks.

Fikseeritud  $y$  korral omab normaalpinge  $\sigma_y$  ekstreemalset väärtust kohal  $x = 0$ , ja nihkepinge  $\tau_{xy}$  kohal  $|x| = y_0/\sqrt{3}$ . Analoogiliselt, fikseeritud  $x = x_0$  korral  $\sqrt{\phantom{x}}$  omab normaalpinge  $\sigma_x$  ekstreemalset väärtust kohal  $y = |x_0|/\sqrt{3}$ .

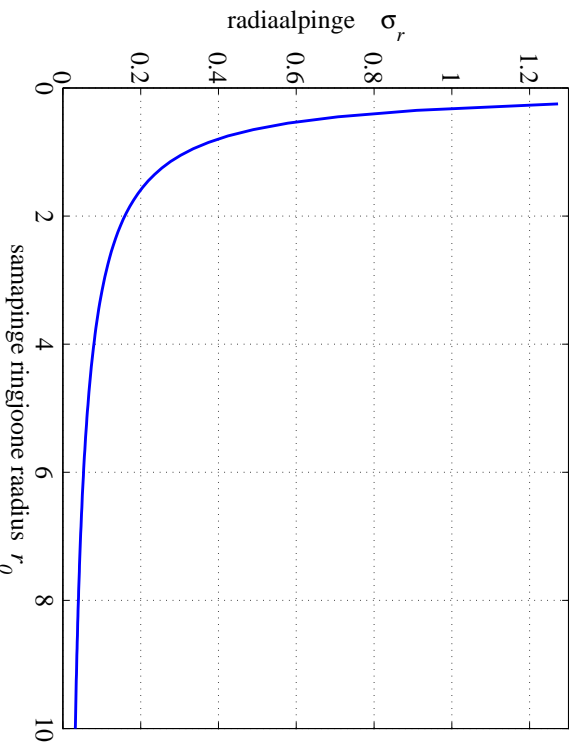
### 5.15. Joonkoormuse mõju poolruumile



Joonis 5.34: Radiaalpinge  $\sigma_r$  samapinge jooned kohal  $x = 0$  mõjuva tihikjõu  $\mathbf{F}$  korral.

Joonisel 5.34 on esitatud radiaalpinge  $\sigma_r$  samapinge jooned — ringjoonel raadiusega  $r_0$  on radiaalpinge  $\sigma_r = -F/\pi r_0$ . Kõik sellised ringjooned puutuvad  $x$ -telgele jõu  $\mathbf{F}$  rakenduspunktis.

Sellise graafilise radiaalpinge esituse andis esmakordselt Joseph Boussinesq ning seetõttu nimetatakse neid ringe *Boussinesqi ringideks*.



Joonis 5.35: Radiaalpinge  $\sigma_r$  sõltuvana samapinge joone raadiusest  $r_0$  kui  $F = 1$ .

Joonisel 5.35 on näidatud kuidas jõu  $F = 1$  korral sõltub radiaalpinge  $\sigma_r$  samapinge joone raadiusest  $r_0$ .

### 5.15. Joonkoormuse mõju poolruumile

Valemeid (5.121) ja (5.122) võib kasutada selleks, et hinnata vundamendialuseid pingeid pinnases. Kuigi pinnas tldiselt ei käitu elastselt, on siiski leitud, et väikeste sisepingete korral on kõigil pinnastel rakendatav lineaarne elastsusteooria.

Eelpool vaadeldud lahend on lihtsalt üldistatav suvalise joonkoormuse  $p(x)$  jaoks, mis mõjub lõigul  $[a, b]$ . Esmalt vaatleme juhtu, kus koondatud jõud  $\mathbf{F}$  ei mõju mitte koordinaatide alguses, vaid punktis  $x = x_0$ . Sel juhul saavad valemid (5.122) kuju

$$\sigma_x = -\frac{2F\xi^2 y}{\pi(\xi^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2Fy^3}{\pi(\xi^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2F\xi y^2}{\pi(\xi^2 + y^2)^2} \quad (5.123)$$

kus  $\xi = x - x_0$ .

Selleks, et arvutada lõigul  $a \leq x \leq b$  mõjuvast joonkoormusest  $p(x)$  põhjustatud pingeid, tuleb saadud valemities teha asendus  $F = p(\xi)d\xi$  ja integreerida lõigul  $[a, b]$ .

Juhul kui  $p = const.$ , saame

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2p}{\pi} \int_{x=a}^{x=b} \frac{\xi^2 y}{(\xi^2 + y^2)^2} d\xi = -\frac{p}{\pi} \left( \arctan \frac{\xi}{y} - \frac{y\xi}{\xi^2 + y^2} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ &= -\frac{p}{\pi} \left[ \arctan \frac{(x-b)}{y} - \arctan \frac{(x-a)}{y} - \frac{y(x-b)}{(x-b)^2 + y^2} + \frac{y(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \right], \end{aligned} \quad (5.124)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{2p}{\pi} \int_{x=a}^{x=b} \frac{y^3}{(\xi^2 + y^2)^2} d\xi = -\frac{p}{\pi} \left( \arctan \frac{\xi}{y} + \frac{y\xi}{\xi^2 + y^2} \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ &= -\frac{p}{\pi} \left[ \arctan \frac{(x-b)}{y} - \arctan \frac{(x-a)}{y} + \frac{y(x-b)}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{y(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \right], \end{aligned} \quad (5.125)$$

### 5.15. Joonkoormuse mõju poolruumile

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{2p}{\pi} \int_{x=a}^{x=b} \frac{\xi y^2}{(\xi^2 + y^2)^2} d\xi = \frac{p}{\pi} \frac{y^2}{\xi^2 + y^2} \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ &= \frac{p}{\pi} \left[ \frac{y^2}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Saadud valemite (5.124)–(5.126) abil on võimalik hinnata pingeid vundamendialuses pinnases.

Jaam Metsaveere koostatud õppevahendis<sup>4</sup> on välja pakutud alternatiivne valem

$$\sigma_y^* = \frac{p}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (5.127)$$

kus  $p$  on alusmüüri pikkusühikule mõjuv koormus,  $2a$  vundamendi pikkus ja  $-a \leq x \leq a$ . See valem baseerub ideel määrata vundamendi ja pinnase vaheline rõhk, mis põhjustab tihtlase vertikaalsiirde kogu vundamendi ulatuses. Viimase valemil põhjal peaks vundamendi servades  $x = \pm a$  tekkima lõpnata suured pinged. Tegelikuses selline olukord ei realiseeru — juba suhteliselt väikeste pingete juures tekkivad  $x = \pm a$  ümbruses plastsed deformatsioonid ning tegelik pingeaotus on tunduvalt tihtlasem.

<sup>4</sup>J. Metsaveer, Plaaside arvutus ja tasanditlesanne, Tallinn, 1987



## 5.16 Näide: joonkoormuse mõju poolruumile

*Ülesanne.* Poolruumile mõjub lõigul  $-5 \leq x \leq 5$  kontsantne joonkoormus  $p = 1$ . Leida normaalpinged  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$  koordinaatide  $x$  ja  $y$  fikseeritud väärtuste jaoks kasutades eelmises alajaotuses toodud valemeid.

*Lahendus.*

1. Normaalpinge  $\sigma_y$  arvutamiseks saab kasutada valemeid (5.125), (5.123)<sub>2</sub> või (5.127).
  - Valem (5.125) võimaldab leida pinge  $\sigma_y$  väärtusi iga  $y$  ja  $x$  jaoks.
  - Valem (5.123)<sub>2</sub> rakendamiseks tuleb lõik  $-5 \leq x \leq 5$  jagada  $n$  võrdseks osalõiguks pikkusega  $\Delta x = 2a/n$  ja joonkoormus  $n + 1$  koondatud jõuks. Osalõikude otstes  $x_i = -a + i\Delta x$ , ( $i = 0, \dots, n$ ) mõjuvad sel juhul koondatud jõud  $F_i = 2ap/(n + 1)$ . Iga jõud  $F_i$  põhjustab pinge  $\sigma_y(F_i)$ . Seega, rakendades superpositsiooni printsiipi, avaldub  $n + 1$  jõust põhjustatud pinge summana  $\sigma_y = \sum_{i=0}^n \sigma_y(F_i)$ .
  - Valem (5.127) on mõeldud pingete arvutamiseks vahetult vundamendi all ning seetõttu pole seal koordinaati  $y$ .

5.16. Näide: joonkoormuse mõju poolruumile

5 - 90

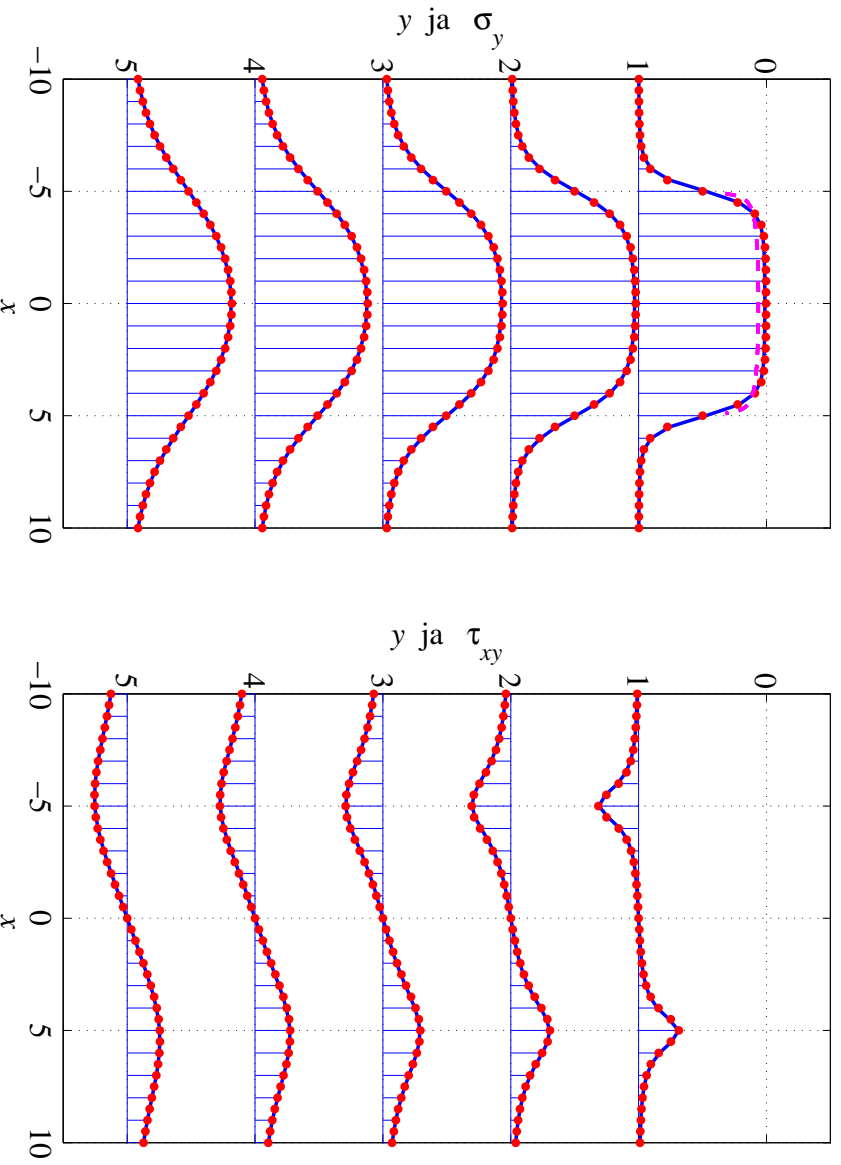
- Tulemused on esitatud joonistel 5.36–5.38. Joonisel 5.36 on osalõikude arv  $n = 100$ , joonisel 5.37  $n = 20$  ja joonisel 5.38  $n = 10$ . Puna- ja sinise joonistuse vahel on näha erinevusi. Violettne kriipsjoon valemile (5.127) ja sinine pidev joon valemile (5.123)<sub>2</sub>.
- 2. Nihkepinge  $\tau_{xy}$  arvutamiseks saab kasutada valemeid (5.126) või (5.123)<sub>3</sub>.
  - Valem (5.126) abil leida pinge  $\tau_{xy}$  väärtusi iga  $y$  ja  $x$  jaoks.
  - Analooogiliselt normaalpingega  $\sigma_y$ , tuleb valem (5.123)<sub>3</sub> rakendamiseks lõik  $-5 \leq x \leq 5$  jagada  $n$  võrdseks osalõiguks ja joonkoormus  $n + 1$  koondatud jõuks. Kokku saame nüüd  $\tau_{xy} = \sum_{i=0}^n \tau_{xy}(F_i)$ .
  - Tulemused on esitatud joonistel 5.36–5.38. Joonisel 5.36 on osalõikude arv  $n = 100$ , joonisel 5.37  $n = 20$  ja joonisel 5.38  $n = 10$ . Puna- ja sinise joonistuse vahel on näha erinevusi. Violettne kriipsjoon valemile (5.123)<sub>3</sub>.



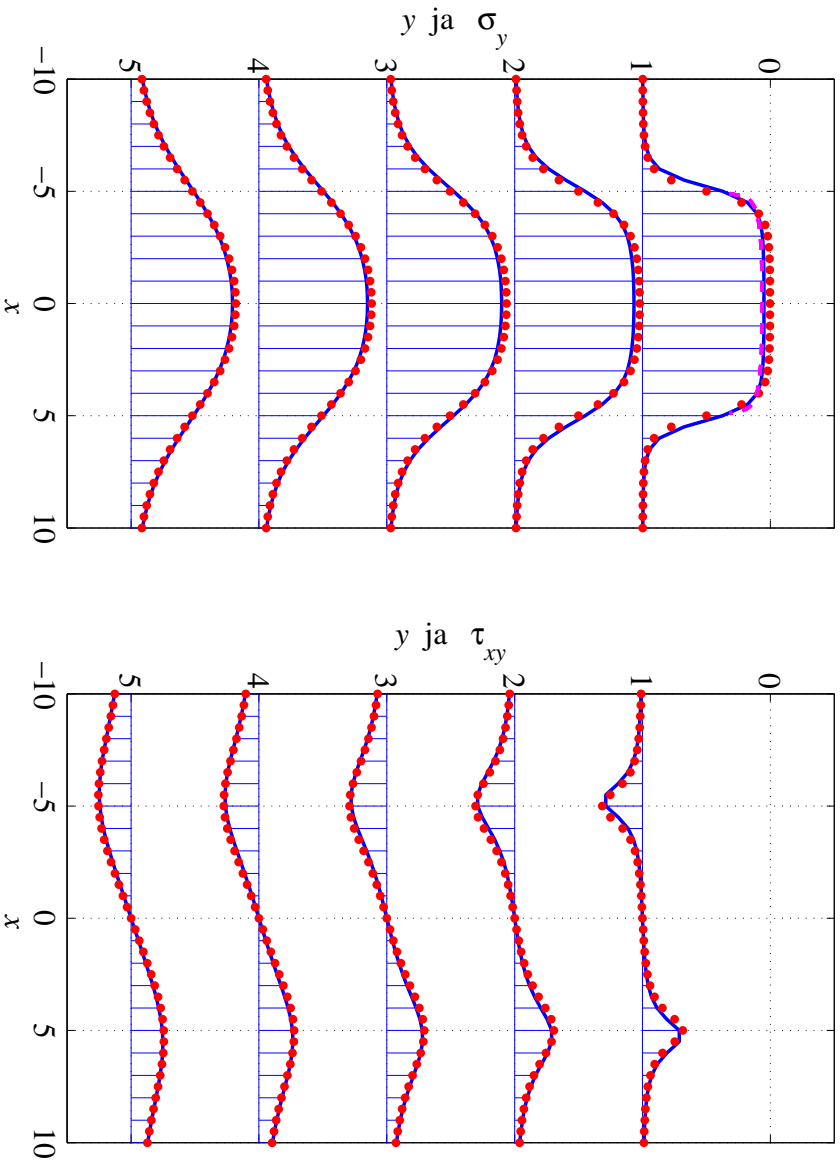
3. Normaalsingele  $\sigma_x$  arvutamiseks saab kasutada valemeid (5.124) või (5.123)<sub>1</sub>.
  - Valemite (5.124) ja (5.123)<sub>1</sub> kasutamise põhimõtted on samad, mis eelnevatel juhtudel.
  - Tulemused on esitatud joonistel 5.39–5.41. Joonisel 5.39 on osalõikude arv  $n = 100$ , joonisel 5.40  $n = 20$  ja joonisel 5.41  $n = 10$ . Punane punktiirjoon vastab valemile (5.124) ja sinine pidev joon valemile (5.123)<sub>1</sub>.
4. Joonistel 5.42–5.44 on lisaks esitatud samapingejooned pingetele  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$  piirkonnas  $-10 \leq x \leq 10$ ,  $0 < y \leq 5$ .

5.16. Näide: joonkoormuse mõju poolruumile

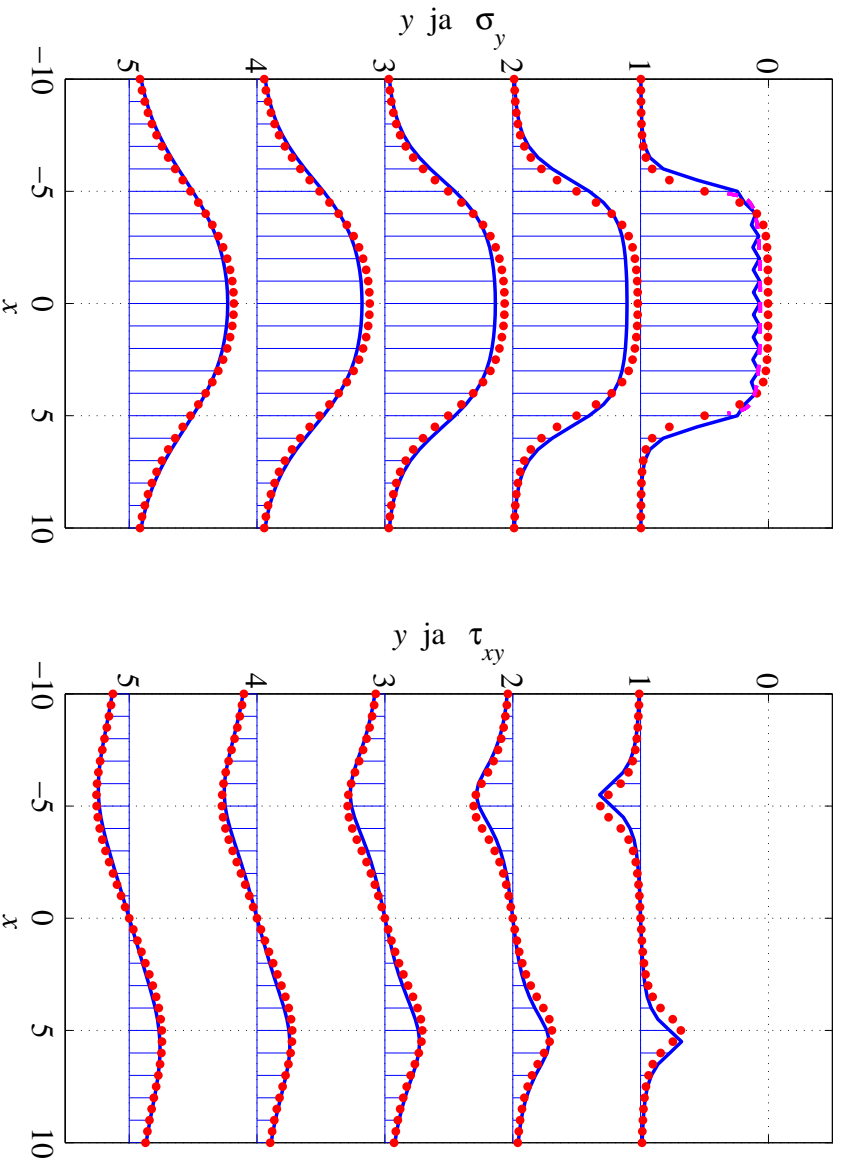
5 - 92



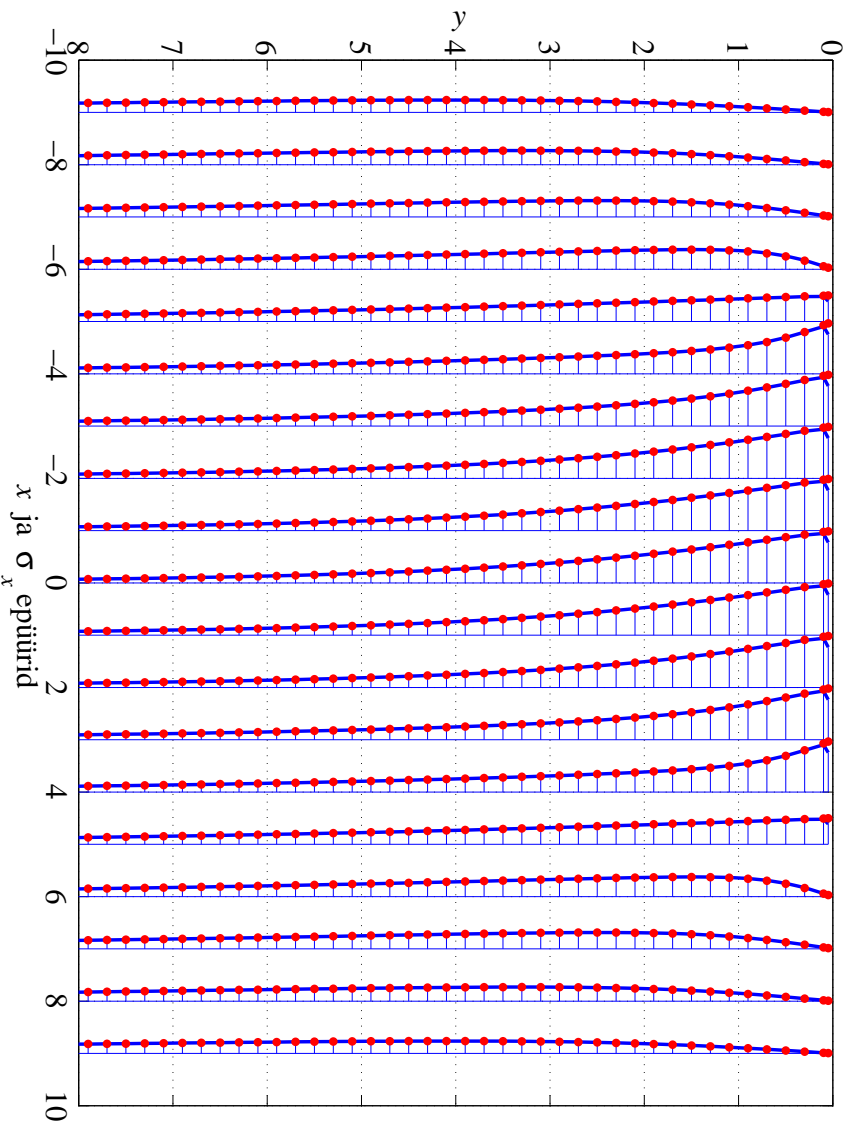
Joonis 5.36: Normaalsingele  $\sigma_y$  ja nihkesingele  $\tau_{xy}$  eptüürid koordinaadi  $y$  fikseeritud väärtuste jaoks lõigul  $-5 \leq x \leq 5$  mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv  $n = 100$ .



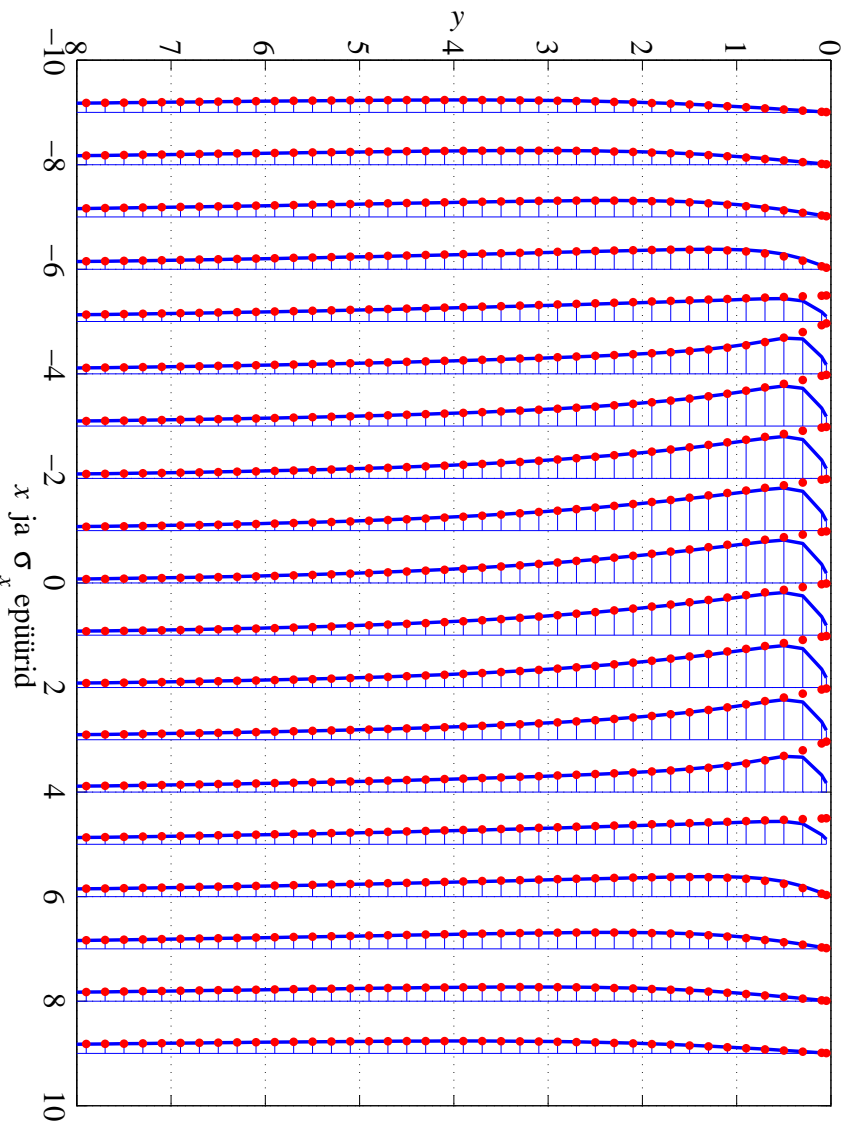
Joonis 5.37: Normaapinge  $\sigma_y$  ja nihkepinge  $\tau_{xy}$  epiütid koordinaadi  $y$  fikseeritud väärtuste jaoks lõigul  $-5 \leq x \leq 5$  mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv  $n = 20$ .



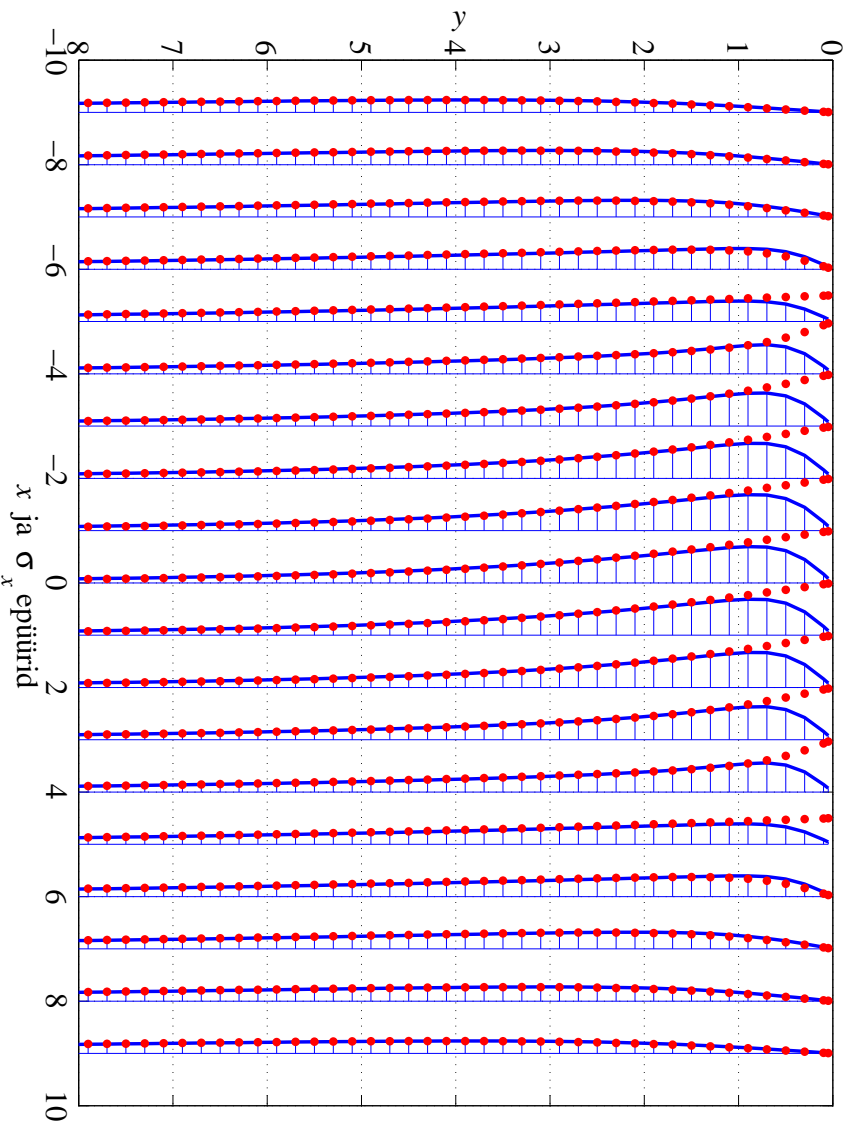
Joonis 5.38: Normaapinge  $\sigma_y$  ja nihkepinge  $\tau_{xy}$  epiütid koordinaadi  $y$  fikseeritud väärtuste jaoks lõigul  $-5 \leq x \leq 5$  mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv  $n = 10$ .



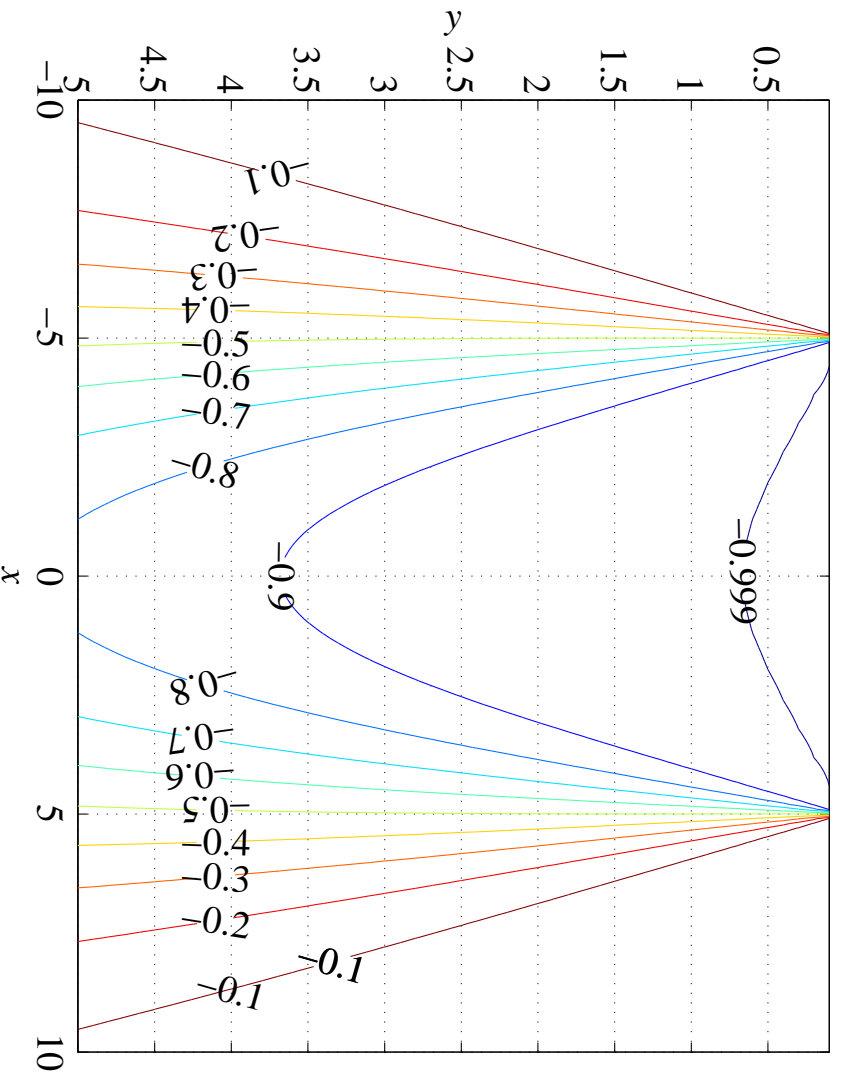
Joonis 5.39: Normaapinge  $\sigma_x$  epüürid koordinaadi  $x$  fikseeritud väärtuste jaoks lõigul  $-5 \leq x \leq 5$  mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv  $n = 100$ .



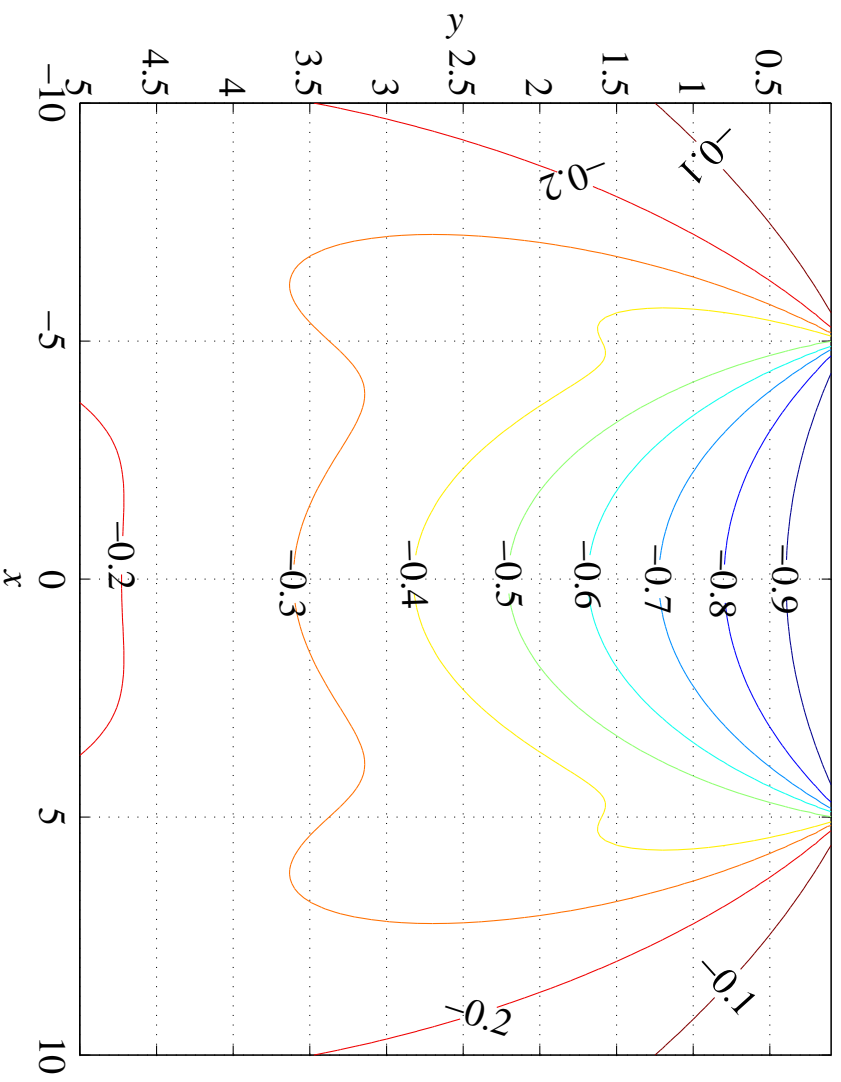
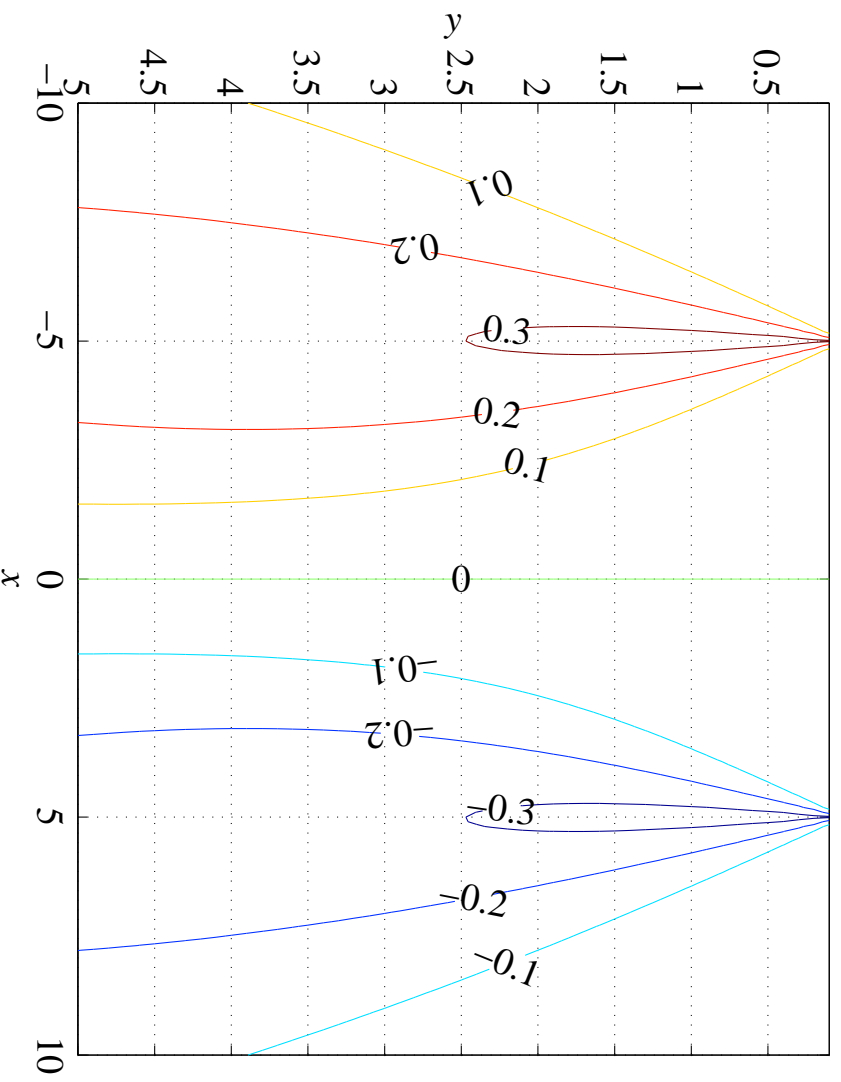
Joonis 5.40: Normaapinge  $\sigma_x$  epüürid koordinaadi  $x$  fikseeritud väärtuste jaoks lõigul  $-5 \leq x \leq 5$  mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv  $n = 20$ .



Joonis 5.41: Normaapinge  $\sigma_x$  epiüürid koordinaadi  $x$  fikseeritud väärtuste jaoks lõigul  $-5 \leq x \leq 5$  mõjuva tihklise joonkoormuse korral, osalõikude arv  $n = 10$ .



Joonis 5.42: Samapingejooned normaapinge  $\sigma_y$  jaoks.

Joonis 5.43: Samapingejooned normaapinge  $\sigma_x$  jaoks.Joonis 5.44: Samapingejooned nihkepinge  $\tau_{xy}$  jaoks.