Peatükk 7

Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades

Mõningaid selliseid ülesandeid oleme juba eespool vaadelnud (näiteks alajaotused 5.11 ja 5.12). Käesoleva peatüki kahes esimeses paragrahvis vaadeldakse telgsümmeetriliste ülesannete lahendamist Love'i pingefunktsiooni ja Legendre'i polünoomide abil vabalt toetatud ümarplaadi paindeülesande näitel. Saadud lahendid on lineaarse elastsusteooria mõttes täpsed lahendid, st. lahendamisel lähtutakse elastsusteooria põhivõrranditest. Sellisele lähenemisviisile «vastandub» nn. 0-järku teooria, mille korral lähtutakse tala elastse joone või plaadi elastse pinna võrranditest. Sellist lähenemist ümarplaadi paindeülesande lahendamisele vaatleme kolmandas paragrahvis.

7.1 Üldvõrrandid

Käesolevas alajaotuses leiavad käsitlemist ülesanded, kus ei esine väänet. Silindriliste koordinaatide (r, ϑ, z) puhul tähendab see seda, et vastavatest siirdekomponentidest $v = 0$ ja komponendid u ja w ei sõltu koordinaadist ϑ. Seega ka pingekomponendid ei sõltu koordinaadist ϑ ja kaks neist $\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = 0$.

Nullist erinevad deformatsioonikomponendid avalduvad kujul

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \tag{7.1}$$

Tasakaaluvõrrandid saavad aga kuju

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + R = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0, \end{cases} \tag{7.2}$$

kus R ja Z on koordinaatide r ja z sihiliste mahujõudude intensiivsus (dimensioon $\mathrm{N/m^3}$). Paljudel juhtudel on jällegi otstarbekas tuua sisse pingefunktsioon φ, mida siin nimetatakse Love'i pingefunktsiooniks.

Tasakaaluvõrrandid on rahuldatud kui valida

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu \nabla^2 \varphi - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right), \quad \sigma_\vartheta = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu \nabla^2 \varphi - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\right), \\ \sigma_z = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2 \varphi - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right], \quad \tau_{rz} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2 \varphi - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right]. \end{cases} \tag{7.3}$$

Siinjuures peab φ rahuldama biharmoonilist võrrandit

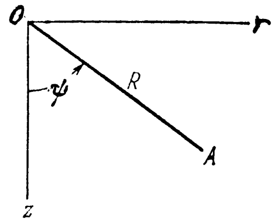
$$\nabla^4 \varphi = 0, \tag{7.4}$$

kus

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7.5}$$

on Laplace'i operaator silindrilistes koordinaatides. Kuna antud juhul ei sõltu φ koordinaadist ϑ, siis langeb Laplace'i operaatoris (7.5) kolmas liige välja. Siirdekomponendid u ja w määratakse avaldistega

$$2Gu = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad v = 0, \quad 2Gw = 2(1-\nu)\nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{7.6}$$



Joonis 7.1: Sfäärilised koordinaadid.

Mõnel juhul on silindriliste koordinaatide asemel mõistlik kasutada sfäärilisi koordinaate, st., r ja z asemel kasutatakse koordinaate R ja ψ. Nüüd on vaja (7.5)-s asendada osatuletised r ja z järgi. See üleminek on omakorda analoogne DRK x ja y ja polaarkoordinaatide r ja ϑ vahelisele seosele. Saame

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial R^2} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial R} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \psi^2}, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} = \dfrac{1}{R\sin\psi}\left(\dfrac{\partial}{\partial R}\sin\psi + \dfrac{\cos\psi}{R}\dfrac{\partial}{\partial\psi}\right) = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial R} + \dfrac{\cot\psi}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial\psi}. \end{cases} \tag{7.7}$$

Seega omab biharmooniline võrrand (7.4) silindriliste koordinaatide puhul kuju

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \varphi = 0 \tag{7.8}$$

ja sfääriliste puhul

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot\psi}{R^2}\frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right)^2 \varphi = 0. \tag{7.9}$$

Võrrandi (7.9) lahend peab samal ajal rahuldama ka Laplace'i võrrandit, st,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R} + \frac{\cot\psi}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} = 0. \tag{7.10}$$

Viimase erilahendit võib otsida kujul

$$\varphi_n = R^n \Psi_n, \tag{7.11}$$

kus Ψ_n on vaid muutuja φ funktsioon. Kokku saame viimasest kahest hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{1}{\sin\psi}\frac{d}{d\psi}\left(\sin\psi\frac{d\Psi_n}{d\psi}\right) + n(n+1)\Psi_n = 0. \tag{7.12}$$

Kui tähistame $x = \cos\psi$ ja valime x uueks sõltumatuks muutujaks, siis saame (7.12)-st Legendre'i võrrandi

$$(1 - x^2)\frac{d^2\Psi_n}{dx^2} - 2x\frac{d\Psi_n}{dx} + n(n+1)\Psi_n = 0. \tag{7.13}$$

Selle võrrandi lahendid on esitatavad Legendre'i polünoomide $P_n(x)$ kaudu:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \ldots, \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n. \end{cases} \tag{7.14}$$

Neid polünoome võib kasutada funktsioonidena Ψ_n avaldises (7.11) kusjuures igat neist võib veel korrutada konstandiga A_n.

Kasutades valemeid

$$x = \cos\psi, \quad Rx = z \quad \text{ja} \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \tag{7.15}$$

saab minna tagasi muutujatele r ja z. Seejuures saab võrrandi (7.9) lahend kuju

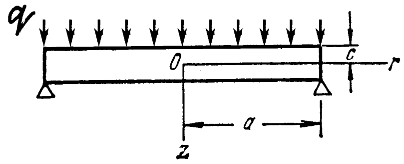
$$\begin{cases} \varphi_0 = A_0, \quad \varphi_1 = A_1 z, \\ \varphi_2 = A_2\left[z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2)\right], \\ \varphi_3 = A_3\left[z^3 - \frac{3}{5}z(r^2 + z^2)\right], \\ \varphi_4 = A_4\left[z^4 - \frac{6}{7}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2\right], \\ \varphi_5 = A_5\left[z^5 - \frac{10}{9}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21}(r^2 + z^2)^2\right], \\ \ldots. \end{cases} \tag{7.16}$$

Toodud polünoomid on ka biharmoonilise võrrandi (7.4) lahendiks.

Saab näidata, et kui $R^n\Psi_n$ osutub harmoonilise võrrandi (7.10) lahendiks, siis $R^{n+2}\Psi_n$ rahuldab biharmoonilist võrrandit (7.4) (kuid ei rahulda (7.10)) Korrutades (7.16) $R^2 = r^2 + z^2$, saame uued lahendid

$$\begin{cases} \varphi_2 = B_2(r^2 + z^2), \\ \varphi_3 = B_3 z(r^2 + z^2), \\ \varphi_4 = B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2), \\ \varphi_5 = B_5(2z^3 - 3r^2 z)(r^2 + z^2), \\ \dots . \end{cases} \tag{7.17}$$

7.2 Ümarplaadi paine



Joonis 7.2: Sümmeetriliselt jaotatud põikkoormusega koormatud ja servadest vabalt toetatud ümarplaat.

Vaatleme sümmeetriliselt koormatud ümarplaati (joonis 7.2). Valides avaldistest (7.16) ja (7.17) kolmandat järku polünoomid, saame pingefunktsiooni esitada kujul

$$\varphi = A_3(2z^3 - 3r^2 z) + B_3(r^2 z + z^3). \tag{7.18}$$

Avaldiste (7.3) põhjal saame seejärel pingekomponendid kujul

$$\begin{cases} \sigma_r = -6A_3 + (10\nu - 2)B_3, \\ \sigma_\vartheta = -6A_3 + (10\nu - 2)B_3, \\ \sigma_z = -12A_3 + (14 - 10\nu)B_3, \\ \tau_{rz} = 0. \end{cases} \tag{7.19}$$

Seega osutuvad pingekomponendid kogu plaadi ulatuses konstantseteks. Valemites (7.19) olevate konstantide A_3 ja B_3 määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi σ_r ja σ_z jaoks. Kokkuvõttes: kolmandat järku polünoomide abil saab esitada lahendi, mis vastab olukorrale, kus plaadi pinnale on rakendatud telgsümmeetrilised konstantsed koormused.

Valides (7.16) ja (7.17) neljandat järku polünoomid, saame pingekomponentide jaoks avaldised

$$\begin{cases} \sigma_r = 96A_4 z + 4B_4(14\nu - 1)z, \\ \sigma_z = -192A_4 z + 4B_4(16 - 14\nu)z, \\ \tau_{rz} = 96A_4 r - 2B_4(16 - 14\nu)r. \end{cases} \tag{7.20}$$

Kui võtta $96A_4 - 2B_4(16 - 14\nu) = 0$, saame

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{ja} \quad \sigma_r = 28(1+\nu)B_4 z, \tag{7.21}$$

mis esitab plaadi puhast painet juhul kui ta servadesse on rakendatud ühtlaselt jaotatud momendid.

Ühtlaselt jaotatud koormusele allutatud plaadi lahendi saamiseks lähtutakse kuuendat järku polünoomidest. Vastavatele pingetele (mida siin ei esita, kuid mis sisaldavad konstante A_6 ja B_6) lisatakse lahend (7.20) juhul $B_4 = 0$ ja z-telje sihiline ühtlane tõmme $\sigma_z = b$ lahendist (7.19). Seega tuleb rajatingimustest

$$\begin{cases} \sigma_z = 0, \quad z = c; \qquad \sigma_z = -q, \quad z = -c; \\ \tau_{rz} = 0, \quad z = \pm c; \end{cases} \tag{7.22}$$

määrata neli konstanti A_6, B_6, A_4 ja b.

Kokku saame

$$\begin{cases} \sigma_r = q\left[\dfrac{2+\nu}{8}\dfrac{z^3}{c^3} - \dfrac{3(3+\nu)}{32}\dfrac{r^2 z}{c^3} - \dfrac{3}{8}\dfrac{z}{c}\right], \\ \sigma_z = q\left[-\dfrac{z^3}{4c^3} + \dfrac{3}{4}\dfrac{z}{c} - \dfrac{1}{2}\right], \\ \tau_{rz} = -\dfrac{3qr}{8c^3}(c^2 - z^2). \end{cases} \tag{7.23}$$

Valemite (7.23) puhul on huvitav see, et esitatav pingejaotus on analoogiline pingete σ_y ja τ_{xy} jaotusega kitsa ristkülikulise tala puhul (võrdle valem (5.66) lk. 5-47). Tala valemite puhul tuleb arvestada, et sisse on toodud inertsimoment $I = 2c^3/3$. Radiaalsed pinged on esitatud paaritu funktsioonina koordinaadist z ja annavad servas ühtlaselt jaotatud paindemomendi.

Et saada lahendit servast vabalt toetatud plaadi jaoks, lisame pingeavaldistele (7.23) lahendi (7.21) ja määrame konstandi B_4 rajatingimusest

$$\int_{-c}^{c} \sigma_r z dz = 0, \quad r = a. \tag{7.24}$$

Seega saab vaba toetuse puhul radiaalse normaalpinge σ_r avaldis kuju

$$\sigma_r = q\left[\frac{2+\nu}{8}\frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3+\nu)}{32}\frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3}{8}\frac{(2+\nu)}{5}\frac{z}{c} + \frac{3(3+\nu)}{32}\frac{a^2 z}{c^3}\right]. \tag{7.25}$$

Kui võtta $r = 0$, saame pinge σ_r, mis mõjub plaadi tsentris. Elementaarteooria puhul esitab pinget plaadi tsentris valem

$$\sigma_r = \frac{3(3+\nu)}{32}\frac{a^2 z}{c^3}, \tag{7.26}$$

s.o. (7.25) viimane liige. Kui plaadi paksus $2c$ on väike võrreldes raadiusega a, siis osutuvad ka «parandusliikmed» väikesteks.

Puhta painde lisamisega ja rajatingimuse (7.24) rakendamisega kõrvaldasime me küll paindemomendid vabas servas $r = a$, kuid ei vabanenud pingetest

$$\sigma_r\big|_{r=a} = q\left[\frac{2+\nu}{8}\frac{z^3}{c^3} - \frac{3}{8}\frac{(2+\nu)}{5}\frac{z}{c}\right]. \tag{7.27}$$

Nende pingete peavektor ja peamoment plaadi servas on nullid, seega tuleb lahendi täpsuse ja «kehtivuse» hindamisel rakendada Saint-Venant'i printsiipi.

Kui kasutada kuuendast kõrgemat järku polünoome, saab leida lahendeid juhtude jaoks,kus $q = q(r)$. Teist liiki Legendre'i polünoome ($Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1, \ldots$) kasutades saab leida lahendeid rõngasplaadi jaoks. Kõik need lahendid kehtivad juhul kui läbipainded on väikesed võrreldes paksusega $2c$. Suurte läbipainete puhul tuleb arvestada plaadi kesktasandi pikenemisega.

7.3 Telgsümmeetrilise plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrand.

Siin alajaotuses rakendame ristkülikplaatidega analoogilist lähenemist: paragrahvis 6.1 toodud plaatide paindeteooria hüpoteesid saavad telgsümmeetrilisel juhul kuju

$$\begin{cases} w(r,z) = w(r), \quad u(r,z) = -z\dfrac{dw(r)}{dr}, \quad \sigma_z = 0, \\ R(r,z) = 0, \quad Z(r,z) = \dfrac{3}{2h}\left(1 - \dfrac{4z^2}{h^2}\right)p(r). \end{cases} \tag{7.28}$$

Seejärel saame tasakaaluvõrranditele (7.2) kuju

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \dfrac{\sigma_\vartheta}{r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = \dfrac{3}{2h}\left(1 - \dfrac{4z^2}{h^2}\right)p(r). \end{cases} \tag{7.29}$$

Viimasest kahest võrrandist saab ellimineerida pinge τ_{rz}:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_\vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\sigma_r)}{\partial r^2} = \frac{zp}{i}, \qquad i = \frac{h^3}{12} \tag{7.30}$$

kus i on inertsimomendi intensiivsus. Elastse pinna diferentsiaalvõrrandi saamiseks tuleb nüüd deformatsioonid avaldada läbi siirete Cauchy seoste abil ning seejärel pinged deformatsioonide kaudu üldistatud Hooke'i seaduse abil. Tulemuseks on neljandat järku diferentsiaalvõrrand

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{p}{D}, \qquad D = \frac{Ei}{1-\nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{7.31}$$

Peale võrrandi (7.31) lahendamist saab leida normaalpinged

$$\begin{cases} \sigma_r = -D\left(\dfrac{d^2w}{dr^2} + \dfrac{\nu}{r}\dfrac{dw}{dr}\right)\dfrac{z}{i}, \\ \sigma_\vartheta = -D\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr} + \nu\dfrac{d^2w}{dr^2}\right)\dfrac{z}{i}. \end{cases} \tag{7.32}$$

Nihkepinge τ_{rz} saame leida võrrandi $(7.29)_1$ integreerimisel z järgi:

$$\tau_{rz} = \int \left[\frac{\sigma_\vartheta}{r} - \frac{1}{r}(r\sigma_r) \right] dz = \ldots, \tag{7.33}$$

kust peale rajatingimuste $\tau_{rz}|_{z=\pm h/2} = 0$ rahuldamist saame

$$\tau_{rz} = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} \right) \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right). \tag{7.34}$$

Analoogiliselt valemitele (6.15) on pingete ja sisejõudude vahelised seosed kujul

$$\sigma_r = \frac{M_r z}{i}, \qquad \sigma_\vartheta = \frac{M_\vartheta z}{i}, \qquad \tau_{rz} = \frac{3Q_r}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \tag{7.35}$$

kust saame

$$\begin{cases} M_r = -D \left(\dfrac{d^2 w}{dr^2} + \dfrac{\nu}{r}\dfrac{dw}{dr} \right), \\ M_\vartheta = -D \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr} + \nu \dfrac{d^2 w}{dr^2} \right), \\ Q_r = -D \left(\dfrac{d^3 w}{dr^3} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2 w}{dr^2} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{dw}{dr} \right). \end{cases} \tag{7.36}$$

Diferentsiaalvõrrandi (7.31) saab kirjutada lahendamiseks sobivamale kujule:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{ r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{D}. \tag{7.37}$$

Juhul kui $p(r) = p_o = const$ saame viimasest

$$w(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 + \frac{p_o r^4}{64D}. \tag{7.38}$$

Konstantide $C_1, \ldots, C_4$ määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi $w(r)$, $dw(r)/dr$, $M_r(r)$, $M_\vartheta(r)$ või $Q_r(r)$ jaoks. Vastavad avaldised omavad kuju

$$\begin{cases} \dfrac{dw(r)}{dr} = 2C_1 r \ln r + C_1 r + 2C_2 r + \dfrac{C_3}{r} + \dfrac{p_o r^3}{16D}, \\ M_r(r) = -D\left[2C_1(1+\nu)\ln r + C_1(3+\nu) + 2C_2(1+\nu) - \dfrac{C_3(1-\nu)}{r^2}\right] - \\ \qquad - (3+\nu)\dfrac{p_o r^2}{16}, \\ M_\vartheta(r) = -D\left[2C_1(1+\nu)\ln r + C_1(1+3\nu) + 2C_2(1+\nu) + \dfrac{C_3(1-\nu)}{r^2}\right] - \\ \qquad - (1+3\nu)\dfrac{p_o r^2}{16}, \\ Q_r(r) = -\dfrac{4DC_1}{r} - \dfrac{p_o r}{2}. \end{cases} \tag{7.39}$$

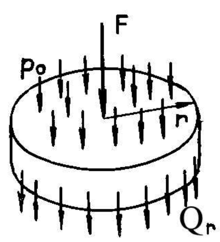
Suurustest (7.38) ja (7.39) on välisserval teada tavaliselt kaks. Rõngasplaadi puhul lisandub siseservas veel kaks tingimust, mis kokku võimaldavad määrata neli konstanti. Ümar- ehk ringplaatide korral peab konstant $C_3 = 0$ — vastasel korral poleks siirded plaadi keskel lõplikud suurused, sest $\ln r \to -\infty$ kui $r \to 0$. Samas, $r^2 \ln r \to 0$, kui $r \to 0$.

Konstandi C_1 määramiseks kasutame tingimust, et mööda suvalist kontsentrilist ringjoont mõjuv põikjõud peab tasakaalustama selle ringjoone sees mõjuva koormuse.

- *Ühtlane koormus p_o.* Eeldades nii p kui Q_r jaoks positiivsed suunad (vt. joonis), saame

$$2\pi r Q_r + \pi r^2 p_o = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{p_o r}{2}. \tag{7.40}$$

Seega $(7.39)_4$ põhjal peab $C_1 = 0$.



- *Tsentris mõjuv koondatud jõud F.* Nüüd

$$2\pi r Q_r + F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{F}{2\pi r}. \tag{7.41}$$

Võttes avaldises $(7.39)_4$ koormuse $p_o = 0$ saame

$$Q_r = -\frac{4DC_1}{r} = -\frac{F}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{F}{8D\pi}. \tag{7.42}$$

7.4 Ümar- ja rõngasplaatide käitumine erinevate koormusskeemide ja toetusviiside korral.

7.4.1 Rajatingimused

- jäik kinnitus

$$w = 0, \qquad \frac{dw}{dr} = 0; \tag{7.43}$$

- vaba toetus

$$w = 0, \qquad M_r = 0; \tag{7.44}$$

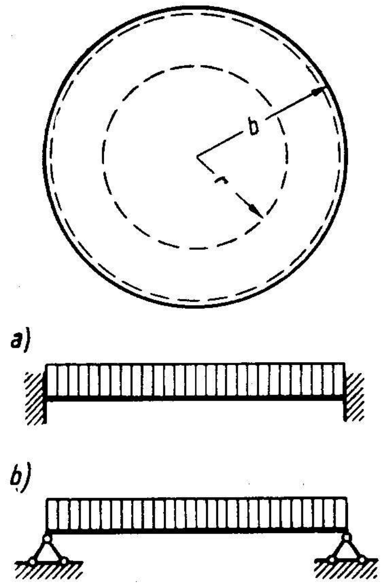
- vaba serv

$$M_r = 0, \qquad Q_r = 0. \tag{7.45}$$

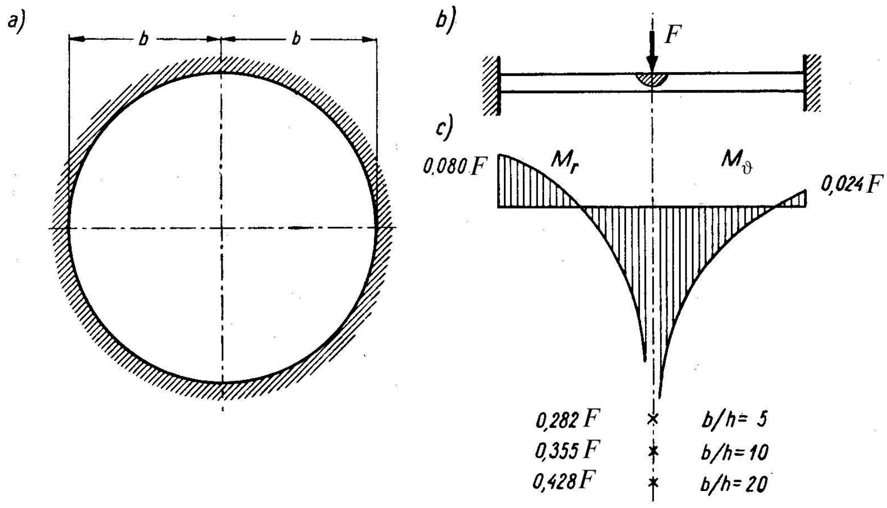
7.4.2 Ühtlaselt jaotatud koormusega ümarplaat (vt. joonis 7.3).

Konstandid $C_1 = C_3 = 0$ ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\begin{cases} w(r) = C_2 r^2 + C_4 + \dfrac{p_o r^4}{64D}. \\ \dfrac{dw(r)}{dr} = 2C_2 r + \dfrac{p_o r^3}{16D}, \\ M_r(r) = -2DC_2(1+\nu) - (3+\nu)\dfrac{p_o r^2}{16}, \\ M_\vartheta(r) = -2DC_2(1+\nu) - (1+3\nu)\dfrac{p_o r^2}{16}, \\ Q_r(r) = -\dfrac{p_o r}{2}. \end{cases} \tag{7.46}$$



Joonis 7.3: Ühtlaselt koormatud ümarplaadi paine.



Joonis 7.4: Koondatud jõuga koormatud ümarplaadi paine.

a) Jäik kinnitus (vt. joonis 7.3 a))

Rajatingimused plaadi välisservas $r = b$ on antud kujul $w = 0$ ja $dw/dr = 0$. Kasutades viimaseid, saame määrata konstandid C_2 ja C_4:

$$C_2 = -\frac{p_o b^2}{32D}; \qquad C_4 = \frac{p_o b^4}{64D}. \tag{7.47}$$

Seega saavad siirete ja paindemomentide avaldised (7.46) lõpuks kuju

$$\begin{cases} w(r) = \dfrac{p_o}{64D}\left(b^2 - r^2\right)^2, \\ M_r(r) = \dfrac{p_o}{16}\left[b^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)\right], \\ M_\vartheta(r) = \dfrac{p_o}{16}\left[b^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)\right]. \end{cases} \tag{7.48}$$

Vastavad ekstremaalsed väärtused

$$\begin{cases} r = 0: \quad w = \dfrac{p_o}{64D}b^4, \quad M_r = M_\vartheta = \dfrac{p_o b^2}{16}(1+\nu), \\ r = b: \quad M_r = -\dfrac{p_o}{8}b^2, \quad M_\vartheta = -\dfrac{p_o \nu}{8}b^2. \end{cases} \tag{7.49}$$

Pinged. Vastavalt valemitele (7.49) ja (7.48) *paindepinged*[1] *plaadi keskel*

$$\sigma_r\big|_{r=0} = \sigma_\theta\big|_{r=0} = \frac{3}{8}(1+\nu)p_0\left(\frac{b}{2c}\right)^2 \tag{7.50}$$

ja plaadi servas

$$\sigma_r\big|_{r=b} = -\frac{3}{4}p_0\left(\frac{b}{2c}\right)^2, \qquad \sigma_\theta\big|_{r=b} = \nu\,\sigma_r\big|_{r=b}\,. \tag{7.51}$$

Pingete suhe servas ja keskel Poisson'i teguri $\nu = 1/3$ korral

$$\left|\frac{\sigma_r\big|_{r=b}}{\sigma_r\big|_{r=0}}\right| = 1,5. \tag{7.52}$$

[1] Pingete-momentide vaheline seos: $\sigma = 12Mz/(2c)^3$, $\sigma_{\max} = 6M/(2c)^2$, $2c$ on plaadi paksus. Vt. ka A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

b) Vaba toetus (vt. joonis 7.3 b))

Kasutades rajatingimusi plaadi välisservas $r = b$ kujul $w = 0$ ja $M_r = 0$ saame määrata konstandid

$$C_2 = -\frac{3+\nu}{1+\nu}\cdot\frac{p_o b^2}{32D}, \qquad C_4 = \frac{3+\nu}{1+\nu}\cdot\frac{p_o b^4}{32D} - \frac{p_o b^4}{64D}. \tag{7.53}$$

Pannes need väärtused avaldistesse (7.46) saame

$$\begin{cases} w(r) = \dfrac{p_o(b^2-r^2)}{64D}\left(b^2\dfrac{5+\nu}{1+\nu} - r^2\right), \\ M_r(r) = \dfrac{p_o(3+\nu)}{16}(b^2-r^2), \\ M_\vartheta(r) = \dfrac{p_o}{16}\left[b^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)\right]. \end{cases} \tag{7.54}$$

Ekstremaalsed väärtused on plaadi keskel, st.,

$$r = 0: \qquad w = \frac{5+\nu}{1+\nu}\cdot\frac{p_o b^4}{64D}, \qquad M_r = M_\vartheta = \frac{p_o(3+\nu)}{16}b^2. \tag{7.55}$$

Pinged. Järgnevate avaldiste tuletuskäike vaata A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

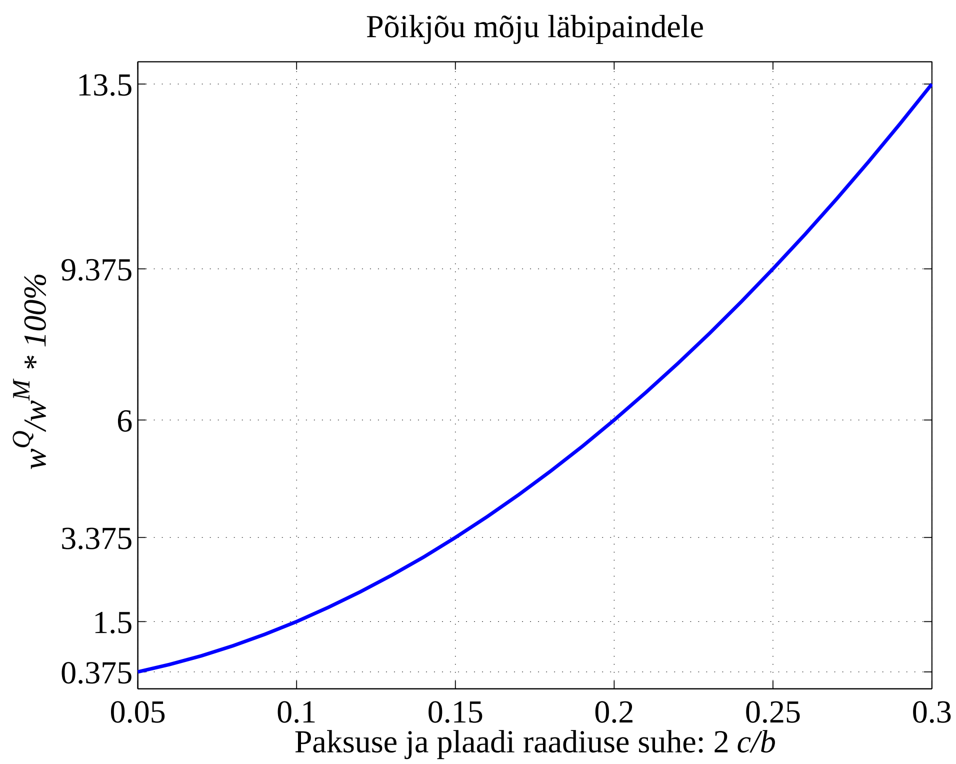
- *Maksimaalne pinge plaadi keskel*

$$\sigma_r\big|_{r=0} = \sigma_\theta\big|_{r=0} = \frac{3}{8}(3+\nu)p_0\left(\frac{b}{2c}\right)^2 . \tag{7.56}$$

- *Põikjõu mõju läbipaindele.* Põikjõust põhjustatud läbipainde w^Q ja paindemomendist põhjustatud läbipainde w^M suhe

$$\frac{w^Q}{w^M} = 1,5\left(\frac{2c}{b}\right)^2 . \tag{7.57}$$

Seega, mida suurem on plaadi paksuse suhe raadiusse, seda suuremat osatähtsust omab põikjõust põhjustatud läbipaine. Näiteks $2c/b = 0,1$ korral $w^Q/w^M = 0,015 = 1,5\%$, kuid $2c/b = 0,2$ korral juba $w^Q/w^M = 0,06 = 6\%$ (vt. joon. 7.5).



Joonis 7.5: Põikjõust põhjustatud läbipainde w^Q ja paindemomendist põhjustatud läbipainde w^M suhe (protsentides) sõltuvana plaadi paksuse ja raadiuse suhtest.

Kahe toetusviisi maksimaalsete pingete võrdlus. Poissoni tegur $\nu = 1/3$, ülemine indeks «j» tähistab jäika kinnitust ja «vt» vaba toetust.

$$\frac{\sigma_r^{\mathrm{vt}}\big|_{r=0}}{\sigma_r^{\mathrm{j}}\Big|_{r=0}} = 2,5; \qquad \frac{\left|\sigma_r^{\mathrm{vt}}\big|_{r=0}\right|}{\sigma_r^{\mathrm{j}}\Big|_{r=b}} = 1,667. \tag{7.58}$$

7.4.3 Keskel koondatud jõuga koormatud ümarplaat (vt. joonis 7.4).

Konstandid $C_1 = F/(8D\pi)$ ning $C_3 = 0$ ja avaldised (7.38) ja (7.39) saavad kuju

$$\begin{cases} w(r) = \dfrac{F}{8D\pi} r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_4, \\ \dfrac{dw(r)}{dr} = \dfrac{F}{8D\pi} r\,(2\ln r + 1) + 2C_2 r, \\ M_r(r) = -\,D\left\{\dfrac{F}{8D\pi}\left[2(1+\nu)\ln r + (3+\nu)\right] + C_2(1+\nu)\right\}, \\ M_\vartheta(r) = -\,D\left\{\dfrac{F}{8D\pi}\left[2(1+\nu)\ln r + (1+3\nu)\right] + C_2(1+\nu)\right\}, \\ Q_r(r) = -\,\dfrac{F}{2\pi r}. \end{cases} \tag{7.59}$$

a) Jäik kinnitus (vt. joonis 7.4)

Konstandid C_2 ja C_4 määratakse rajatingimustest $w = 0$ ja $dw/dr = 0$ plaadi välisservas $r = b$. Tulemus on

$$C_2 = -\frac{F(2\ln b + 1)}{16D\pi}, \qquad C_4 = \frac{Fb^2}{16D\pi}. \tag{7.60}$$

Siirded ja paindemomendid (7.59) saavad seejärel kuju

$$\begin{cases} w(r) = \dfrac{F}{16D\pi}\left(2r^2 \ln\dfrac{r}{b} - r^2 + b^2\right), \\ M_r(r) = -\dfrac{F}{4\pi}\left[1 + (1+\nu)\ln\dfrac{r}{b}\right], \\ M_\vartheta(r) = -\dfrac{F}{4\pi}\left[\nu + (1+\nu)\ln\dfrac{r}{b}\right]. \end{cases} \tag{7.61}$$

Plaadi servas $r = b$ paindemomendid

$$M_r = -\frac{F}{4\pi}, \qquad M_\vartheta = -\frac{F\nu}{4\pi}. \tag{7.62}$$

Läbipaine plaadi keskel on lõplik, st.

$$w = \frac{Fb^2}{16D\pi}, \qquad \text{sest} \qquad \lim_{r\to 0} r^2 \ln\frac{r}{b} = 0. \tag{7.63}$$

Paindemomendid ei oma aga keskel lõplikke väärtusi: kui $r \to 0$ siis $\ln \to -\infty$ ning $M_r \to \infty$ ja $M_\vartheta \to \infty$. Täpsemad arvutused koormuse rakenduspunkti ümbruses ($3 - 4$ plaadi paksust) paksude plaatide teooria põhjal näitavad, et pinged ületavad voolavuspiiri vaid plaadi surutud osas — koormuse rakenduspunkti ümbruses tekib lokaalne voolamine. Plaadi tõmmatud kihtides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{F}{h^2}(1+\nu)\left(0,485\ln\frac{b}{h} + 0,52\right) \tag{7.64}$$

ning neile saab vastavusse seada nn. fiktiivsed paindemomendid

$$M_r = M_\vartheta = \frac{F}{6}(1+\nu)\left(0,485\ln\frac{b}{h} + 0,52\right). \tag{7.65}$$

Vt. joonis 7.4, kus on toodud paindemomentide epüürid juhul $\nu = 0,3$. Ristikestega on tähistatud fiktiivsete paindemomentide väärtused kolme erineva raadiuse–paksuse suhte b/h joaks. Kokkuvõttes pole olukord ohtlik kuni pinged (7.64) jäävad lubatud piiridesse.

b) Vaba toetus

Rajatingimused välisserval $r = b$ on $w = M_r = 0$, kust leiame

$$C_2 = -\frac{F}{16D\pi(1+\nu)}\left[2(1+\nu)\ln b + 3 + \nu\right], \qquad C_4 = \frac{Fb^2(3+\nu)}{16D\pi(1+\nu)}. \tag{7.66}$$

Siirded ja paindemomendid (7.59) saavad seejärel kuju

$$\begin{cases} w(r) = \dfrac{F}{16D\pi(1+\nu)}\left[(3+\nu)\left(b^2 - r^2\right) + 2(1+\nu)r^2\ln\dfrac{r}{b}\right], \\ M_r(r) = -\dfrac{F(1+\nu)}{4\pi}\ln\dfrac{r}{b}, \\ M_\vartheta(r) = -\dfrac{F(1+\nu)}{4\pi}\left(\ln\dfrac{r}{b} + 1 + \nu\right). \end{cases} \tag{7.67}$$

Ekstremaalne läbipaine plaadi keskel on lõplik

$$w = \frac{Fb^2(3+\nu)}{16D\pi(1+\nu)}. \tag{7.68}$$

Paindemomendid plaadi keskel on aga avaldiste (7.67) põhjal lõpmata suured (kui $r \to 0$ siis $\ln \to -\infty$ ning $M_r \to \infty$ ja $M_\vartheta \to \infty$).

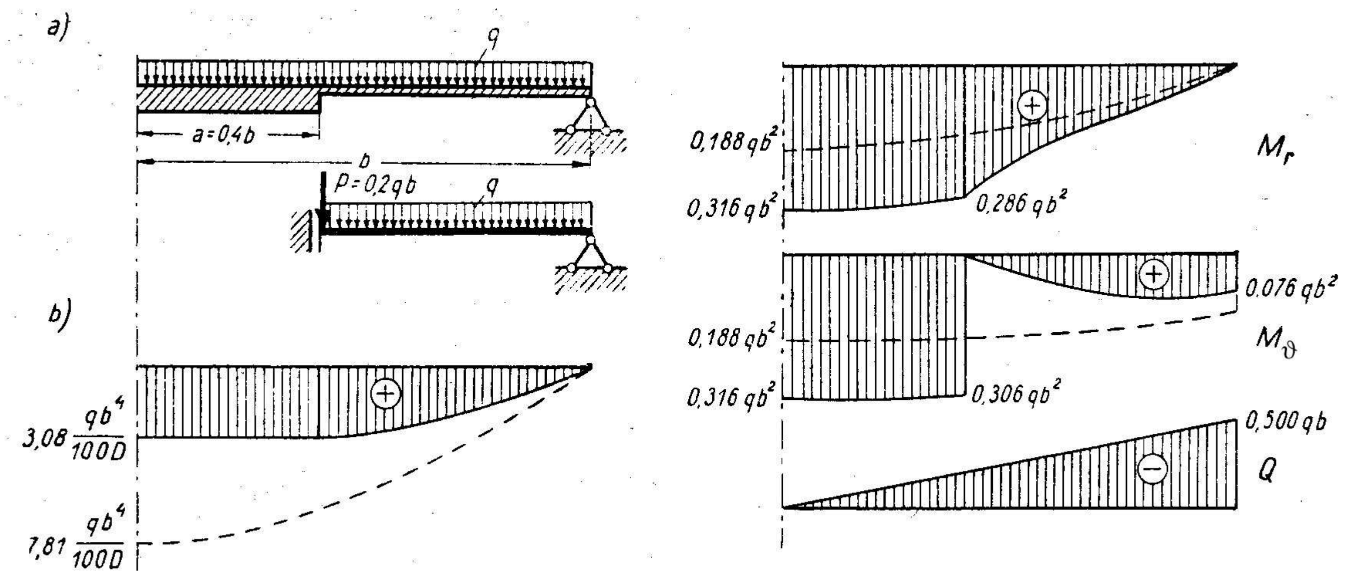
Analoogiliselt jäiga kinnitusega näitab ka siin täpsem uuring, et koormuse rakenduspunkti lähedal tekib lokaalne plastne tsoon kuid plaadi tõmmatud kihtides omavad pinged lõplikku väärtust

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{F}{h^2}\left[(1+\nu)\left(0,485\ln\frac{b}{h} + 0,52\right) + 0,48\right]. \tag{7.69}$$

Ka sel juhul pole olukord ohtlik kuni pinged (7.69) jäävad lubatud piiridesse.

7.4.4 Rõngasplaat

a) Jäiga südamikuga ümarplaat.



Joonis 7.6: Ühtlaselt koormatud rõngasplaadi paine. NB! Joonisel q, meil p_o!

Vaatleme vabalt toetatud astmelist ümarplaati, mille keskmise osa jäikus on suur võrreldes välise osaga (vt. joonis 7.6). Seetõttu käitub väline, st. väikese jäikusega osa kui rõngasplaat. Plaadile mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega p_o. Lihtsuse mõttes eeldame, et sisemise osa raadius $a = 0,4b$ ja $\nu = 0$. Lisaks toome sisse nn. dimensioonita raadiuse $\rho = r/b$.

Rajatingimused:

$$\begin{cases} \text{välisserv, } \rho = 1: \begin{cases} w = 0, \\ M_r = 0; \end{cases} \\ \text{siseserv, } \rho = 0,4: \begin{cases} \dfrac{dw}{dr} = 0, \\ Q = -0,2bp_o, \quad \text{sest } |Q \cdot 2\pi a| = \left|\pi a^2 p_o\right|. \end{cases} \end{cases} \tag{7.70}$$

Kasutades viimaseid koos avaldistega (7.38) ja (7.39) saame määrata konstandid $C_1, \ldots, C_4$.

Saadud konstantide asendamisel võrrandiesse (7.38) ja (7.39) saame siirete ja sisejõudude avaldised välise osa jaoks:

$$\left\{\begin{aligned} w &= p_o b^4 \left(1,562\rho^4 - 8,151\rho^2 + 2,448\ln\rho + 6,589,\right)/100D \\ \frac{dw}{dr} &= p_o b^3 \left(6,250\rho^3 - 16,302\rho + 2,448/\rho\right)/100D, \\ M_r &= p_o b^2 \left(-18,750\rho^2 + 2,448/\rho^2 + 16,302\right)/100, \\ M_\vartheta &= p_o b^2 \left(-6,250\rho^2 - 2,448/\rho^2 + 16,302\right)/100, \\ Q &= -0,500 p_o b\rho. \end{aligned}\right. \tag{7.71}$$

Plaadi keskmine, st. jäigem osa, arvutatakse vastavalt ümarplaadi valemitele.

Siirete ja sisejõudude epüürid on toodud joonisel 7.6. Vasakpoolne alumine joonis esitab läbipainde epüüri ja parempoolsed sisejõudusid. Kriipsjoonega on esitatud ühtlase paksusega plaadi siirete ja sisejõudude epüürid. On näha, et keskmise osa jäikuse suurendamine vähendab küll läbipaindeid, kui samas suurendab paindemomente nii jäigastatud kui jäigastamata osas. Kuna sellega kaasneb ka pingete kasv, siis ei saa sellist tüüpi konstruktsiooni lugeda heaks.

Kui plaadi keskmise osa jäikus pole suur võrreldes äärmise osaga, siis on arvutus keerulisem, sest plaati tuleb vaadelda kui tervikut, võttes arvesse paksuse hüppelist muutust. Tuleb koostada siirete avaldised plaadi mõlema osa jaoks. Need avaldised sisaldavad 8 konstanti, millest kaks keskmisele osale vastavat on nullid. Ülejäänud 6 määratakse rajatingimustest välisserval, st. $\rho = 1$ on $w = M_r = 0$ ja pidevustingimustest siirete w ja sisejõudude Q, M_r ning M_ϑ jaoks kohal $r = a$.

b) Välisservast jäigalt kinnitatud ja siseservast vaba rõngasplaat.

Jäigalt kinnitatud välisservas $r = b$ peavad $w = 0$ ja $dw/dr = 0$. Vabas siseservas $r = a$ aga $M_r = 0$ ja $Q = 0$. Kasutades selliseid rajatingimusi saame avaldistest (7.38) ja (7.39) neli võrrandit konstantide $C_1, \ldots, C_4$ määramiseks.

Kui konstandid on leitud saame omakorda leida siirete ja sisejõudude avaldised, milledest siinkohal esitame vaid siirete oma:

$$\begin{cases} w = \dfrac{p_o a^4}{64D}\left[-1 + 2(1-k-2\beta^2)(1-\rho^2) + \rho^4 - 4k\ln\rho - 8\beta^2\rho^2\ln\rho\right], \\ \rho = \dfrac{r}{a}, \qquad \beta = \dfrac{b}{a}, \\ k = \dfrac{(1-\nu)\beta^2 + (1+\nu)(1+4\beta^2\ln\beta)}{(1-\nu)+(1+\nu)\beta^2}\beta^2. \end{cases} \tag{7.72}$$

Kokkuvõte. Rõngasplaatide korral on võimalikud väga mitmed jäiga kinnituse, vaba toetuse ja vaba serva kombinatsioonid. Kõigi nende puhul tuleb lähtudes avaldistest (7.38) ja (7.39) ning konkreetsetest rajatingimustest (7.43)–(7.45) koostada võrrandisüsteem konstantide $C_1, \ldots, C_4$ määramiseks. Seejärel saadakse siirete ja sisejõudude avaldised.

7.4.5 Ümarplaadi paindeülesande lahendeid

Järgnevasse tabelisse[2] on koondatud mitmed praktilist tähtsust omavad ümarplaadi paindeülesande lahendid. Vaatluse all on järgmised juhud:

1. Koormus: ühtlaselt mööda serva jaotunud moment M; serv vabalt toetatud (või vaba).
2. Koormus: ühtlaselt mööda ringjoont raadiusega c jaotunud joonkoormus P_1; serv vabalt toetatud.
3. Koormus: tentrist kaugusel c mõjuv koondatud jõud P. Läbipaine w on vabalt toetatud serva korral ligikaudselt sama, mis juhul 2 ja jäigalt kinnitatud serva korral ligikaudu sama, mis juhul 6.
4. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0; serv vabalt toetatud.
5. Koormus: ühtlaselt üle ringi (raadiusega c) jaotunud koormus p_0; serv vabalt toetatud.
6. Koormus: ühtlaselt mööda ringjoont raadiusega c jaotunud joonkoormus P_1; serv jäigalt kinnitatud.

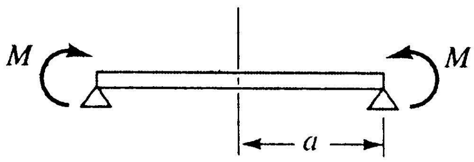
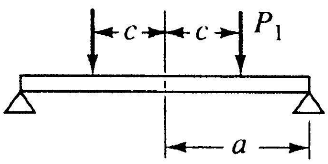
[2] Tabel on pärit õpikust A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

7. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0; serv jäigalt kinnitatud.
8. Koormus: ühtlaselt üle ringi (raadiusega c) jaotunud koormus p_0; serv jäigalt kinnitatud.

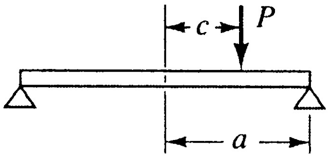
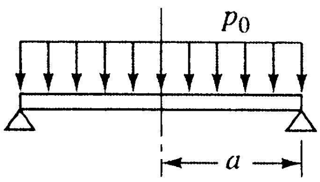
Kasutatud tähistused:

- a — plaadi raadius,
- t — plaadi paksus,
- p_0 — ühtlaselt jaotunud koormus (dim $p_0 = \mathrm{N/m^2}$),
- P_1 — joonkoormus (dim $P_1 = \mathrm{N/m}$), mis on ühtlaselt jaotunud mööda ringjoont raadiusega c,
- P — koondatud jõud (dim $P = \mathrm{N}$),
- M — ühtlaselt mööda plaadi välisserva jaotunud momentkoormus (dim $M = \mathrm{N}$),
- σ — maksimaalne paindepinge,
- w — läbipaine plaadi keskel,
- θ — plaadi keskpinna kaldenurk plaadi servas,
- ν — Poisson'i tegur,
- E — Youngi moodul (elastsusmoodul).

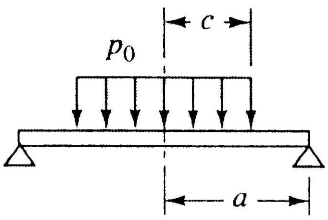
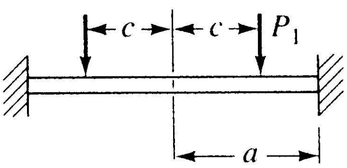
Tabel 7.1: Valemid ümarplaadi paindel ilmnevate maksimaalsete pingete, läbipainete ja kaldenurkade arvutamiseks.

Nr.	Toetusviis ja koormuse skeem	$\sigma_{\max}$, $w_{\max}$, $\theta_{\max}$
1.	Edge simply supported (or no support); load uniform along edge 	$\sigma = 6\dfrac{M}{t^2}$ (uniform) $w = 6(1-\nu)\dfrac{Ma^2}{Et^3}$ $\theta = 12(1-\nu)\dfrac{Ma}{Et^3}$
2.	Edge simply supported; load uniform along a circle of radius c 	$\sigma = \dfrac{3}{2}\dfrac{P_1 c}{t^2}\left[(1-\nu)\left(1-\dfrac{c^2}{a^2}\right)+2(1+\nu)\ln\dfrac{a}{c}\right]$ (at center) $w = \dfrac{3(1-\nu)}{2}\dfrac{P_1 c}{Et^3} \times\left[(3+\nu)(a^2-c^2)-2(1+\nu)c^2\ln\dfrac{a}{c}\right]$ $\theta = 6(1-\nu)\dfrac{P_1 ac}{Et^3}\left(1-\dfrac{c^2}{a^2}\right)$

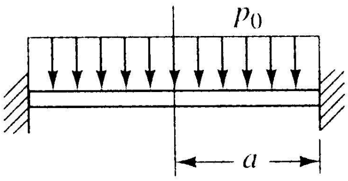
Tabel 7.1: *jätkub*

Nr.	Toetusviis ja koormuse skeem	$\sigma_{\max}$, $w_{\max}$, $\theta_{\max}$
3.	Concentrated load at a distance c from the center 	Deflection w at center approximately same as Case 2 for edge simply supported, and same as Case 6 for edge fixed.
4.	Edge simply supported; load uniform 	$\sigma = \frac{3(3+\nu)}{8}\frac{p_0 a^2}{t^2}$ (at center) $w = \frac{3(1-\nu)(5+\nu)}{16}\frac{p_0 a^4}{Et^3}$ $\theta = \frac{3(1-\nu^2)}{2}\frac{p_0 a^3}{Et^3}$

Tabel 7.1: *jätkub*

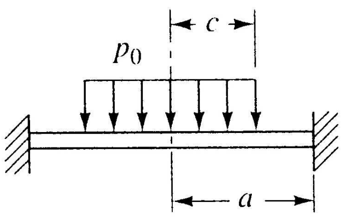
Nr.	Toetusviis ja koormuse skeem	$\sigma_{\max}$, $w_{\max}$, $\theta_{\max}$
5.	Edge simply supported; uniform load on circular area of radius c 	$\sigma = \frac{3}{8}\frac{p_0 c^2}{t^2}\left[4 - (1-\nu)\frac{c^2}{a^2} + 4(1+\nu)\ln\frac{a}{c}\right]$ (at center) $w = \frac{3(1-\nu)}{16}\frac{p_0 c^2}{Et^3} \times \left[4(3+\nu)a^2 - (7+3\nu)c^2 - 4(1+\nu)c^2\ln\frac{a}{c}\right]$ $\theta = \frac{3(1-\nu)}{2}\frac{p_0 a c^2}{Et^3}\left(2 - \frac{c^2}{a^2}\right)$
6.	Edge fixed; load uniform along a circle of radius c 	$\sigma = \frac{3(1+\nu)}{2}\frac{P_1 c}{t^2}\left(\frac{c^2}{a^2} + 2\ln\frac{a}{c} - 1\right)$ (at center) $\sigma = 3\frac{P_1 c}{t^2}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$ (at edge) $w = \frac{3(1-\nu^2)}{2}\frac{P_1 c}{Et^3}\left(b^2 - c^2 - 2c^2\ln\frac{a}{c}\right)$

Tabel 7.1: *jätkub*

Nr.	Toetusviis ja koormuse skeem	$\sigma_{\max}$, $w_{\max}$, $\theta_{\max}$
7.	Edge fixed; load uniform 	$\sigma = \frac{3}{4}\frac{p_0 a^2}{t^2}$ (at edge) $w = \frac{3(1-\nu^2)}{16}\frac{p_0 a^4}{Et^3}$

Juhul kui pladi paksus $t > 0,1a$, siis annab nn. modifitseeritud paindeteooria läbipaineks

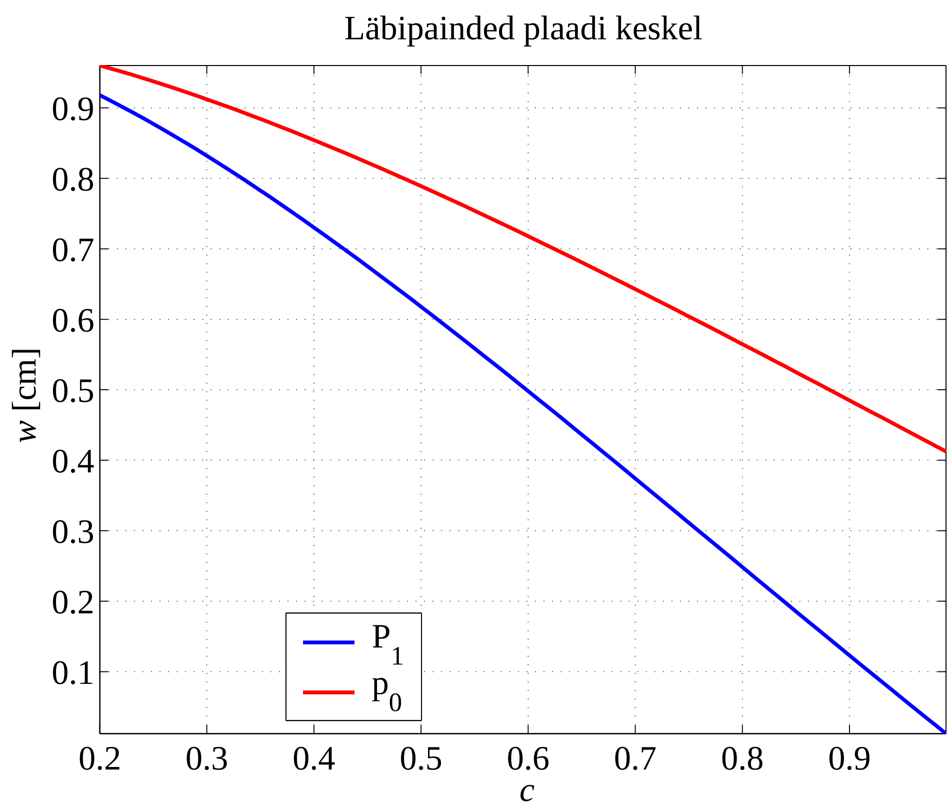
$$w = \frac{3\alpha(1-\nu^2)}{16}\frac{p_0 a^4}{Et^3}, \qquad \alpha = 1 + 5.72\left(\frac{t}{a}\right)^2.$$

8.	Edge fixed; load uniform over a circular area of radius c 	$\sigma = \frac{3(1+\nu)}{8}\frac{p_0 c^2}{t^2}\left(\frac{c^2}{a^2} + 4\ln\frac{a}{c}\right)$ (at center) $\sigma = \frac{3}{4}\frac{p_0 c^2}{t^2}\left(2 - \frac{c^2}{a^2}\right)$ (at edge) $w = \frac{3(1-\nu^2)}{4}\frac{p_0 c^2}{Et^3}\left(a^2 - \frac{3}{4}c^2 - c^2\ln\frac{a}{c}\right)$

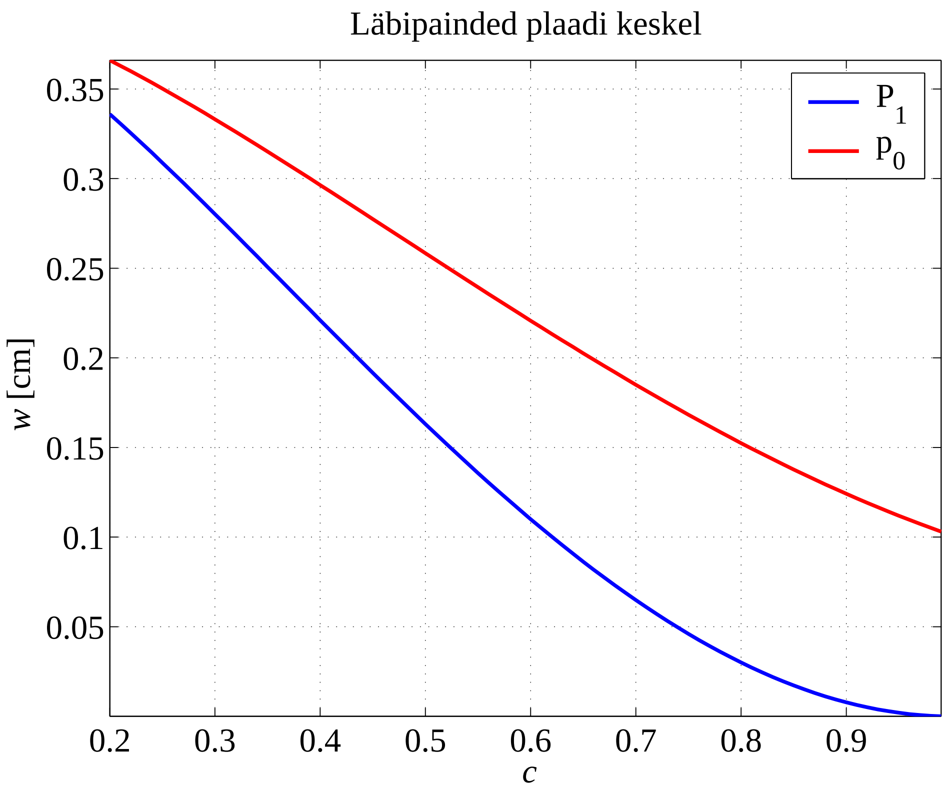
Järeldused

- Kõigil vaadeldud juhtudel on nii pinge kui läbipaine võrdeline rakendatud koormusega: suurendades (fikseeritud koormusskeemi korral) koormust 2 korda, suurenevad nii pinge kui läbipaine samuti 2 korda.
- Kõigil vaadeldud juhtudel on pinge pöördvõrdeline paksuse ruuduga: vähendades (fikseeritud koormusskeemi korral) plaadi paksust 2 korda, suureneb pinge $2^2 = 4$ korda ja vastupidi.
- Kõigil vaadeldud juhtudel on läbipaine pöördvõrdeline paksuse kuubiga: vähendades (fikseeritud koormusskeemi korral) plaadi paksust 2 korda, suureneb läbipaine $2^3 = 8$ korda ja vastupidi.
- Juhtudel 4 ja 7 on pinge võrdeline plaadi raadiuse ruuduga ja läbipaine plaadi raadiuse neljanda astmega.
- Juhtudel 2, 5, 6 ja 8 sõltub nii pinge kui läbipaine raadiusest c. Kuna vastavad sõltuvused on mittelineaarsed, siis on mõistlik esitada nad graafiliselt.

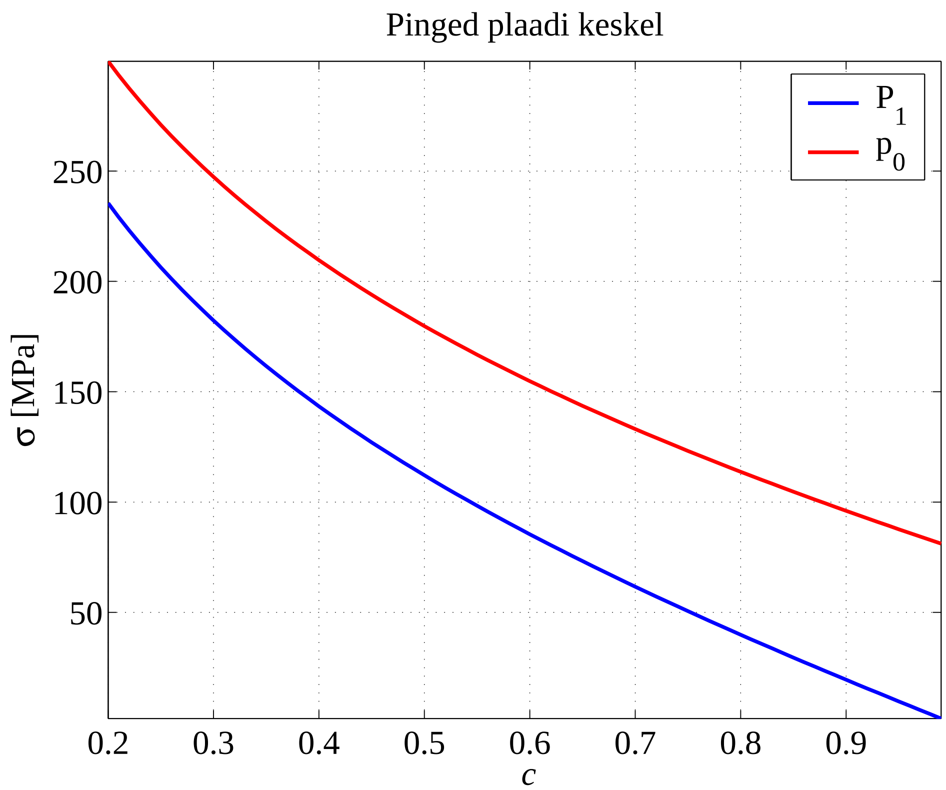
- Joonistel 7.7–7.12 esitatud graafikute koostamisel kasutati järgmisi andmeid: plaadi raadius $a = 1$; plaadi paksus $t = 0,05$; koormuse mõju määrava ringjoone raadius $0,2 \leq c \leq 0,99$; ühtlaselt jaotunud koormus $p_0 = F/(\pi c^2)$; joonkoormus $P_1 = F/(2\pi c)$; summaarne koormus $F = 500$kN oli fikseeritud; Youngi moodul $E = 210$GPa; Poisson'i tegur $\nu = 1/3$.
- Joonisel 7.7 on esitatud vabalt toetatud ja joonisel 7.8 jäigalt kinnitatud ümarplaadi läbipainete graafikud.
- Joonisel 7.9 on esitatud pinged plaadi keskel vabalt toetatud ja joonisel 7.10 jäigalt kinnitatud ümarplaadi jaoks.
- Joonisel 7.11 on esitatud pinged jäigalt kinnitatud plaadi servas.
- Joonisel 7.12 on esitatud jaotatud koormuste P_1 ja p_0 ja raadiuse c vahelise sõltuvuse graafikud fikseeritud F jaoks.



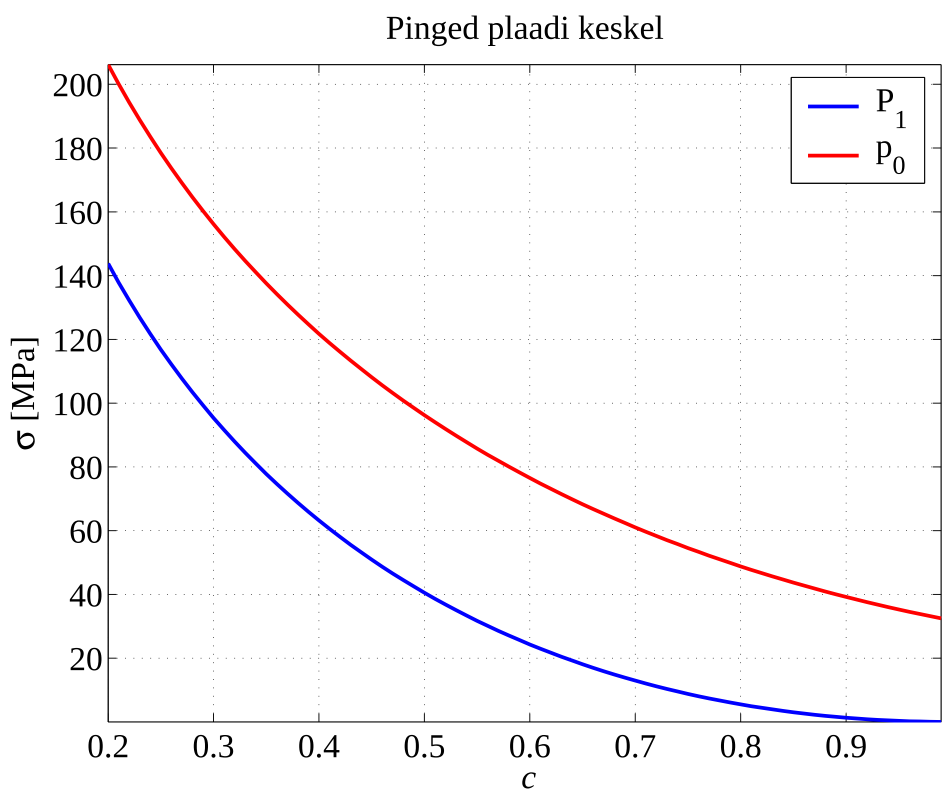
Joonis 7.7: Vabalt toetatud ümarplaadi läbipainete ja raadiuse c vaheline sõltuvus summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.



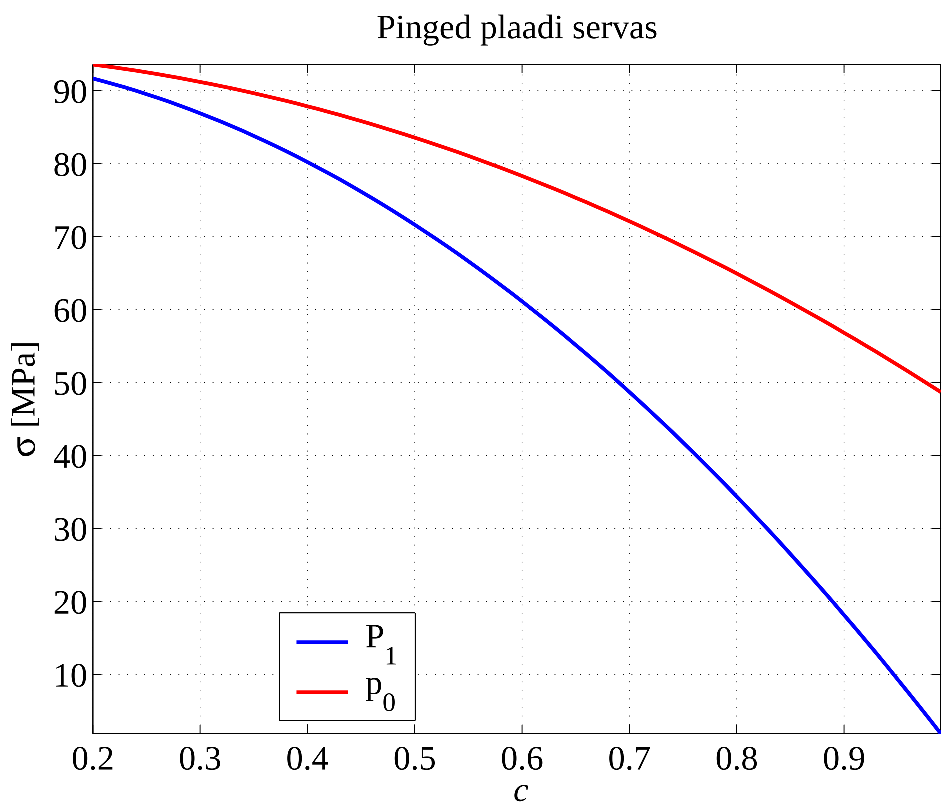
Joonis 7.8: Jäigalt kinnitatud ümarplaadi läbipainete ja raadiuse c vaheline sõltuvus summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.



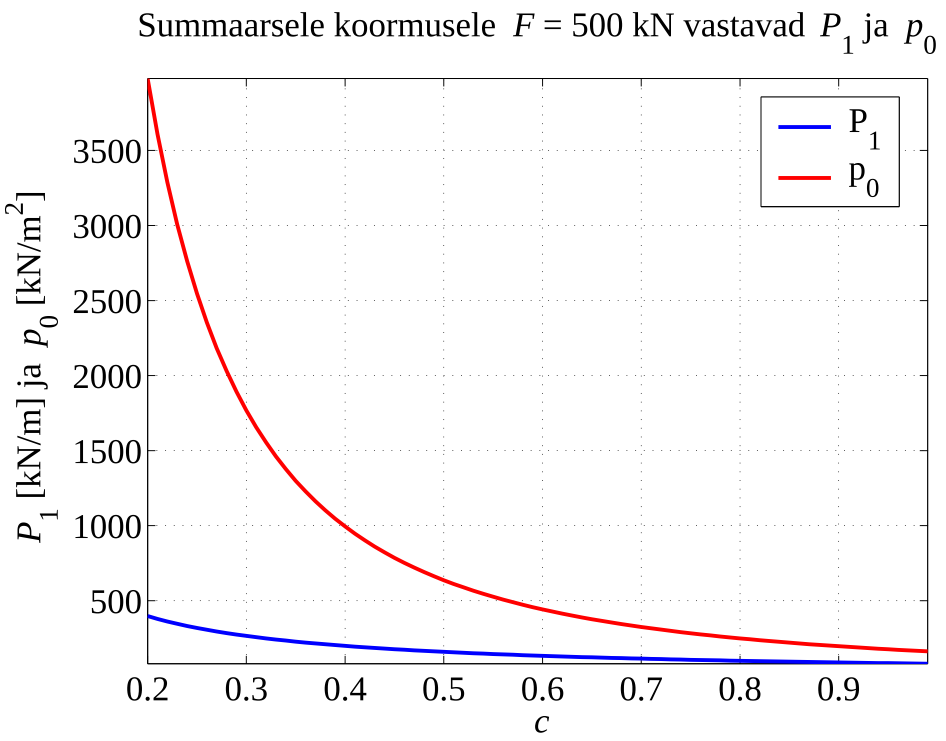
Joonis 7.9: Pinged vabalt toetatud ümarplaadi keskel sõltuvana raadiusest c summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.



Joonis 7.10: Pinged jäigalt kinnitatud ümarplaadi keskel sõltuvana raadiusest c summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.



Joonis 7.11: Pinged ümarplaadi jäigalt kinnitatud servas sõltuvana raadiusest c summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.



Joonis 7.12: Jaotatud koormused P_1 ja p_0 sõltuvana raadiusest c summaarse koormuse F fikseeritud väärtuse korral.

Märkusi koondatud jõu lokaalse mõju kohta[3]

- Plaadi keskel mõjuv koondatud jõud põhjustab määramatust pingete (ja momentide) avaldises.
- Koondatud jõud ei mõju tegelikult mitte kunagi ühes punktis, vaid ta on jaotunud üle mingi väikese pinna, mille raadiuse tähistame r_c.
- Selleks, et saada lahti koondatud jõu rakenduspunktis tekkivast määramatusest pingete (ja momentide) avaldises tuleb:

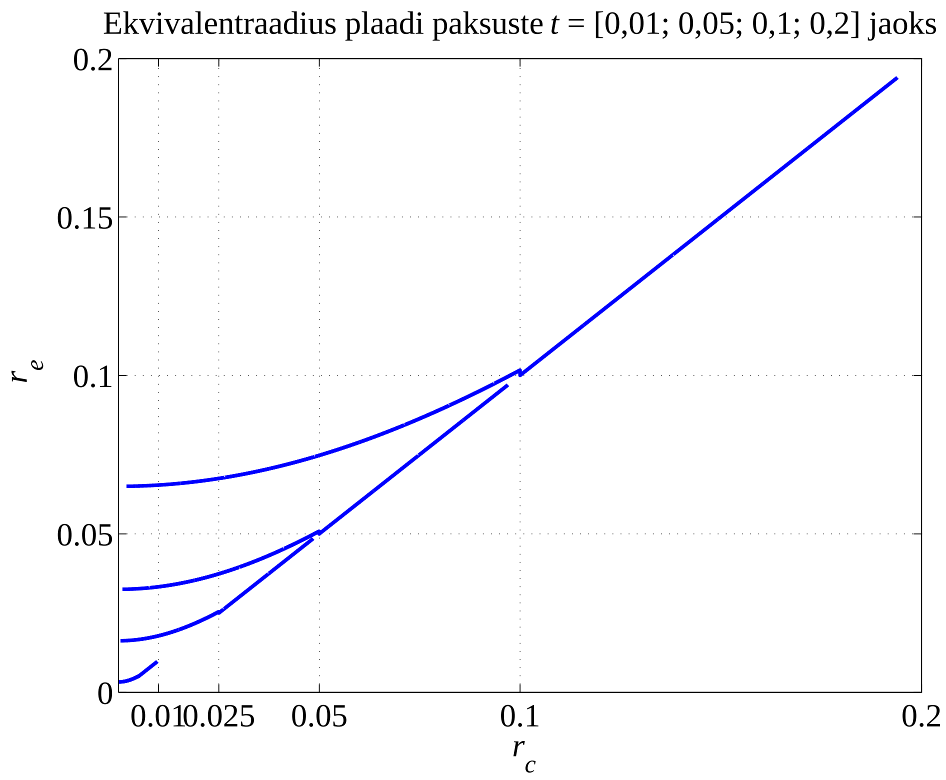
  1. raadius r_c asendada nn. ekvivalentraadiusega (vt. joonis 7.13)

  $$r_e = \begin{cases} \sqrt{1,6r_c^2 + t^2} - 0,675t, & r_c < 0,5t \,, \\ r_c, & r_c \geq 0,5t \,, \end{cases} \tag{7.73}$$

  kus t on plaadi paksus (nagu eelnevates tabelites);

  2. asendada koondatud jõud F ringis raadiusega $c = r_e$ mõjuva ühtlaselt jaotunud koormusega $p_0 = F/(\pi c^2)$ ning kasutada juhtudele 5 või 8 vastavaid valemeid.

[3] Vt. lisaks A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999



Joonis 7.13: Ekvivalentraadius r_e vastavalt valemile (7.73) nelja erineva plaadi paksuse korral. Kõverad on joonistatud $0,1t \leq r_c \leq 0,97t$ jaoks.

7.4.6 Rõngasplaadi paindeülesande lahendeid

Järgnevasse tabelisse[4] on koondatud mitmed praktilist tähtsust omavad rõngasplaadi paindeülesande lahendid. Vaatluse all on järgmised juhud:

1. Koormus: summaarne koormus P on jaotunud ühtlaselt mööda välisserva; siseserv: jäigalt kinnitatud; välisserv: vaba.
2. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0; siseserv: jäigalt kinnitatud; välisserv: vaba.
3. Koormus: summaarne koormus P on jaotunud ühtlaselt mööda välisserva; siseserv: vabalt toetatud; välisserv: vaba.
4. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0; siseserv: vabalt toetatud; välisserv: vaba.
5. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0; siseserv: vaba; välisserv: vabalt toetatud.
6. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0; siseserv: pöörded keelatud; välisserv: vabalt toetatud.

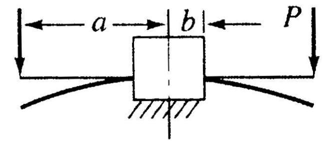
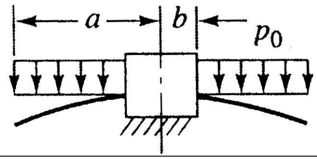
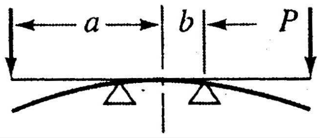
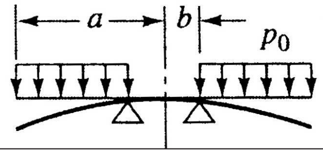
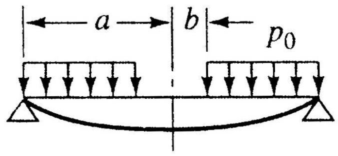
[4] Tabel on pärit õpikust A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, Boston, McGraw-Hill, 1999

7. Koormus: summaarne koormus P on jaotunud ühtlaselt mööda välisserva; siseserv: jäigalt kinnitatud; välisserv: pöörded keelatud.
8. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0; siseserv: jäigalt kinnitatud; välisserv: pöörded keelatud.
9. Koormus: summaarne koormus P on jaotunud ühtlaselt mööda siseserva; siseserv: vaba; välisserv: jäigalt kinnitatud.
10. Koormus: ühtlaselt üle kogu plaadi pinna jaotunud koormus p_0; siseserv: vaba; välisserv: jäigalt kinnitatud.

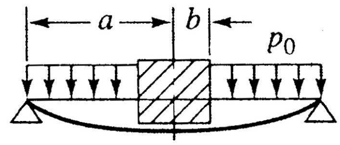
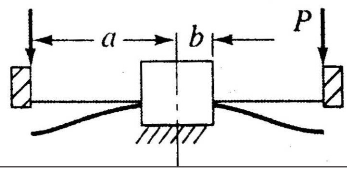
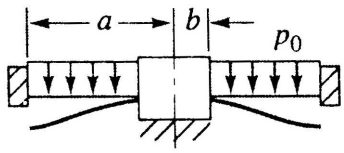
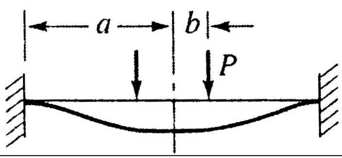
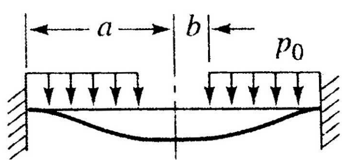
Kasutatud tähistused (NB! joonkoormuse tähistus on siin erinev võrreldes ümarplaadiga):

- a — plaadi välisraadius,
- b — plaadi siseraadius,
- t — plaadi paksus,
- P — koormus, mis on ühtlaselt jaotunud mööda sise- või välisserva (dim $P = \mathrm{N}$),
- p_0 — ühtlaselt jaotunud koormus (dim $p_0 = \mathrm{N/m^2}$),
- E — Youngi moodul (elastsusmoodul),
- $\sigma_{\max}$ — maksimaalne pinge,
- $w_{\max}$ — läbipaine sise- või välisservas.

Tabel 7.2: Valemid rõngasplaadi paindel ilmnevate pingete ja läbipainete arvutamiseks. Poisson'i tegur $\nu = 0,3$.

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	$\sigma_{\max}$	$w_{\max}$
1.	Inner edge fixed		$k_1 \dfrac{P}{t^2}$	$h_1 \dfrac{Pa^2}{Et^3}$
2.	Inner edge fixed		$k_2 \dfrac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_2 \dfrac{p_0 a^4}{Et^3}$
3.	Inner edge simply supported		$k_3 \dfrac{P}{t^2}$	$h_3 \dfrac{Pa^2}{Et^3}$
4.	Inner edge simply supported		$k_4 \dfrac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_4 \dfrac{p_0 a^4}{Et^3}$
5.	Outer edge simply supported		$k_5 \dfrac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_5 \dfrac{p_0 a^4}{Et^3}$

Tabel 7.2: *jätkub*

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	$\sigma_{\max}$	$w_{\max}$
6.	Outer edge simply supported, inner-edge rotation prevented		$k_6 \dfrac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_6 \dfrac{p_0 a^4}{Et^3}$
7.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$k_7 \dfrac{P}{t^2}$	$h_7 \dfrac{Pa^2}{Et^3}$
8.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$k_8 \dfrac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_8 \dfrac{p_0 a^4}{Et^3}$
9.	Outer edge fixed		$k_9 \dfrac{P}{t^2}$	$h_9 \dfrac{Pa^2}{Et^3}$
10.	Outer edge fixed		$k_{10} \dfrac{p_0 a^2}{t^2}$	$h_{10} \dfrac{p_0 a^4}{Et^3}$

Tabel 7.3: Konstantide k_i ja h_i väärtused sõltuvana välis- ja siseraadiuse suhtest a/b.

a/b	1.25	1.50	2.00	3.00	4.00	5.00
k_1	0.227	0.428	0.753	1.205	1.514	1.745
h_1	0.0051	0.0249	0.0877	0.209	0.293	0.350
k_2	0.135	0.410	1.04	2.15	2.99	3.69
h_2	0.0023	0.0183	0.0938	0.2925	0.448	0.564
k_3	1.10	1.26	1.48	1.88	2.17	2.34
h_3	0.341	0.519	0.672	0.734	0.724	0.704
k_4	0.66	1.19	2.04	3.34	4.30	5.10
h_4	0.202	0.491	0.902	1.220	1.300	1.310
k_5	0.592	0.976	1.440	1.880	2.080	2.19
h_5	0.1841	0.4139	0.6640	0.8237	0.8296	0.813
k_6	0.122	0.336	0.74	1.21	1.45	1.59
h_6	0.0034	0.0313	0.1250	0.291	0.417	0.492
k_7	0.115	0.220	0.405	0.703	0.933	1.13
h_7	0.0013	0.0064	0.0237	0.0619	0.0923	0.114
k_8	0.090	0.273	0.71	1.54	2.23	2.80
h_8	0.0008	0.0062	0.0329	0.1096	0.1792	0.2338
k_9	0.194	0.320	0.454	0.673	1.021	1.305
h_9	0.00504	0.0242	0.0810	0.172	0.217	0.288
k_{10}	0.105	0.259	0.480	0.657	0.710	0.730
h_{10}	0.00199	0.0139	0.0575	0.130	0.162	0.175

Järeldused:

- Mööda sise- või välisserva ühtlaselt jaotunud koormuse P korral on kõik avaldised kujul

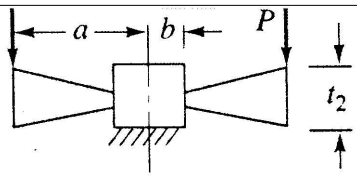
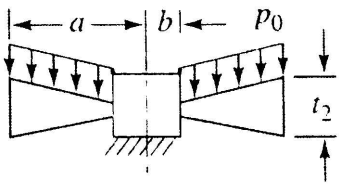
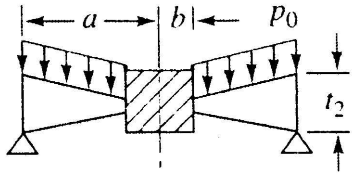
$$\sigma_{\max} = k_i \frac{P}{t^2}, \qquad w_{\max} = h_i \frac{Pa^2}{Et^3}. \tag{7.74}$$

  NB! dim $P = \mathrm{N}$

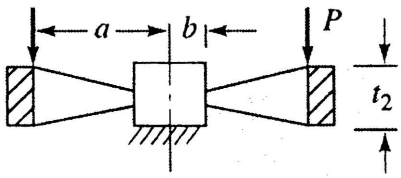
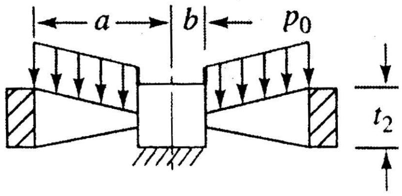
- Pindkoormuse p_0 korral on kõik avaldised kujul

$$\sigma_{\max} = k_i \frac{p_0 a^2}{t^2}, \qquad w_{\max} = h_i \frac{p_0 a^4}{Et^3}. \tag{7.75}$$

Tabel 7.4: Valemid lineaarselt muutuva ristlõikega rõngasplaadi paindel ilmnevate pingete ja läbipainete arvutamiseks. Juhtude numbrid vastavad tabelile 7.2; Poisson'i tegur $\nu = 0,3$; plaadi paksus siseservas $t_1 = bt_2/a$.

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	$\sigma_{\max}$	$w_{\max}$
1.	Inner edge fixed		$k_1 \frac{P}{a^2}$	$h_1 \frac{Pa^2}{Et_2^3}$
2.	Inner edge fixed		$k_2 \frac{p_0 a^2}{t_2^2}$	$h_2 \frac{p_0 a^4}{Et_2^3}$
6.	Outer edge simply supported, inner-edge rotation prevented		$k_6 \frac{p_0 a^2}{t_2^2}$	$h_6 \frac{p_0 a^4}{Et_2^3}$

Tabel 7.4: *jätkub*

Nr.	Toetusviis	Koormuse skeem	$\sigma_{\max}$	$w_{\max}$
7.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$k_7 \frac{P}{t_2^2}$	$h_7 \frac{Pa^2}{Et_2^3}$
8.	Inner edge fixed, outer-edge rotation prevented		$k_8 \frac{p_0 a^2}{t_2^2}$	$h_8 \frac{p_0 a^4}{Et_2^3}$

Tabel 7.5: Tabelis 7.4 esinevate konstantide k_i ja h_i väärtused sõltuvana välis- ja siseraadiuse suhtest a/b.

a/b	**1.25**	**1.50**	**2.00**	**3.00**	**4.00**	**5.00**
k_1	0.353	0.933	2.63	6.88	11.47	16.51
h_1	0.0082	0.0583	0.345	1.358	2.39	3.27
k_2	0.249	0.638	3.96	13.64	26.0	40.6
h_2	0.0037	0.0453	0.401	2.12	4.25	6.28
k_6	0.149	0.991	2.23	5.57	7.78	9.16
h_6	0.0055	0.0564	0.412	1.673	2.79	3.57
k_7	0.159	0.396	0.091	3.31	6.55	10.78
h_7	0.0017	0.0112	0.0606	0.261	0.546	0.876
k_8	0.1275	0.515	2.05	7.97	17.35	30.0
h_8	0.0011	0.0115	0.0934	0.537	1.261	2.16