

Tallinna Tehnikaülikool
Mehaanikainstituut
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

Elastusteooria

Loengukonspekt

Tallinn 2002/2003

Eessõna

Käesolev loengukonspekt põhineb autori poolt alates 1999. aastast Tallinna Tehnikaülikoolis tehnilise füüsika eriala üliõpilastele peetud elastsusteooria loengutel. Antud kursus, kus leiavad käsitlemist nii lineaarsed kui mittelineaarsed probleemid, kujutab endast jätku minu poolt loetavale pideva keskkonna mehaanika kursusele. See-ga eeldan kuulajatelt pideva keskkonna mehaanika mittelineaarse käsitluse elementaarset tundmist. Loengukonspekti esimese varian-dina tuleb vaadelda autori poolt käsitsi kirjutatud ja 1999–2000. aastani loengutel kasutatud kilesid, millest üliõpilased said endale koopiad.

Kuna tegu on õppevahendiga, mis valmis 2001/2002 õ/a kevadse-mestril ja jõudis seda ainet õppivate tudengiteni järk järgult, siis on kirjanduse loetelu esitatud sissejuhatava peatüki viimase pa-ragrahvina (mitte aga vahetult enne sisukorda nagu on kombeks fikseeritud sisuga ja kirjastatud õppevahendite puhul).

Märkused:

1. Loengukonspekt (pidevalt uuenevana) on väljas internetis mi-nu koduleheküljel <http://cens.ioc.ee/~salupere>.
2. Loengukonspekt pole mõeldud kasutamiseks iseseisva õpiku-na.

3. Teksti paremas servas olevad märgid ($\sqrt{\quad}$, \bullet , \star jne.) tähistavad kohti, kus loengus esitatakse olulisi selgitavaid märkusi.
4. Loengukonspekt võib sisaldada trükivigu.

Andrus Salupere

Peatükk 1

Sissejuhatus

Katsed on näidanud, välismõjude (pindkoormused, massjõud, soojendamise, jahutamise) toimetel võivad tahked kehad deformeeruda. Kui deformatsioonid ei ületa teatud piiri, siis välismõjude kõrvaldamisel keha taastab oma esialgse kuju. Sellist tahke keha omadust nimetatakse *elastsuseks*. **Elastsusteooria** uurib elastsete kehade deformatsioone ja liikumist. Sõltuvalt välismõjude kõrvaldamise kiirusest võivad siin kaasned teatud võnkumised. Kui deformatsioonid aga ületavad teatava piiri, siis keha algne kuju ei taastu täielikult — osa deformatsioone säilib. Neid jäävaid deformatsioone nimetatakse *plastseteks deformatsioonideks*.

Elastsusteooria püüab määrata ja hinnata

- geomeetrilisi suurusid, mis iseloomustavad keha deformatsiooni;
- pingeid (sisejõude), mis ilmnevad deformatsiooniprotsessis.

Selleks rakendatakse matemaatilise füüsika meetodeid.

Elastsusteooria põhineb pideva keskkonna mehaanikal¹. Seega on vaja sisse tuua või määrata:

- Pideva keskkonna mõiste.
- Pideva keskkonna tihedus.
- Geomeetrilised suurused, mis kirjeldavad keha deformatsioone.
- Sisejõud ja nende seos välismõjudega.
- Sisejõudude ja deformatsioonide vahelised seosed (olekuvõrrandid).

Viimased määratakse eksperimentidest — seega on tegu fenomenoloogilise teooriaga.

1.1 Kirjandus

1. A.C. Eringen. *Nonlinear Theory of Continious Media*. McCraw-Hill Book Company, New-York et al., 1962.
2. M.N.L. Narasimhan. *Principlec of Continuum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New-York et al., 1993.
3. A.C. Eringen. *Mechanics of Continua*. John Wiley & Sons, inc., New-York et al., 1967.
4. Y.C. Fung. *Foundation of Solid Mechanics*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

¹Pideva keskkonna mehaanika uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimetel.

5. Y. Başar, D. Weichert. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids: Fundamental Mathematical and Physical Concepts*. Springer, Berlin et al., 2000.
6. A.J.M. Spencer. *Continuum Mechanics. Series: Longman mathematical texts*. Longman Scientific & Thechnical, Harlow, 1988.
7. J. Salençon. *Handbook of Continuum Mechanics: General Concepts, Thermoelasticity*. Springer, Berlin et al., 2001.
8. U. Nigul, J. Engelbrecht. *Nelineinõje i lineinõje perehodnõje volnovõje protsessõ deformatsii termouprugih i uprugih tel /Mittelineaarsed ja lineaarsed deformatsioonilainete leviku üleminekuprotsessid termoelastsetes ja elastsetes kehadel/*. Tallinn, 1972 (vene keeles).
9. W. Nowacki. *Teoria uprugosti /Elastsusteooria/*. Mir, Moskva, 1975 (vene keeles).
10. S. Timošenko, J.N. Goodier. *Teoria uprugosti /Elastsusteooria/*. Nauka, Moskva, 1975 (vene keeles).

1.2 Ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhimõistetest, -hüpoteesidest ja -võrrandest.

1.2.1 Põhieeldused ja -hüpoteesid

Pidevushüpotees

Kõik kehad koosnevad osakestest, kuid meid huvitavas mahus (ruumalas) on neid palju. Seetõttu eeldame, et uuritavad *vedelikud, gaasid ja tahked kehad on sellised keskkonnad, mis täidavad vaadeldava ruumi pidevalt*. See hüpotees võimaldab nende keskkondade matemaatilisel kirjeldamisel kasutada pidevaid funktsioone.

Ruumi meetrilisus

Eeldame, et *kahe pidevas ruumis asuva punkti vaheline kaugus on alati üheselt määratav*. Eksperimendid on näidanud, et reaalseid füüsikalisi ruume võib mitte väga suurte mastaapide puhul lugeda eukleidilisteks ruumideks. Meie vaatleme edaspidi eranditult eukleidilisi ruume. Mehaanikat, mis baseerub eukleidilisel ruumil, nimetatakse Newtoni mehaanikaks.

Aja absoluutsus

Eeldame et *eksisteerib absoluutne aeg*, mis kulgeb kõigis taustsüsteemides ühesuguselt ².

²Newton: “Absoluutsel ajal pole mitte midagi ühist mitte millegagi väljaspool teda ning ta kulgeb ühtlaselt.” Praktikas lähtutakse aja mõõtmisel siiski mingist konkreetsest füüsikalisest nähtusest.

Koordinaadid

Euleri koordinaadid ehk ruumilised koordinaadid (EK). x^1, x^2, x^3 on ajas muutumatud. Nende suhtes kirjeldatakse keskkonna materiaalsete osakeste liikumist.

Lagrange'i koordinaadid ehk materiaalsed koordinaadid (LK). Fikseerime ajahetkel $t = t_0$ keskkonna materiaalsete punktide asendi ja seome nendega kõverjoonelise koordinaatsüsteemi X^1, X^2, X^3 . Kui nüüd ajahetkel $t > t_0$ keskkond liigub ja muudab kuju, siis liigub ja muudab kuju ka koordinaatsüsteem X^1, X^2, X^3 . Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Lagrange'i koordinaatsüsteemiks ehk materiaalseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate X^1, X^2, X^3 — *Lagrange'i koordinaatideks ehk materiaalseteks koordinaatideks*.

Kõverjooneliste koordinaatide avaldamine Descartes'i ristkoordinaatide (DRK) kaudu Nii EK kui LK tuuakse sisse läbi DRK:

$$z^k = z^k(x^1, x^2, x^3), \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

$$Z^K = Z^K(X^1, X^2, X^3), \quad K = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Seega eeldatakse, et nii EDRK kui LDRK sõltuvad kolmest Eukleidilise ruumi E^3 muutujast (vastavalt x^1, x^2, x^3 ja X^1, X^2, X^3). Funktsioonide z^k ja Z^K puhul eeldatakse kuuluvust klassi $C^r, r \geq 1$ ning on defineeritud mingis ruumi E^3 piirkonnas.

Vastavad pöördteisendused:

$$x^k = x^k(z^1, z^2, z^3), \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

$$X^K = X^K(Z^1, Z^2, Z^3), \quad K = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Teoreem ilmutamata funktsioonist: koordinaatteisendus (1.1) omab ruumipunkti p ümbruses δ ühest pöördteisendust (1.3) siis ja ainult

siis kui eksisteerivad osatuletised $\partial z^k / \partial x^k$ ja jakobiaan

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| \neq 0; |x^k - x_0^k| > \delta. \quad (1.5)$$

Siin x_0^k , $k = 1, 2, 3$, on ruumipunkti p koordinaadid.

Analoogsed tingimused peavad olema täidetud ka LK ja LDRK puhul: koordinaatteisendus (1.2) omab materiaalse punkti P ümbruses δ ühest pöördteisendust (1.4) siis ja ainult siis kui eksisteerivad osatuletised $\partial Z^K / \partial X^K$ ja jakobiaan

$$J_L = \left| \frac{\partial Z^K}{\partial X^K} \right| \neq 0; |X^K - X_0^K| > \delta, \quad (1.6)$$

Siin X_0^K , $K = 1, 2, 3$, on ruumipunkti P koordinaadid.

- Koordinaatkõverad
- Koordinaatpinnad

Edaspidises eeldame, et

- kõverjoonelised koordinaatsüsteemid on sisse toodud Descartes'i ristkoordinaatide kaudu (EK kujul (1.1) ja LK kujul (1.2)) selliselt, et jakobiaanid (1.5) ja (1.6) pole samaselt nullid ruumis E^3 või vähemalt mingis meid huvitavas ruumi E^3 piirkonnas (v.a. mõned singulaarsed punktid, jooned või pinnad);
- üldjuhul on pikkuse mõõtmiseks piki telgi z^k ja Z^K valitud ühtne mastaap.

✓

1.2.2 Skalaar, vektor, tensor

Skalaar

Vaatleme koordinaatsüsteeme ζ^i ja η^i . Funktsiooni $\varphi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) \equiv \varphi(\zeta)$ nimetatakse (absoluutseks) *skalaariks* kui ta ei muuda koordinaatteisendusega $\zeta^k = \zeta^k(\eta^1, \eta^2, \eta^3) \equiv \zeta^k(\eta)$, $k = 1, 2, 3$ oma algväärtust, st.,

$$\varphi(\zeta^1(\eta), \zeta^2(\eta), \zeta^3(\eta)) \equiv \psi(\eta) = \varphi(\zeta). \quad (1.7)$$

Seega ei sõltu skalaari väärtus antud punktis koordinaatide valikust.

Näide: *Temperatuur on absoluutne skalaar.*

Kontravariantne vektor

Suurusi $\varphi^k(\zeta)$ nimetatakse vektori kontravariantseteks komponentideks ehk lihtsalt *kontravariantseteks vektoriks* kui koordinaatteisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul muutub ta vastavalt seadusele

$$\varphi^k(\zeta(\eta)) \equiv \psi^k(\eta) = \varphi^m(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.8)$$

Suurusi $\psi^k(\eta)$ tuleb siin mõista kui suuruste $\varphi^k(\zeta)$ komponente koordinaatsüsteemis η^i , $i = 1, 2, 3$.

Näide: *Diferentsiaal on kontravariantne vektor, sest võttes $\varphi^k = d\zeta^k$, saame*

$$\psi^k = d\eta^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} d\zeta^m \equiv \varphi^m \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}.$$

Kovariantne vektor

Suursi $\varphi_k(\zeta)$ nimetatakse vektori kovariantseteks komponentideks ehk lühidalt *kovariantseks vektoriks* kui nad koordinaatide teisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul teisenevad vastavalt seadusele

$$\varphi_k(\zeta(\eta)) \equiv \psi_k(\eta) = \varphi_m(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Näide: *Osatuletis absoluutsest skalaarist on kovariantne vektor, sest tähistades*

$$\varphi_m = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m}$$

kus Φ on absoluutne skalaar, saame

$$\varphi_k(\zeta(\eta)) \equiv \psi_k(\eta) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} = \varphi_m(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Kontravariantne, kovariantne ja segatensor

Suursi $\Phi^{kl}(\zeta)$, $\Phi_{kl}(\zeta)$ ja $\Phi^k_l(\zeta)$ nimetatakse vastavalt kontravariantseteks-, kovariantseks- ja segatensoriks kui nad koordinaat-teisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul teisenevad seaduste

$$\Phi^{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^{kl}(\eta) = \Phi^{mn}(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \eta^l}{\partial \zeta^n}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (1.10)$$

$$\Phi_{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi_{kl}(\eta) = \Phi_{mn}(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (1.11)$$

ja

$$\Phi^k_l(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^k_l(\eta) = \Phi^m_n(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (1.12)$$

järgi.

1.2.3 Baasivektorid ja meetrilised tensorid

EDRK z^k ja LDRK Z^K — ortonormeeritud baasid \mathbf{i}_k ja \mathbf{I}_K

EK x^k ja LK X^K jaoks defineeritakse *kovariantseid baasivektorid* \mathbf{g}_k ja \mathbf{G}_K läbi punktide p ja P kohavektorite kujul

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m \quad (1.13)$$

ja

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M. \quad (1.14)$$

Kroneckeri delta

$$\delta_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{I}_L = \begin{cases} 1, & K = L \\ 0, & K \neq L \end{cases} \quad (1.15)$$

Kovariantne meetriline tensor

$$G_{KL} = G_{LK} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L, \quad g_{kl} = g_{lk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \quad (1.16)$$

Kontravariantne baas — \mathbf{g}^k ja \mathbf{G}^K defineeritakse läbi ortonormaalsustingimuste

$$\mathbf{G}^K \cdot \mathbf{G}_L = \delta^K_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_l = \delta^k_l \quad (1.17)$$

kust

$$\mathbf{G}^K = G^{KL} \mathbf{G}_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}^k = g^{kl} \mathbf{g}_l. \quad (1.18)$$

Kontravariantne meetriline tensor —

$$G^{KL} = \frac{\text{cofactor } G_{KL}}{G} \quad \text{ja} \quad g^{kl} = \frac{\text{cofactor } g_{kl}}{g}, \quad (1.19)$$

kus

$$G = |G_{KL}| \quad \text{ja} \quad g = |g_{kl}| \quad (1.20)$$

on determinandid.

$$G^{LM}G_{MK} = \delta^L_K, \quad g_{kl}g^{lm} = \delta_k^m \quad \text{jne.} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{g}^k = v^k \mathbf{g}_k \quad (1.22)$$

$$v^k = g^{kl}v_l \quad \text{ja} \quad v_k = g_{kl}v^l \quad (1.23)$$

$$c^{kl} = g^{lm}c^k_m, \quad c^k_l = g^{km}c_{ml} \quad \text{jne. jne.} \quad (1.24)$$

1.2.4 Liikumise kirjeldamine

Liikumisseaduseks nimetatakse üheparameetrilist koordinaatide teisendust

$$x^k = x^k(X^1, X^2, X^3, t) \quad (1.25)$$

või

$$X^K = X^K(x^1, x^2, x^3, t), \quad (1.26)$$

mis siirdab materiaalse punkti X^1, X^2, X^3 ruumipunkti x^1, x^2, x^3 .

- Koordinaatteisendused (1.25) ja (1.26) on teineteise pöördteisendused.
- Ühesus: $\exists \partial x^k / \partial X^K$ ja

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \right| \neq 0 \quad (1.27)$$

ruumipunkti p ümbruses $|x^k - x_0^k| > \delta$.

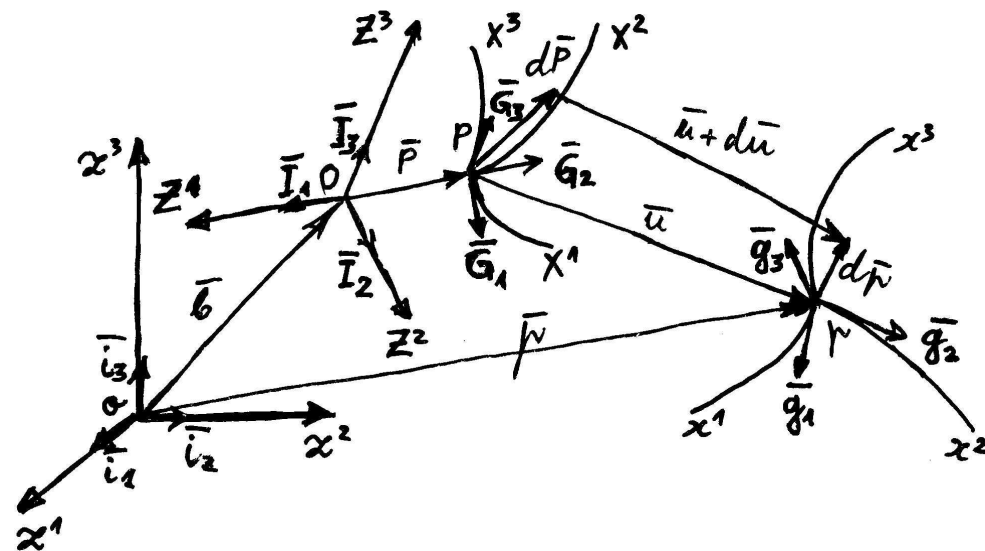
- (1.25) — Lagrange'i kirjeldus.
- (1.26) — Euleri kirjeldus.

★

1.2.5 Deformatsioon ja siire

Siire

Materiaalse punkti P asukohta muut ajavaheühikus Δt on määratud siirdevektoriga \mathbf{u} .



Joonis 1.1: Deformatsioon

Elementaarpikkuse ruut (kohavektori muudu ruut)

$$\begin{cases} dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL}dX^KdX^L = \delta_{KL}dZ^KdZ^L, \\ ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl}dx^kdx^l = \delta_{kl}dz^k dz^l. \end{cases} \quad (1.28)$$

Deformatsioon (deformatsiooni mõõt)

$$ds^2 - dS^2 \quad (1.29)$$

Deformatsioonigradiendid

$$x^k_{,K} = \frac{\partial x^k(X^1, X^2, X^3, t)}{\partial X^K} \quad \text{ja} \quad X^K_{,k} = \frac{\partial X^K(x^1, x^2, x^3, t)}{\partial x^k}, \quad (1.30)$$

Deformatsioonitensorid**Cauchy deformatsioonitensor**

$$c_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l = G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l} \quad (1.31)$$

Greeni deformatsioonitensor

$$C_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L = g_{kl} x^k_{,K} x^l_{,L} \quad (1.32)$$

Fingeri deformatsioonitensor

$$c^{-1kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{c}^l = G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L} \quad (1.33)$$

Piola deformatsioonitensor

$$C^{-1KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{C}^L = g^{kl} X^K_{,k} X^L_{,l} \quad (1.34)$$

Nende puhul $c_{km} c^{-1ml} = \delta_k^l$ ja $C_{KM} C^{-1ML} = \delta_K^L$.

Lagrange'i deformatsioonitensor

$$2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} \quad (1.35)$$

Euleri deformatsioonitensor

$$2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} \quad (1.36)$$

Kuna

$$\begin{cases} dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL} dX^K dX^L = c_{kl} dx^k dx^l, \\ ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl} dx^k dx^l = C_{KL} dX^K dX^L \end{cases}$$

siis nüüd

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL} dX^K dX^L = 2e_{kl} dx^k dx^l, \quad (1.37)$$

Seosed:

$$E_{KL} = e_{kl} x^k_{,K} x^l_{,L} \quad \text{ja} \quad e_{kl} = E_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l} \quad (1.38)$$

Kovariantsed osatuletised

Christoffeli teist liiki sümboolid

$$\left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \quad \text{ja} \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial z^n}. \quad (1.39)$$

Christoffeli esimest liiki sümboolid on defineeritavad kahel moel.

i) Läbi Christoffeli teist liiki sümboolite

$$\begin{cases} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} G_{MN} \left\{ \begin{matrix} N \\ KL \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} = G^{MN} [KL, N], \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} g_{mn} \left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} = g^{mn} [kl, n]. \end{cases} \quad (1.40)$$

ii) kujul

$$\begin{cases} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{KM}}{\partial X^L} + \frac{\partial G_{LM}}{\partial X^K} - \frac{\partial G_{KL}}{\partial X^M} \right), \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \end{cases} \quad (1.41)$$

NB! *Christoffeli sümboolid pole tensorid!*

Osatuletused vektoreist \mathbf{U} või \mathbf{u} avalduvad kujul

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial X^K}(U^L \mathbf{G}_L) = U^M{}_{;K} \mathbf{G}_M, \\ \frac{\partial}{\partial x^k}(u^l \mathbf{g}_l) = u^m{}_{;k} \mathbf{g}_m, \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial X^K}(U_L \mathbf{G}^L) = U_{M;K} \mathbf{G}^M, \\ \frac{\partial}{\partial x^k}(u_l \mathbf{g}^l) = u_{m;k} \mathbf{g}^m. \end{cases} \quad (1.42)$$

Siin

$$\begin{cases} U^M{}_{;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U^M}{\partial X^K} + \left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} U^L, \\ u^m{}_{;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} u^l \end{cases} \quad (1.43)$$

on kontravariantsete vektorite kovariantsed osatuletised (meetriliste tensorite G_{KL} ja g_{kl} järgi) ning

$$\begin{cases} U_{M;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U_M}{\partial X^K} - \left\{ \begin{matrix} L \\ MK \end{matrix} \right\} U_L, \\ u_{m;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_m}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} l \\ mk \end{matrix} \right\} u_l \end{cases} \quad (1.44)$$

on kovariantsete vektorite kovariantsed osatuletised (meetriliste tensorite G_{KL} ja g_{kl} järgi).

Suurused $U^M{}_{;K}$ ja $u^m{}_{;k}$ on segatensorid ning $U_{M;K}$ ja $u_{m;k}$ kovariantsed tensorid.

Meetriliste tensoritega saab teostada üleminekuid (1.43) \rightarrow (1.44) ja vastupidi:

$$\begin{cases} U^L{}_{;K} = G^{LM} U_{M;K} & U_{L;K} = G_{LM} U^M{}_{;K} \\ u^l{}_{;k} = g^{lm} u_{m;k} & u_{l;k} = g_{lm} u^m{}_{;k} \end{cases}$$

Kovariantse osatuletise geomeetriline interpretatsioon
Kovariantse osatuletise avaldised (1.43) ja (1.44) koosnevad kahest

osast. Neist esimene iseloomustab vektori \mathbf{u} muutumist kui muutub koordinaat X^K (või x^k) ning teine \mathbf{u} muutumist kui seoses X^K (või x^k) muutumisega muutub baas \mathbf{G}_M (või \mathbf{g}_m).

Sirgjooneliste koordinaatide puhul on Christoffeli sümboolid samaselt nullid ja seega kovariantne osatuletis on võrdne “harilikku” osatuletisega. *

Deformatsioonitensorite ja siirete vahelised seosed

$$\begin{cases} C_{KL} = G_{KL} + U_{K;L} + U_{L;K} + U_{N;K} U^N{}_{;L}, \\ c_{kl} = g_{kl} - u_{k;l} - u_{l;k} + u_{n;k} u^n{}_{;l}. \end{cases} \quad (1.45)$$

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K} + U_{M;K} U^M{}_{;L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{k;l} + u_{l;k} - u_{m;k} u^m{}_{;l}. \end{cases} \quad (1.46)$$

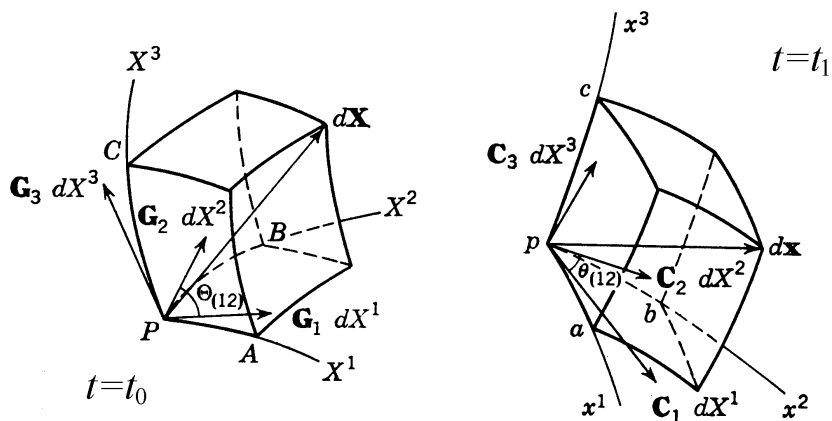
Need võrrandid on PKM ühed põhivõrrandid, mis seovad omavahel Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid ning materiaalse punktide siirded \mathbf{u} .

Suurusi $u_{l;k}$, $u^m{}_{;l}$ jne. nimetatakse tihti *siirdegradientideks*. Sirgjooneliste koordinaatide puhul $U_{M;K} \equiv U_{M,K}$ jne. DRK puhul lisaks eelnevale $U^M{}_{;L} \equiv U_{M,K}$ jne. ning võrrandid (1.46) saavad kuju

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L;K} + U_{K;L} + U_{M,K} U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{l;k} + u_{k;l} - u_{m,k} u_{m,l}. \end{cases} \quad (1.47) \quad \dagger$$

Pikenemine ja nihe (nurga muutus)

Vaatleme kõverjoonelist rööptahukat³ (Joon. 1.2). Tema “servavektorid” hetkel $t = t_0$ on $\mathbf{G}_K dX^K$ ja need deformeeruvad servavektoreteks $\mathbf{C}_K dX^K$.



Joonis 1.2: Kõverjoonelise rööptahuka deformatsioon

Defineerime vektorite $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ sihilised ühikvektorid

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{X}}{dS} \text{ ja } \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad (1.48)$$

mille komponendid

$$N^K = \frac{dX^K}{dS} \text{ ja } n^k = \frac{dx^k}{ds} \quad (1.49)$$

kujutavad endast ühikvektorite \mathbf{N} ja \mathbf{n} suunakoosinusi.

Pikenemiskoeffitsendid⁴

³I.k. *curvilinear parallelepiped*

⁴I.k. *stretch*

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \lambda_{(\mathbf{n})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KL}N^K N^L} = \frac{1}{\sqrt{c_{kl}n^k n^l}} \quad (1.50)$$

Füüsikaliselt on suurused $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ ja $\lambda_{(\mathbf{n})}$ samad — esimene on vaid esitatud LK-s, teine EK-s.

Suhteline pikenemine (suunas \mathbf{N})⁵

$$E_{(\mathbf{N})} = e_{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1 \equiv \lambda_{(\mathbf{n})} - 1. \quad (1.51)$$

LDRK ja EDRK

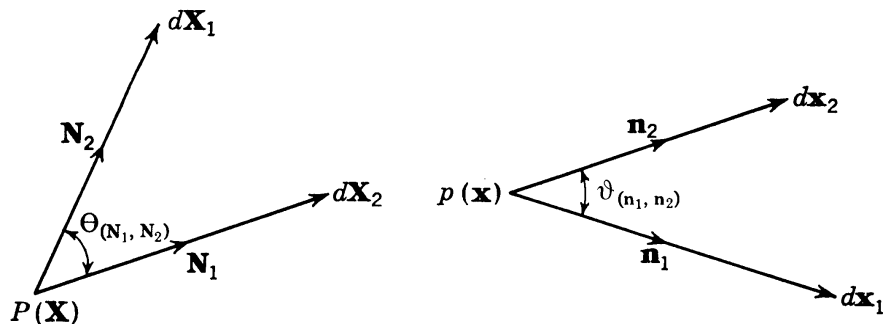
$$\begin{aligned} C_{\underline{K}\underline{K}} &= \Lambda_{(K)}^2, & 2E_{\underline{K}\underline{K}} &= \Lambda_{(K)}^2 - 1 = (1 + E_{(K)})^2 - 1 \\ c_{\underline{k}\underline{k}} &= \lambda_{(k)}^{-2}, & 2e_{\underline{k}\underline{k}} &= 1 - \lambda_{(k)}^{-2} = 1 - (1 + e_{(k)})^{-2}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Kui $E_{\underline{K}\underline{K}} \ll 1$ või $e_{\underline{k}\underline{k}} \ll 1$, siis arendades avaldised (1.52)₂ ja (1.52)₄ Maclaurin'i ritta ning säilitades vaid kõige madalamat järku • liikmed, saame

$$E_{\underline{K}\underline{K}} \approx E_{(K)} \text{ ja } e_{\underline{k}\underline{k}} \approx e_{(k)} \quad (1.53)$$

⁵I.k. *extension*

Vaatleme kahte lõpmata väikest vektorit $d\mathbf{X}_1$ ja $d\mathbf{X}_2$, mille vaheline nurk on $\Theta \equiv \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}$ ja mis deformeeruvad vektoriteks $d\mathbf{x}_1$ ja $d\mathbf{x}_2$, mille vaheline nurk on $\vartheta \equiv \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}$.



Joonis 1.3: Nurga muutus

Ühikvektorid

$$\mathbf{N}_\alpha = \frac{d\mathbf{X}_\alpha}{|d\mathbf{X}_\alpha|} \quad \text{ja} \quad \mathbf{n}_\alpha = \frac{d\mathbf{x}_\alpha}{|d\mathbf{x}_\alpha|} \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.54)$$

ning nurkade koosinused

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} = \frac{G_{KL} dX_1^K dX_2^L}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} = G_{KL} N_1^K N_2^L \quad (1.55)$$

ja

$$\cos \vartheta = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_1| |d\mathbf{x}_2|} = \frac{C_{KL} N_1^K N_2^L}{\Lambda_{(\mathbf{N}_1)} \Lambda_{(\mathbf{N}_2)}} \stackrel{\text{tähistame}}{=} H. \quad (1.56)$$

Nihe ehk nihkedeformatsioon ehk nihkenurk vektoritega \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_2 määratud pinnal on defineeritud kui algse nurga Θ muut —

$$\Gamma_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)} = \gamma_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} = \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)} - \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}. \quad (1.57)$$

$$\sin \Gamma = \sin(\Theta - \vartheta) = H \sin \Theta - \sqrt{1 - H^2} \cos \Theta \quad (1.58)$$

Kui $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_2$, siis $\sin \Gamma = H$.

LDRK

$$2E_{KL} = (1 + E_{(K)}) (1 + E_{(L)}) \sin \Gamma_{KL}, \quad K \neq L. \quad (1.59)$$

Kui nii $|E_{(K)}| \ll 1$, $|E_{(L)}| \ll 1$ kui $|\sin \Gamma_{(KL)}| \ll 1$ siis saame

$$2E_{KL} \approx \sin \Gamma_{(KL)}, \quad K \neq L. \quad (1.60)$$

Kui lisaks $\Gamma_{(KL)} \rightarrow 0$, siis

$$2E_{KL} \approx \Gamma_{(KL)}, \quad K \neq L. \quad (1.61)$$

Kui x^k on EDRK, $e_{(k)} \ll 1$, $e_{(l)} \ll 1$ ja $\gamma_{(kl)} \rightarrow 0$, siis

$$2e_{kl} \approx \gamma_{(kl)}, \quad k \neq l. \quad (1.62)$$

Deformatsioonitensori peasuunad

Tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$(C^K_L - C\delta^K_L) N^L = 0. \quad (1.63)$$

Viimasel eksisteerib mittetriviaalne lahend juhul kui tema *karakteristlik determinant* on null, st.,

$$|C^K_L - C\delta^K_L| = 0. \quad (1.64)$$

Selle determinandi arendamise tulemusena saadakse *karakteristlik võrrand* (mis kujutab endast kuupvõrrandit)

$$-C^3 + I_C C^2 - II_C C + III_C = 0 \quad (1.65)$$

tundmatu C määramiseks.

Karakteristlik võrrand (1.65) omab kolme juurt C_α , $\alpha = 1, 2, 3$, mida nimetatakse *omaväärtusteks* ehk *peaväärtusteks*⁶. Võrrandisüsteemi (1.63) abil saame nüüd igale peaväärtusele C_α seada vastavusse *omavektori* ehk *peavektori* \mathbf{N}_α , mis määrab *peasuuna*.

Saab tõestada, et peaväärtused on reaalsed ning neile vastavad peasuunad on omavahel risti ja eksisteerivad alati. •

Kui koordinaadid on valitud peasuundades (st., baasivektorite siht ühtib peavektortite sihtidega igas materiaalses punktis), siis ★

$$N^L_\alpha = \kappa_\alpha \delta^L_\alpha \quad (1.66)$$

ja avaldiste (1.63) põhjal

$$C^K_\alpha = C_\alpha \delta^K_\alpha, \quad (1.67)$$

st., $C^1_1 = C_1$, $C^2_2 = C_2$, $C^3_3 = C_3$ ja $C^K_\alpha = 0$, kui $K \neq \alpha$. Kokkuvõttes võib öelda, et peaväärtused võrduvad deformatsioonitensori normaalkomponentidega peatelgedes (peadeformatsioonidega). Nihkedeformatsioonid selliste telgede (koordinaatide) puhul puuduvad.

Deformatsioonitensori invariandid —

$$\begin{cases} \text{I}_C = C_1 + C_2 + C_3, \\ \text{II}_C = C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2, \\ \text{III}_C = C_1 C_2 C_3. \end{cases} \quad (1.68)$$

Pikenemiskoeffitsendid peasuundades

$$\lambda_\alpha \equiv \Lambda_\alpha = \sqrt{C_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{c_\alpha}} \quad (1.69)$$

1.2.6 Kiirus ja kiirendus

Materiaalne tuletis vektorist

Materiaalseks tuletiseks vektorist (aja järgi) nimetatakse operatsiooni

$$\dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{\mathbf{x}=\text{const}} \quad (1.70)$$

LK:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (1.71)$$

EK:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f^k \mathbf{g}_k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f^k \mathbf{g}_k) \dot{x}^l, \\ \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f_k \mathbf{g}^k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f_k \mathbf{g}^k) \dot{x}^l. \end{cases} \quad (1.72)$$

Esimest liiget nimetatakse siin *lokaalseks tuletiseks* (mõnikord ka *tuletiseks aja järgi*), teist liiget aga *konvektiivseks tuletiseks*. Lokaalne tuletis iseloomustab muutusi, mis toimuvad vaadeldavas ruumipunktis ning konvektiivne tuletis muutusi, mis on põhjustatud materiaalse punkti liikumisest (vaadeldava ruumipunkti ümbruses).

Defineerime materiaalse tuletise vektori komponentidest

$$\frac{Df^k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f^k}{\partial t} + f^k_{;l} \dot{x}^l \quad \text{ja} \quad \frac{Df_k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_k}{\partial t} + f_{k;l} \dot{x}^l. \quad (1.73)$$

Vektori jaoks seega

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{Df^k}{Dt} \mathbf{g}_k = \frac{Df_k}{Dt} \mathbf{g}^k. \quad (1.74)$$

⁶I.k. *eigenvalues or principal values or proper numbers*

Materiaalne tuletis skalaarist. Vaatleme skalaarfunktsiooni $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$. *Materiaalne tuletis skalaarist* on defineeritud kujul †

$$\dot{\Phi} = \frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^l} \dot{x}^l. \quad (1.75)$$

Näide: Tähistagu skalaar Φ materiaalse punkti temperatuuri. Temperatuuri muutumisel võib olla kaks põhjust: 1) antud ruumipunkti temperatuur muutub ja 2) liikudes satub materiaalne punkt teise ruumipunkti, kus on erinev temperatuur (võrreldes ruumipunktiga, kus ta oli). Viimast nähtust nimetatakse füüsikas konvektsiooniks.

Materiaalse punkti kiirus

Joonise 1.1 (lk. 13) põhjal punkti kohavektor

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{P} + \mathbf{u}. \quad (1.76)$$

Kuna \mathbf{b} ja \mathbf{P} ei sõltu ajast, siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (1.77)$$

Kui lähtuda materiaalse punkti kohavektorist $\mathbf{p} = x^k(X^1, X^2, X^3, t)\mathbf{g}_k$, siis tema kiirus

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k, \quad \text{kus} \quad v^k \equiv \dot{x}^k \equiv \frac{\partial x^k}{\partial t} \equiv \frac{Dx^k}{Dt}. \quad (1.78)$$

Kui lähtuda siirdevektorist $\mathbf{u} = U^K(\mathbf{X}, t)\mathbf{G}_K = u^k(\mathbf{x}, t)\mathbf{g}_k$, siis saame LK ja EK puhul kardinaalselt erinevad kiiruse avaldised.

LK:

$$\mathbf{v} = V^K \mathbf{G}_K, \quad \text{kus} \quad V^K = \frac{\partial U^K}{\partial t} \quad (1.79)$$

EK:

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k, \quad \text{kus} \quad v^k = \frac{Du^k}{Dt} \equiv \frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k{}_{;l} \underbrace{\dot{x}^l}_{v^l} \quad (1.80)$$

Seega on kiiruse- ja siirdekomponentide vahelised seosed Euleri koordinaatide puhul ilmutamata kujul.

Materiaalse punkti kiirendus

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (1.81)$$

Lagrange'i koordinaatide puhul

$$\mathbf{a} = A^K \mathbf{G}_K, \quad A^K = \frac{\partial V^K}{\partial t} = \frac{\partial^2 U^K}{\partial t^2} \quad (1.82)$$

ning *Euleri koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{g}_k, \quad a^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k{}_{;l} \underbrace{\dot{x}^l}_{v^l} \quad (1.83)$$

Seega avalduvad kiirenduse komponendid nii LK-s kui EK-s ilmutatud kujul.

Deformatsioonikiiruse tensorid

Euleri deformatsioonikiiruse tensor

$$2d_{kl} = v_{k;l} + v_{l;k}, \quad (1.84)$$

Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl} x^k{}_{,K} x^l{}_{,L}. \quad (1.85)$$

Keeriselisuse tensor

Defineerime (*Cauchy*) keeriselisuse tensori⁷

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k;l} - v_{l;k}) \equiv v_{[k;l]}. \quad (1.86)$$

1.2.7 Mass

Mass on positiivne suurus, mis on invariantne liikumise suhtes. Tema dimensioon M ei sõltu ei pikkuse dimensioonist L ega aja dimensioonist T . Kui mass on absoluutselt pidev, siis leidub funktsioon ρ , mida nimetatakse *massi tiheduseks*. Sel juhul keha kogu mass

$$\mathfrak{M} = \int_v \rho dv. \quad (1.87)$$

Pideva keskkonna mehaanika I põhiaksioom — massi jäävuse seadus

Globaalne massi jäävuse aksioom: keskkonna kogumass on liikumisel invariantne —

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_o d\mathcal{V} = \int_v \rho dv. \quad (1.88)$$

Lokaalse massi jäävuse aksioomi saame kui rakendame globaalset massi jäävuse aksioomi materiaalse punkti lõpmata väikeses ümbruses.

Lagrange'i kirjeldus:

$$\rho_o = \rho J = \rho \sqrt{\text{III}_C} \quad \text{või} \quad \rho = \rho_o J^{-1} = \rho_o \sqrt{\text{III}_c}. \quad (1.89)$$

⁷I.k. *vorticity tensor*. Kasutatakse ka terminit pöörlemistensor, i.k. vastavalt *spin tensor*.

Siin on arvestatud, et

$$dv = J d\mathcal{V} \quad \text{ja} \quad J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}}.$$

Avaldisi (1.89) nimetatakse *materiaalseteks pidevusvõrranditeks* ja nad esitatakse Lagrange'i koordinaatides.

Euleri kirjelduse saame kui esitame globaalse massi jäävuse aksioomi kujul $\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv = 0$. Viimase põhjal avaldub lokaalne massi jäävuse aksioom kujul

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} = 0, \quad (1.90)$$

mis kujutabki endast *ruumilist pidevusvõrrandit* ja esitatakse EKs. Avaldised (1.89) ja (1.90) esitavad ühe ja sama nähtuse kaht erinevat kirjeldust — (1.89) on mugavam kasutada tahke keha mehaanikas, (1.90) aga vedelike ja gaaside puhul.

1.2.8 Jõud

Pideva keskkonna vaatepunktist lähtudes võib jõud jagada kolme kategooriasse:

1. *Mahu- ehk massijõud*⁸ mõjuvad keha või keskkonda moodustavatele materiaalselele punktidele (masspunktidele). Näiteks gravitatsiooni jõud või elektrostaatilised jõud. Summaarne jõud saadakse integreerimisel üle kogu ruumala v . Siin eeldatakse, et on teada jõu tihedus ühikmassi või ühikruumala kohta.
2. *Pinna- ehk kontaktjõud*⁹ on põhjustatud teiste kehade või keskkondade mõjust kokkupuutepinnal. Siin eeldatakse, et on teada pinnaühikule mõjuv jõud. Näiteks hüdrostaatilise rõhu mõju vette asetatud keha pinnale.

⁸I.k. *body forces (loads)*

⁹I.k. *surfice or contact forces (loads)*

3. *Sisejõud*¹⁰ on põhjustatud materiaalsete punktide omavahe-
lisest mõjust. Dünaamika kursuses näidati, et kõigi sisejõudu-
de peavektor ja peamoment on võrdsed nulliga. Punkt-
masside vahelised jõud (sisejõud) muutuvad pinnajõududeks
kui me isoleerime (mõtteliselt) keskkonna või keha ühe osa
ülejäänust. See annab pingehüpoteesi.

Pideva keskkonna mehaanika kursuses kasutasime järgmisi
tähistusi:

- \mathbf{f} — massijõud (jõud massiühiku kohta),
- $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ — pinnajõud (jõud pinnaühiku kohta) punktis,
mille pinnanormaal on \mathbf{n} ,
- \mathcal{F}_α — punktis \mathbf{p}_α mõjuv koondatud jõud,
- \mathbf{m} — massimoment (moment massiühiku kohta),
- $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ — pinnamoment (moment pinnaühiku kohta) punktis,
mille pinnanormaal on \mathbf{n} ,
- \mathcal{M}_α — punktis \mathbf{p}_α mõjuv jõupaari moment.

Seega, kehale mõjuva jõusüsteemi peavektor

$$\mathcal{F} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da + \sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha \quad (1.91)$$

ja peamoment

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_o = \int_{\mathfrak{M}} [\mathbf{m} + \mathbf{p} \times \mathbf{f}] d\mathfrak{M} + \int_s [\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} + \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}] da + \\ + \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha \times \mathcal{F}_\alpha + \sum_\beta \mathcal{M}_\beta. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Koondatud jõudusid defineeritakse tihti kui piirjuhte pinna- või
mahujõududest. Selline käsitlus võib aga mõnikord põhjustada ma- \checkmark

¹⁰I.k. *mutual or internal forces (loads)*

temaatilisi raskusi ning vajab seetõttu täiendavate tingimuste ka-
sutamist. Näiteks, et vältida määramatusi rakendatakse lokaalseid
teoreeme ja printsiipe vaid punktides, kus ei mõju koondatud jõudu-
sid. Globaalsete teoreemide puhul sellist probleemi pole.

1.2.9 Liikumishulk

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *liikumishulk*¹¹ \mathcal{P} avaldub kujul

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} v^k(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) d\mathfrak{M} \quad (1.93)$$

kusjuures baasivektorid $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ saab integraali ette tuua vaid sirg-
jooneliste koordinaatide puhul. Kuna pideva massijaotuse puhul
 $d\mathfrak{M} = \rho dv$, siis pole oluline, kas integreeritakse üle ruumala või
massi. Kui korrutada viimast avaldist skalaarselt $\mathbf{G}^K(\mathbf{X})$ siis saa-
me liikumishulga \mathcal{P} komponendid \mathcal{P}^K LK-s —

$$\mathcal{P}^K(\mathbf{X}, t) = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k(\mathbf{X}, \mathbf{x}) v^k(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M}. \quad (1.94)$$

**Pideva keskkonna mehaanika II põhiaksioom —
liikumishulga tasakaalu seadus**

Liikumishulga globaalse tasakaalu seadus. Liikumishulga
muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude
peavektoriga¹² —

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F} \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k v^k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}^K \quad (1.95)$$

¹¹I.k. *momentum or linear momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka terminit
impulss.

¹²I.k. *principle of balance of momentum*

1.2.10 Kineetilise momendi

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) kineetilise momendi¹³ \mathcal{H}_o ruumipunkti o suhtes

$$\mathcal{H}_o \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{g}_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (1.96)$$

Analoogselt eelnevaga saame ka kineetilise momendi komponendid esitada LK-s

$$\mathcal{H}_o^K = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (1.97)$$

Pideva keskkonna mehaanika III põhiaksioom — kineetilise momendi tasakaalu seadus

Kineetilise momendi globaalse tasakaalu seadus. Kineetilise momendi muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude peamomendiga¹⁴ (mõlemad momendid peavad olema võetud ühe ja sama ruumipunkti suhtes) —

$$\dot{\mathcal{H}}_o = \mathcal{M}_o \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_o^K \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k g^L_l (p^k v^l - p^l v^k) d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_o^{KL}. \quad (1.98)$$

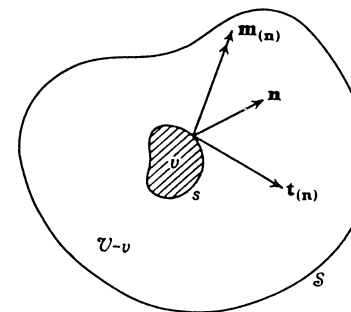
✓

¹³I.k. *moment of momentum or angular momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid impulsi moment ja pöördeimpulss.

¹⁴I.k. *principle of balance of moment of momentum*

1.2.11 Pinge

Pinnal Δa mõjub keskmine jõud $\Delta \mathcal{F}$ ja keskmine moment punkti p suhtes \mathcal{M}_p . Kui $\Delta a \rightarrow 0$, siis suhe $\Delta \mathcal{F} / \Delta a \rightarrow \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$. Kui vaadeldavas protsessis moment punkti p suhtes ei lähene nullile, siis saame ka suuruse $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$. †

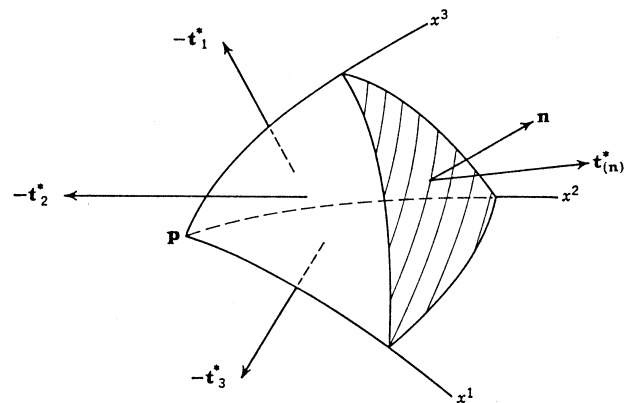


Joonis 1.4: Pingevektor ja momentpinge

Vaatleme väikest ruumi piirkonda v , mis on ümbritsetud pinnaga s ja mis asub täielikult kehas mahuga \mathcal{V} ja pinnaga S (joonis 1.4). Punktis p , mis asub pinnal s on välisnormaal \mathbf{n} ning mõjuvad jõud $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ ja moment $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ pinnauhiku kohta. Mõlemad nad on põhjustatud mahtude v ja $\mathcal{V} - v$ koosmõjust pinnal s . Suurust $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ nimetatakse *pingevektoriks* ja suurust $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ *pingemomendiks* ehk *momenti pingeks*¹⁵. Nad iseloomustavad vaadeldava mahu v välispinnal s mõjuvat väliskoormust, mis ei sõltu ainult vaadeldava punkti kohavektorist \mathbf{p} vaid ka pinnanormaalist \mathbf{n} .

Cauchy pingehüpotees. Vaatleme väikest tetraeedrit (joonis 1.5), mille tipp p asub vaadeldava piirkonna v sees ja mille kolm tahku on koordinaatpinnad ning neljas asub pinnal s . Koordinaatpinnal $x^i = \text{const.}$ mõjuva keskmise pinge tähistame $-\mathbf{t}_i^*$. Kasutame vaadeldava tetraeedri jaoks liikumishulga tasakaalu ✓

¹⁵I.k. *couple stress*



Joonis 1.5: Tetraeder

seadust (integreerimisel on rakendatud keskväärtusteoreeme) —

$$\frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}^* \Delta v) = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}^* \Delta a - \mathbf{t}_k^* \Delta a^k + \rho \mathbf{f}^* \Delta v. \quad (1.99)$$

Siin Δv on tetraeedri ruumala, Δa ja Δa^k – tetraeedri tahkude pindalad, \mathbf{v}^* – tetraeedri punktide keskmine kiirus ning \mathbf{f}^* – keskmine mahujõud.

Jagame nüüd viimase avaldise Δa ja laseme $\Delta a \rightarrow 0$ nii, et punkt p läheneb pinnale s mahu v seest. Kuna $\Delta v / \Delta a \rightarrow 0$, siis piiril saame

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k \frac{da^k}{da} = \mathbf{t}_k n^k = \mathbf{t}^k n_k, \quad (1.100)$$

sest teatavasti elementaarpind $d\mathbf{a} = \mathbf{n} da = da^k \mathbf{g}_k$ ja $da^k = n^k da$. Kokkuvõttes oleme seega tõestanud **teoreemi** — *pingevektor pinnapunktis p on lineaarfunktsioon ühikulisest pinnanormaalist \mathbf{n} . Selle lineaarfunktsiooni kordajateks on pingevektorid, mis mõjuvad vaadeldavat punkti läbivatel koordinaattasanditel.*

Pingektorid \mathbf{t}_k ei sõltu pinnanormaalist \mathbf{n} . Eeldades, et $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ on pidev funktsioon normaalist \mathbf{n} ja võttes valemis (1.100) $\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ saame

$$\mathbf{t}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}, \quad (1.101)$$

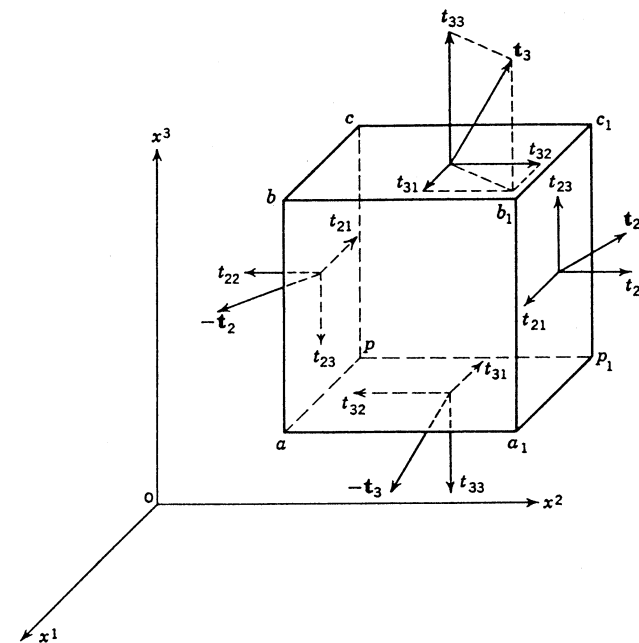
st., punktis p mõjuvad sama pinna vastaskülgedel võrdvastupidised pingektorid.

1.2.12 Pingetensor

Pingetensori komponent (pingekomponent) t_{kl} on koordinaatpinnal $x^k = \text{const}$ mõjuva pingektorid \mathbf{t}_k l -is komponent, st.,

$$\mathbf{t}_k = t_{kl} \mathbf{g}^l \quad (1.102)$$

Seega näitab esimene indeks koordinaatpinda, millel pingektor \mathbf{t}_k mõjub ja teine indeks vaadeldava komponendi mõjumise suunda. Pingekomponentide positiivsed suunad on näidatud joonisel 1.6.



Joonis 1.6: Pingetensor

Pingetensori normaalkomponente $k = l$ nimetatakse *normaalpinge-*

teks¹⁶ ja segakomponente $k \neq l$ nihkepingeteks¹⁷.

Pingevektori $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ saab nüüd avaldada kujul

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k n^k \stackrel{(1.102)}{=} t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \quad (1.103)$$

kust

$$t_{(\mathbf{n})l} = t_{kl} n^k. \quad (1.104)$$

Seega oleme tõestanud **teoreemi** — punkti p läbival suvalisel pinnal (normaaliga \mathbf{n}) mõjuv pingevektor $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ avaldub lineaarfunktsioonina vaadeldava punkti pingetensorist t_{kl} .

Märkus: Kui vaadeldavat pingetensorit t_{kl} on vaja eristada teistest pingetensoreist, siis nimetatakse teda *Cauchy pingetensoriks*.

Meetriliste tensoritega indekseid tõstes saame moodustada kontravariantseid ja segatensoreid, näiteks

$$g^{km} g^{ln} t_{mn} = g^{ln} t^k_n = t^{kl}.$$

Seega, lisaks valemile (1.102) ja (1.103), on pingevektorite avaldamiseks mitmeid võimalusi —

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = t^k_l n_k \mathbf{g}^l = t_l^k n^l \mathbf{g}_k = t^{lk} n_l \mathbf{g}_k = t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \\ \mathbf{t}^k = t^k_l \mathbf{g}^l = t^{kl} \mathbf{g}_l, \\ \mathbf{t}_k = t_k^l \mathbf{g}_l = t_{kl} \mathbf{g}^l. \end{cases} \quad (1.105)$$

Peapinged, pingetensori peasuunad ja invariandid

Kui massi- ja pinnamomendid puuduvad, siis on pingetensor t_{kl} sümmeetriline. Seega kehtivad tema kohta samad seaduspärasused, mis deformatsioonitensorite kohta —

¹⁶I.k. *normal stress*

¹⁷I.k. *shear stress*

- (i) pingetensoril leidub vähemalt kolm peasuunda;
- (ii) pingetensoril leidub kolm peapinget, t_α ($\alpha = 1, 2, 3$), mis mõjuvad peapindadel;
- (iii) peapindadel on nihkepinged nullid;
- (iv) pingetensoril leidub kolm sõltumatut invarianti I_t , II_t ja III_t , mille leidmise eeskirjad, läbi pingetensori t^k_l või peaväärtuste t_α , on analoogsed Greeni deformatsioonitensori C^K_L invariantide leidmise eeskirjadele (1.68) (lk. 22).

1.2.13 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused — Cauchy liikumisseadused

Liikumishulga lokaalse tasakaalu seadus

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \mathbf{t}^k) + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0 \quad (1.106)$$

ehk

$$t^{jk}_{;j} + \rho (f^k - a^k) = 0$$

Need võrrandid väljendavadki *liikumishulga lokaalse tasakaalu seadust* ja on samas tuntud ka *Cauchy' esimese liikumisseadusena*.

Alternatiivsed kujud:

$$\begin{cases} t^{kl}_{;l} + \rho (f^k - a^k) = 0, \\ t^l_{k;l} + \rho (f_k - a_k) = 0, \\ t_{lk}{}^l + \rho (f_k - a_k) = 0. \end{cases} \quad (1.107)$$

Kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadus

Vaatleme mittepolaarset juhtu (st. puuduvad mahu ja pinnamomendid) ja eeldame, et liikumishulk on lokaalses tasakaalus. Sel juhul saab *kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadus* kuju

$$\mathbf{g}_k \times \mathbf{t}^k = 0 \quad \text{ehk} \quad \epsilon^{ijk} t_{jk} = 0 \quad (1.108)$$

Võrrandid (1.108) on tuntud ka *Cauchy teise liikumisseadusena*. Sisuliselt tähendab viimane tingimus, et pingetensor peab olema sümmeetriline —

$$\epsilon^{ijk} t_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{jk} - t_{kj} = 0, \quad (1.109)$$

Järeldus: Kui liikumishulk on lokaalses tasakaalus ning mahu- ja pinnamomendid puuduvad, on kineetiline moment lokaalses tasakaalus parajasti siis kui pingetensor on sümmeetriline. Seega on meil vaadeldaval juhul vaid kuus sõltumatut pingekomponenti: $t^{11}, t^{22}, t^{33}, t^{12} = t^{21}, t^{13} = t^{31}, t^{23} = t^{32}$, st.,

$$t_{kl} = t_{lk}, \quad t^{kl} = t^{lk}, \quad t^k_l = t_l^k. \quad (1.110)$$

1.2.14 Liikumisvõrrandid Lagrange'i koordinaatides

(Pseudo)pingevektor \mathbf{T}^K esitab pinget ruumipunktis \mathbf{x} , kusjuures pinget vastab deformeerumata pinnale $d\mathbf{A}$ materiaalses punktis $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ ja

$$\mathbf{t}_{(n)} da = \mathbf{t}^k da_k = \mathbf{T}^K dA_K. \quad (1.111)$$

Seos pingevektoriga \mathbf{t}^k (mis vastab deformeerunud pinnale $d\mathbf{a}$):

$$\mathbf{t}^k = J^{-1} x^k_{,K} \mathbf{T}^K \quad \text{ja} \quad \mathbf{T}^K = J X^K_{,k} \mathbf{t}^k. \quad (1.112)$$

Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensorid: Piola (1833, 1836 ja 1848) tõi sisse pseudopinge tensorid T^{Kl} ja T^{KL} nii, et

$$\mathbf{T}^K = T^{Kl} \mathbf{g}_l = T^{KL} x^l_{,L} \mathbf{g}_l = T^{KL} \mathbf{G}_L. \quad (1.113)$$

Tänapäeval on need tensorid tuntud kui *esimene ja teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor*. Terminid pseudopinge kasutatakse siin seetõttu, et mõlemad tensorid väljendavad pinget algse (deformeerumata) pinna kohta. Tensor T^{Kl} esitab pinget ruumipunktis \mathbf{x} ja tensor T^{KL} materiaalses punktis \mathbf{X} . Seosed Cauchy pingetensoriga:

$$\begin{aligned} T^{Kl} &= J X^K_{,k} t^{kl}, & t^{kl} &= J^{-1} x^k_{,K} T^{Kl}, \\ T^{KL} &= T^{Kl} X^L_{,l} = J X^K_{,k} X^L_{,l} t^{kl}, \\ t^{kl} &= J^{-1} x^k_{,K} x^l_{,L} T^{KL}, & T^{Kl} &= x^l_{,L} T^{KL}. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Cauchy esimene liikumisseadus (liikumishulga tasakaalu seadus):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial X^K} \left(\sqrt{G} \mathbf{T}^K \right) + \underbrace{J \rho}_{=\rho_o} (\mathbf{f} - \mathbf{a}) &= 0, \\ T^{Kk}_{,K} + \rho_o (f^k - a^k) &= 0, \\ (x^l_{,L} T^{Kk})_{,K} + \rho_o (f^k - a^k) &= 0. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Koolon tähistab viimastes võrrandites *kovariantset täistuletist* ($A^{Kk} = A^{Kk}(\mathbf{X}, \mathbf{x})$)

$$A^{Kk}_{,L} = \underbrace{A^{Kk}_{,L}}_{A^{Kk}_{,L}} + \underbrace{\left\{ \begin{matrix} K \\ ML \end{matrix} \right\}}_{A^{Kk}_{,L}} A^{Mk} + \underbrace{\left(A^{Kk}_{,l} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} A^{Kl} \right)}_{A^{Kk}_{,l}} x^l_{,L}. \quad (1.116)$$

Cauchy teine liikumisseadus (kineetilise momendi tasakaalu seadus):

$$\begin{aligned} T^{Kk} x^m_{,K} &= T^{Km} x^k_{,K}, \\ T^{KL} &= T^{LK}. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Tensoritega T^{KL} ja T^{Kl} seotud valemeid on mugav kasutada väikeste deformatsioonide puhul, sest nad on seotud algpinnaga ning järelikult on lihtne aproksimeerida järgnevaid väikseid muutusi. Deformatsiooni käigus keha välispind muutub ja seega tuleb rajatingimused esitada liikuval ja muutuval pinnal ning nad sõltuvad siirdevektorist \mathbf{u} , mis on tundmatu. Lagrange'i kirjelduse puhul aga siin probleemi pole, sest rajatingimused esitatakse algse pinna jaoks, mis on teada. Tõsi küll, liikumisvõrrandid ise on sel juhul "pissut" keerukamad. Lineaarse teooria puhul erinevus kahe vaadeldava kirjelduse vahel kaob.

1.2.15 Energia ja entroopia

Keskkonnale (või tema osale või kehale) rakendatud pind- ja mahujõud põhjustavad tema osade liikumist. Liikumise olemus sõltub keskkonna (või keha) omadustest. Näiteks deformatsioon, jäiga keha liikumine, vedeliku voolamine. Seega teevad keskkonnale rakendatud jõud tööd ja keskkond omandab energiat. Nimetatud energiale võib liituda veel muu päritoluga energiad (näiteks soojusenergia, keemiline energia jne.). Pideva keskkonna mehaanika puhul piirduakse muude energiatega osas tavaliselt vaid soojusenergia-ga. Summaarne energia¹⁸ on seega põhjustatud soojusenergiast ja välisjõudude tööst. Osa sellest summaarsest energiast «kulutatakse» kineetilise energi kujul (näiteks keskkonna deformeerimiseks või vedeliku voolamiseks). Ülejäänud osa summaarsest energiast kujutab endast vaadeldava keskkonna (kui mehaanikalise süsteemi) *si-*

¹⁸I. k. *Total energy*

*seenergiat*¹⁹. Deformeeruva keha puhul võib siseenergia koosneda näiteks soojusenergiast ja deformatsioonienergiast, vedeliku voolamisel aga soojusenergiast ja viskoosse dissipatsiooniga seotud energiast.

Pideva keskkonna mehaanika IV põhiaksioom — energia jäävuse seadus

Globaalne energia jäävuse seadus (termodünaamika I seadus): Kineetilise ja siseenergia summa muutumise kiirus võrdub välisjõudude poolt ajaühiku jooksul tehtud töö (välisjõudude võimsuse) ja ajaühiku jooksul keskkonda sisse tulnud või sealt lahkunud soojusenergia summaga —

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}. \quad (1.118)$$

Kineetiline energia: Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetiline energia*²⁰ ($d\mathfrak{M} = \rho dv$)

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_v \rho v^2 \rho dv = \frac{1}{2} \int_v \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rho dv = \frac{1}{2} \int_v \rho g_{kl} v^k v^l \rho dv. \quad (1.119)$$

Siseenergia: Kui on teada siseenergia tihedus ε (ühikmassi kohta), siis

$$\mathcal{E} = \int_{\mathfrak{M}} \varepsilon d\mathfrak{M} \equiv \int_v \rho \varepsilon dv. \quad (1.120)$$

¹⁹I. k. *Internal energy*. Siseenergia mõiste võttis 1851. a. kasutusele W. Thomson sõnastamaks termodünaamika I seadust.

²⁰I. k. *kinetic energy*

Välisjõudude töö ajaühikus (välisjõudude võimsus):

$$\mathcal{W} = \int_S t^{rp} v_p da_r + \int_V \rho f^p v_p dv = \int_S \mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} da + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv. \quad (1.121)$$

Siin elementaarpind $d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_{(1)} \times d\mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{n} da = da_k \mathbf{g}^k$ ja $da_k = d\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_k$.

Ajaühiku jooksul keskkonda sisse tulnud või sealt lahkunud soojusenergia: Soojuse juurdevool koosneb kahest osast: (i) soojuse juurdevool läbi pinna S kehasse \mathcal{V} ja (ii) keha siseallikaist toodetud soojus, st.,

$$Q = \int_S q^p da_p + \int_V \rho h dv = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \rho h dv. \quad (1.122)$$

Siin $\mathbf{q} = q^p \mathbf{g}_p$ on soojuse juurdevool ehk soojuse voog pinnaiühiku kohta ja h — keha siseallikaist toodetud soojus massiühiku kohta.

Lokaalne energia jäävuse seadus

$$\rho \dot{\mathcal{E}} = t^{pr} d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h. \quad (1.123)$$

Esitatud diferentsiaalvõrrand väljendab *lokaalset energia jäävuse seadust* ja teda nimetatakse ka *energia lokaalse tasakaalu diferentsiaalvõrrandiks*. Kuna arvesse pole võetud energia jaotust elementaarmahu pinnal, siis võidakse siia lisada veel üks $q^p{}_{;p}$ tüüpi liige. Viimases avaldises esinevat mehaanikalist energiat

$$\phi = t^{pq} d_{pq} \quad (1.124)$$

nimetatakse ka *pinge võimsuseks*, sest ta iseloomustab pinge poolt deformeerimisel või voolamised tehtud töö muutumise kiirust.

Potentsiaalne energia

Vaatleme juhtu, kus mahu- ja pinnamomendid puuduvad (nn. mittepolaarne juht) ning välisjõud f_p (massijõud) on statsionaarsed ja avaldatavad läbi potentsiaali $U(\mathbf{x})$, st. $f_p = -U_{,p}$. Seega potentsiaalne energia

$$\mathcal{U} = \int_V \rho U dv \quad (1.125)$$

Välisjõudude võimsuse avaldisele (1.121) saab nüüd anda kuju

$$\mathcal{W} = \int_S t^{rp} v_p da_r - \dot{\mathcal{U}} \quad (1.126)$$

ja globaalsele energia jäävuse seadusele (termodünaamika esimene seadus) kuju

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{U}} = \int_S t^{rp} v_p da_r + Q. \quad (1.127)$$

Antud kujul väidab termodünaamika esimene seadus, et koguenergia muutus võrdub pindjõudude võimsus pluss soojuse juurdevool ajaühikus. Kui p.p. on null, siis

$$\mathcal{K} + \mathcal{E} + \mathcal{U} = \text{const.} \quad (1.128)$$

Selline olukord esineb kui keha on isoleeritud (st. $Q = 0$) ja pinnajõud ja/või kiirused on nullid või omavahel risti.

Entroopia

Entroopia on termodünaamiline olekufunktsioon, mis iseloomustab energia pöördumatut hajumist. Tihti defineeritakse entroopiat ka kui suurust millega mõõdetakse süsteemi korrastamatuse astet. Energia ja entroopia konteseptsioonid on termodünaamika alustalad. Termodünaamika esimene seadus — energia jäävuse seadus

— sätestab, et materiaalses süsteemis muutub energia ühest vormist teise kuid ei teki juurde ega kao. Samas ei sätesta see seadus, mis vormis selline energia muutumine ehk ülekanne toimub. Näiteks ei anna termodünaamika esimene seadus informatsiooni selle kohta, kas selline ülekanne on pööratav või pöördumatu. Viimane küsimus energia ülekanne pööratavusest on eriti tähtis juhtudel, kus on vaja teada energia hulka, mida on võimalik vaadeldava süsteemi puhul kasutada. *Entroopia* kontseptsioon tuuakse sisse selleks, et mõõta energia hulka, mis on pöördumatult muundunud kasutatavast vormist kasutamatusse. Viimase all tuleb mõista seda hulka energiast, mida pole enam võimalik muundada (mehaanikaliseks) tööks. Näiteks, kui deformeeruvale kehale mõjub jõud, siis keha (üldjuhul) deformeerub. Viimase protsessiga kaasneb alati teatav temperatuuri tõus (soojusenergia juurdekasv). Sellist soojusenergia kasvu deformeerumisprotsessis iseloomustabki entroopia.

Süsteemi summaarne entroopia:

$$H = \int_v \rho \eta dv, \quad (1.129)$$

kus η on *erientroopia* ehk *entroopia tihedus* (massiühiku kohta)²¹. Tema dimensioon $\dim(\eta) = (\text{energia})/(\text{mass} \cdot \text{temperatuur})$

Termodünaamika teine seadus

Entroopia tootmise kiirus:

$$N = \dot{H} - \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p - \int_v \frac{\rho h}{\vartheta} dv \geq 0. \quad (1.130)$$

Klassikalised sõnastused: 1) *Clausius*: soojus ei saa iseenesest minna külmemalt kehalt soojemale; 2) *Kelvin*: protsessid, mille ainsaks tulemuseks on keha jahtumine ja selle arvelt saadav töö pole

²¹I.k. *specific entropy or entropy density*

võimalikud; 3) *Carathéodory*: iga termodünaamilise oleku ümbruses eksisteerivad nn. naaberolekud, kuid üleminek ühest naaberolekust teise pole võimalik adiabaatilise protsessi käigus.

Termodünaamiline olek

Termodünaamika üks põhieeldus väidab, et igal materjali jaoks leidub üks ja ainult üks funktsioon, mida nimetatakse siseenergia tiheduse funktsiooniks ja mis on esitatav kujul

$$\varepsilon = \varepsilon(\eta, \nu_1, \dots, \nu_n, \mathbf{X}). \quad (1.131)$$

Siin η on erientroopia ja suurused ν_α kujutavad endast mehaanikalisi, keemilisi, elektromagneetilisi jne. parameetreid, mis iseloomustavad süsteemi termodünaamilist käitumist. Suurusi η ja ν_α nimetatakse *termodünaamilisteks olekumuutujateks* ning nad määravad süsteemi *termodünaamilise oleku* materiaalses punktis \mathbf{X} . Kuna siseenergia tiheduse funktsioon ε iseloomustab vaadeldava materjali sisemist ehitust, siis nimetatakse teda *olekufunktsiooniks*.

Temperatuur ϑ ja **termodünaamiline pinge** τ^α on defineeritud järgmiselt —

$$\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \quad \text{ja} \quad \tau^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu_\alpha}. \quad (1.132)$$

Seega fikseeritud materiaalse punkti jaoks avaldub siseenergia tiheduse lõpmata väike muut kujul

$$d\varepsilon = \vartheta d\eta + \tau^\alpha d\nu_\alpha. \quad (1.133)$$

Viimane on tuntud kui *Gibbs'i võrrand* [1873].

1.2.16 Pidevustingimused ehk sobivustingimused

Kolmemõõtmelises ruumis on deformatsioonitensori kuus (sõltumatut) komponenti seotud siirdevektori kolme komponendiga läbi kuue võrrandi (vt. (1.46) lk.17). Näiteks,

$$2E_{KL} = C_{KL} - G_{KL} = 2E_{LK} = U_{K;L} + U_{L;K} + G^{MN}U_{M;K}U_{N;L}. \quad (1.134)$$

Kui on teada siirdevektori komponendid U_K , siis valemi (1.134) põhjal saab määrata kas tensori C_{KL} või E_{KL} kuus komponenti. Kui aga on vastupidi, st., et teada on tensori C_{KL} või E_{KL} kuus komponenti, siis on meil kolme tundmatu määramiseks kuus võrrandit. Järelikult on meil tegu ülemääratud süsteemiga. Selleks, et siirdekomponendid U_K oleks üheselt määratavad ja pidevad (siirdeväli peab olema üheselt määratud ja pidev) tuleb nüüd deformatsiooni tensori komponentidele peale panna lisatingimused, mis välistaks nende meelevaldse valiku. Neid tingimusi nimetatakse *pidevustingimusteks* ehk *sobivustingimusteks*²². Kui siirdekomponendid U_K on ette teada (siirdekomponendid on valitud põhimuutujateks) siis on kooskõlatingimused automaatselt täidetud. Kui aga põhimuutujateks on deformatsioonitensorid, siis on sobivustingimustel täita oluline roll.

Avaldised

$$\begin{aligned} & e_{km;ln} + e_{ln;km} - e_{lm;kn} - e_{kn;lm} + \\ & + c^{-1pq} [(e_{mq;l} + e_{lq;n} - e_{lm;q})(e_{kp;n} + e_{np;k} - e_{kn;p}) - \\ & - (e_{lq;n} + e_{nq;l} - e_{ln;q})(e_{kp;m} + e_{mp;k} - e_{km;p})] = 0, \end{aligned} \quad (1.135)$$

kus c^{-1pq} on Fingeri deformatsioonitensor, esitavad pidevustingimusi Euleri deformatsioonitensori jaoks.

²²I.k. *compatibility conditions*

Kui avaldistes (1.135) asendada tensor e_{kl} lineaarse teooria deformatsioonitensoriga $\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k;l} + u_{l;k})$ ning hüljata kõik mittelineaarsed liikmed, saame lineaarse teooria (lõpmata väikeste deformatsioonide) sobivustingimused —

$$\tilde{e}_{kn;lm} + \tilde{e}_{lm;kn} - \tilde{e}_{km;ln} - \tilde{e}_{ln;km} = 0. \quad (1.136)$$

Saadud 81 võrrandist vaid 6 osutuvad lineaarselt sõltumatuteks. • Tasapinnalise deformatsiooni puhul jääb neist kuuest järele vaid üks võrrand.

1.2.17 Olekuvõrrandid

Olekuvõrrandid on vaja sisse tuua selleks, et saada võrdseks tundmatute arv ja võrrandite arv. Meil on kaheksa võrrandit: massi jäävus — 1 võrrand; Cauchy I ja II liikumisseadus — 3 + 3 võrrandit; energia jäävus — 1 võrrand. Eringeni järgi on tundmatuid kakskümmend viis: tihedus ρ — 1; kiirusvektori komponendid v_i — 3; pingetensori komponendid t^{ij} — 9; momentpingetensori komponendid m^{ij} — 9; soojuse juurdevool q^k — 3. Lisanduda võib veel elektrilisi ja keemilisi muutujaid. Kui tegu on nn. mittepolaarse juhuga, siis väheneb tundmatute arv üheksa momentpingetensori komponendi ja kolme pingetensori komponendi võrra ning samas võrrandite arv kolme võrra (Cauchy II liikumisseaduse arvelt, mille põhjal peab pingetensor olema sümmeetriline). Seega antud juhul on viis võrrandit ja kolmteist tundmatut.

Nimetatud võrrandid kehtivad suvalisest materjalist keskkonna puhul, olekuvõrrandid kirjeldavad aga konkreetse keskkonna omadusi.

Olekuvõrrandite tuletamise meetodid:

- (i) statistilis mehaaniline — arvestab keskkonna koosnemist osakestest;

- (ii) puht matemaatiline — õige arv võrrandeid tagab füüsikaliste nähtuste ühese kirjelduse;
- (iii) termodünaamiline — arvestab eeskätt soojust ja temperatuuri mõju;
- (iv) pideva keskkonna füüsikal baseeruv meetod — arvestab kõiki kolme eeltoodud meetodit.

Olekuvõrrand kirjeldab teatavat idealiseeritud materjali. Et see kirjeldus oleks adekvaatne, peab ta lähtuma teatavatest printsiipidest.

1. Välistamise ehk hülgamise printsiibid
 - (a) Pärilikkuse (mälu) arvestamine
 - (b) Ümbruse printsiip
 - (c) Võrdse kohaloleku ehk sõltumatute olekuparameetrite valiku ühesuse printsiip
 - (d) Unifitseerimise printsiip
jne.
2. Invariantsus koordinaatteisenduste suhtes
3. Ruumiline invariantsus
4. Materiaalne invariantsus
5. Mõõtühikuist sõltumatuse printsiip
6. Sobivusnõuded

Greeni meetod

- Lähtub hüperelastse keha mudelist — siseenergia on funktsioon deformatsioonist. Näiteks

$$\begin{aligned} \rho_0 \varepsilon &= \Sigma(X^K, x^k, g^k{}_K, \rho, \mathbf{G}_K, x^k{}_{,K}) \\ &\text{või} \\ \rho_0 \varepsilon &= \Sigma(X^K, \text{I, II, III}), \end{aligned} \tag{1.137}$$

kus I, II ja III on invariantid ühest deformatsioonitensorist ($C^{KL}, c^{kl}, E^{KL}, \bar{c}^{kl}$, jne., jne.).

- Elektrilised, keemilised ja termodünaamilised nähtused hüljatakse.
- Eeldatakse, et eksisteerib nn. loomulik olek.
- Eeldatakse, et dissipatsioon puudub.

Cauchy meetod

1. Lähtub ideaalselt elastse keha mudelist — pingest sõltub vaid deformatsioonist, st. eeldatakse, et pingest on deformatsiooni funktsioon.
2. On üldistatav ka dissipatiivsele süsteemile.

1.3 Elastsusteooria põhivõrrandite süsteem

1. Massi jäävuse seadus: Lokaalne massi jäävuse seadus on esitatud kas Lagrange'i või Euleri koordinaatides:

- materiaalne pidevusvõrand²³ —

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{\text{III}_c} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_{-c}}}; \quad (1.138)$$

- ruumiline pidevusvõrand²⁴ —

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} = 0. \quad (1.139)$$

2. Cauchy I ja II liikumisseadus. Euleri koordinaatide korral on Cauchy I liikumisseadus esitatav kujul

$$\begin{aligned} t^{kl}_{;l} + \rho (f^k - a^k) &= 0 & \text{või} \\ t^l_{k;l} + \rho (f_k - a_k) &= 0 & \text{või} \\ t_{lk}{}^{;l} + \rho (f^k - a^k) &= 0 \end{aligned} \quad (1.140)$$

ja Cauchy II liikumisseadus kujul

$$t^{kl} = t^{lk} \quad \text{või} \quad t^k_l = t_l^k. \quad (1.141)$$

Loomulikult saab Cauchy I ja II liikumisseadust esitada ka Lagrange'i koordinaatides (vt. alajaotus 1.2.14 lk. 36).

²³I. k. *Material equation of continuity*

²⁴I. k. *Spatial equation of continuity*

3. Keskkonna olekuvõrrandid. Näitena vaatleme kahte isotroopset keskkonda iseloomustavat olekuvõrrandit.

- Kokkusurutav keskkond — Fingeri olekuvõrand (vt. Pideva keskkonna mehaanika loengukonspekt).

$$t^k_l = b_{-1} c^{-1k}_l + b_0 \delta^k_l + b_1 c^k_l, \quad (1.142)$$

$$\begin{cases} b_{-1} = 2(\text{III}_c)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} = \frac{2}{\sqrt{\text{III}_{-c}}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-c}}, \\ b_0 = -2\sqrt{\text{III}_c} \left(\text{II}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} + \text{III}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_c} \right) \\ = \frac{2}{\sqrt{\text{III}_{-c}}} \left(\text{II}_{-c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-c}} + \text{III}_{-c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_{-c}} \right), \\ b_1 = -2\sqrt{\text{III}_c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c} = -2\sqrt{\text{III}_{-c}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-c}}. \end{cases} \quad (1.143)$$

- Kokkusurumatu keskkond — Ariano-Rivlini olekuvõrand (vt. Pideva keskkonna mehaanika loengukonspekt).

$$t^k_l = -p \delta^k_l + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-c}} c^{-1k}_l - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-c}} c^k_l. \quad (1.144)$$

Isotroopse materjali korral on loomulik eeldada, et $t_\alpha \geq t_\beta$ alati kui $\lambda_\alpha \geq \lambda_\beta$. Seetõttu peavad olekuvõrrandid rahuldama lisatingimusi

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-c}} + \lambda_\alpha^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-c}} \begin{cases} > 0 & \text{kui } \lambda_\beta \neq \lambda_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq) \\ \geq 0 & \text{kui } \lambda_\beta = \lambda_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq). \end{cases} \quad (1.145)$$

Lisakas ülaltoodud võrranditele tuleb või saab kasutada alljärgnevat seost ja tingimusi.

4. Geomeetrilised ja kinemaatilised seosed.

- Deformatsioonitensorid —

$$\begin{cases} c_{kl} = G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l}, \\ c^{-1kl} = G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L}. \end{cases} \quad (1.146)$$

- Kiirus ja kiirendus —

$$v^k = \frac{Du^k}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u^k_{;l} v^l, \quad (1.147)$$

$$a^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v^k_{;l} v^l. \quad (1.148)$$

5. Alg- ja rajatingimused.

- Kui keha pinnal S on pinged $t^k_{(n)}$ teada, siis

$$t^k_{(n)} = t^{lk} n_l = s^k, \quad \text{pinnal } S. \quad (1.149)$$

- Kui teame pinna S siirdeid, siis võime kirjeldada kas x^k või u^k pinnal S .
- Võimalik on ka nn. segarajatingimuste juht, kus osal rajapinnal on antud siirded, osal pinged.
- Algtingimused

$$x^k(\mathbf{X}, 0) = x_0^k, \quad \dot{x}^k(\mathbf{X}, 0) = v_0^k \quad (1.150)$$

kirjeldavad olukorda kehas alghetkel $t = 0$.

6. Pidevus- ehk sobivustingimused. Juhul kui põhimuutuja- teks on deformatsioonid või pinged, või kui teoorias esineb olulisi lihtsustusi (näiteks plaatide ja koorikute teoorias), läheb üldjuhul vaja veel nn. sobivus- ehk pidevustingimusi (vt. alajaotus 1.2.16).

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	3
1.1 Kirjandus	4
1.2 Ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhimõistetest, -hüpoteesidest ja -võrrandeist.	6
1.2.1 Põhieeldused ja -hüpoteesid	6
1.2.2 Skalaar, vektor, tensor	9
1.2.3 Baasivektorid ja meetrilised tensorid	11
1.2.4 Liikumise kirjeldamine	12
1.2.5 Deformatsioon ja siire	13
1.2.6 Kiirus ja kiirendus	23
1.2.7 Mass	26
1.2.8 Jõud	27
1.2.9 Liikumishulk	29
1.2.10 Kineetiline moment	30
1.2.11 Pinge	31
1.2.12 Pingetensor	33

1.2.13	Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused — Cauchy liikumisseadused	35
1.2.14	Liikumisvõrrandid Lagrange'i koordinaatides	36
1.2.15	Energia ja entroopia	38
1.2.16	Pidevustingimused ehk sobivustingimused .	44
1.2.17	Olekuvõrrandid	45
1.3	Elastusteooria põhivõrrandite süsteem	48