Peatükk 2

Valik teemasid mittelineaarsest elastsusteooriast

2.1 Homogeenne ehk ühtlane deformatsioon

See on üks lihtsamaid ülesannete klasse elastsusteoorias Valime DRK, st. $x_k \equiv z_k$ ja $X_K \equiv Z_K$. Ühtlasi koab erinevus ko- ja kontravariantsete koordinaatide vahel ning edaspidi on selles paragrahvis indeksid all.

2.1.1 Põhiseosed

Homogeenset deformatsiooni esitab teisendus

$$x_k = A_{kK} X_K, \tag{2.1}$$

kus A_{kK} on konstantne ja mittesingulaarne tensor. Vastav

pöördteisendus

$$X_K = \overset{-1}{A}_{Kk} x_k \tag{2.2}$$

ja $A_{kK} \overset{-1}{A}_{Kl} = \delta_{kl}$. Cauchy deformatsioonitensor ja vastav pöördtensor olid defineeritud kujul

$$c_{kl} = G_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \quad \text{ja} \quad \overset{-1}{c}{}^{kl} = G_{KL} x_{k,K} x_{l,L}.$$

DRK puhul teatavasti $G_{KL} = G^{KL} = \delta_{KL}$ ja $g_{kl} = g^{kl} = \delta_{kl}$. Seega

$$c_{kl} = \delta_{KL} \overset{-1}{A}_{Kk} \overset{-1}{A}_{Ll} \quad \text{ja} \quad \overset{-1}{c}_{kl} = \delta_{KL} A_{kK} A_{lL} \tag{2.3}$$

Lokaalse massi jäävuse seaduse põhjal

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{\mathrm{III}_c} = \sqrt{|c_{kl}|} = \left| \overset{-1}{A}_{Kk} \right|. \tag{2.4}$$

Seega on homogeenne deformatsioon isohooriline parajasti siis kui $\left| \overset{-1}{A}_{Kk} \right| = 1$. Pingete ja deformatsioonide vahelist seost esitav olekuvõrrand on saadud Greeni meetodil (vt. lk.47). Eeldame, et siseenergia on esitatav kujul $\rho_0 \varepsilon = \Sigma(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$, loeme keskkonna isotroopseks ja lähtume järgmistest olekuvõrrandeist ($\mathrm{I} \equiv \mathrm{I}_{\overset{-1}{c}}, \ldots$):

(a) kokkusurutav keskkond —

$$t_{kl} = b_{-1} \overset{-1}{c}_{kl} + b_0 \delta_{kl} - b_1 c_{kl}, \tag{2.5}$$

kus fenomenoloogilised kordajad

$$\begin{cases} b_{-1} = \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{III}}} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} \\ b_0 = \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{III}}} \left(\mathrm{II} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \mathrm{III} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{III}} \right) \\ b_1 = -2\sqrt{\mathrm{III}} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} \end{cases} \tag{2.6}$$

(b) kokkusurumatu keskkond —

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}\overset{-1}{c}_{kl} - 2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}c_{kl}, \tag{2.7}$$

kus p on hüdrostaatiline surve.

Asendades deformatsioonitensorid (2.3) olekuvõrrandeisse (2.5) ja (2.7) saame kokkusurutavale keskkonnale võrrandi

$$t_{kl} = b_{-1}\delta_{KL}A_{kK}A_{lL} + b_0\delta_{kl} + b_1\delta_{KL}\overset{-1}{A}_{Kk}\overset{-1}{A}_{Ll} \tag{2.8}$$

ja kokkusurumatule keskkonnale

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}\delta_{KL}A_{kK}A_{lL} - 2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\delta_{KL}\overset{-1}{A}_{Kk}\overset{-1}{A}_{Ll}. \tag{2.9}$$

Vaadeldaval juhul, st. homogeense deformatsiooni korral, on nii tensorid A_{kK} ja $\overset{-1}{A}_{Kk}$ kui fenomenoloogilised kordajad b_{-1}, b_0 ja b_1 konstantsed. Pinge-deformatsiooni seoste (2.8) ja (2.9) korral on tasakaaluvõrrandid (Cauchy I liikumisseadus (1.140) juhul kui $\mathbf{f} = \mathbf{a} = 0$) $t_{kl,l} = 0$ kokkusurutava keskkonna puhul automaatselt rahuldatud ja kokkusurumatu keskkonna puhul kui $p = const$. Järgnevalt vaatleme mõningaid erijuhte.

2.1.2 Puhas homogeenne deformatsioon

Puhta homogeense deformatsiooni[1] puhul on deformatsioon kirjeldatud kujul

$$x_i = \lambda_i X_I, \quad i = I, \tag{2.10}$$

ehk

$$\begin{cases} A_{kK} = \lambda_k = 1 + e_k, \quad \text{kui} \quad k = K \\ A_{kK} = 0, \quad \text{kui} \quad k \neq K \end{cases} \tag{2.11}$$

[1] I. k. *Pure homogeneous strain*

Seega tensoreile A_{kK} ja $\overset{-1}{A}_{Kk}$ vastavad maatriksid

$$[A_{kK}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \left[\overset{-1}{A}_{kK}\right] = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Ülesanne: Leida deformatsioonitensoritele c_{kl} ja $\overset{-1}{c}_{kl}$ vastavad maatriksid!

$$[c_{kl}] = \qquad\qquad \left[\overset{-1}{c}_{kl}\right] = \tag{2.13}$$

Invariandid:

$$\begin{cases} \mathrm{I} = \mathrm{I}_{\overset{-1}{c}} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ \mathrm{II} = \mathrm{II}_{\overset{-1}{c}} = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2, \\ \mathrm{III} = \mathrm{III}_{\overset{-1}{c}} = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2. \end{cases} \tag{2.14}$$

Nüüd saame võrrandist (2.8) kokkusurutava materjali jaoks

$$\begin{cases} t_{11} = 2\lambda_1\left\{\dfrac{1}{\lambda_2\lambda_3}\left[\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \left(\lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right] + \lambda_2\lambda_3\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}\right\}, \\ t_{22} = 2\lambda_2\left\{\dfrac{1}{\lambda_3\lambda_1}\left[\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \left(\lambda_3^2 + \lambda_1^2\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right] + \lambda_3\lambda_1\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}\right\}, \\ t_{33} = 2\lambda_3\left\{\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2}\left[\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right] + \lambda_1\lambda_2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}\right\}, \\ t_{kl} = 0, \quad k \neq l. \end{cases} \tag{2.15}$$

Kokkusurumatu keskkonna puhul $\mathrm{III} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ ja valemist (2.9) järeldub, et

$$t_{\underline{kk}} = -p + 2\lambda_k^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} - \frac{2}{\lambda_k^2}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}. \tag{2.16}$$

2.1.3 Tõmme

(Lihtsa) tõmbe[2] puhul on kaks normaalpinge komponenti nullid ja vastavad pikenemiskoefitsendid on võrdsed, näiteks $t_{22} = t_{33} = 0$ ja $\lambda_2 = \lambda_3$. Seega saavad kokkusurutava materjali olekuvõrrandid (2.15) kuju

$$\begin{cases} t_{11} = 2\lambda_1 \left(\dfrac{1}{\lambda_2^2}\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \lambda_2^2 \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}} \right), \\ 0 = \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2}\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \lambda_1\lambda_2 \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Võrrand $(2.17)_2$ seob omavahel pikenemiskoefitsendid λ_1 ja $\lambda_2 = \lambda_3$. See on transtsendendentne võrrand, mille lahend $\lambda_2 = f(\lambda_1)$ vajab igal juhul täiendavat uurimist, sest (vähemalt Eringeni põhjal) ei pruugi ta olla ühene ja reaalne.Seega võib tasakaal sõltuda näiteks koormuse rakendamise viisist.

Kokkusurumatu keskkonna puhul annab $t_{22} = t_{33} = 0$ asendamine võrrandeisse (2.16) hüdrostaatilise surve

$$p = \frac{2}{\lambda_1}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} - 2\lambda_1 \frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}. \tag{2.18}$$

ja pinge

$$t_{11} = 2\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right) \tag{2.19}$$

[2] I. k. *Simple extension*

Kokkuvõttes on olukord kokkusurumatu materjali puhul võrreldes kokkusurutava materjaliga mõnevõrra lihtsam, sest pinge t_{11} sõltub vaid pikenemisest λ_1. Kokkusurutava materjali puhul aga lisaks ka pikenemistest $\lambda_2 = \lambda_3$, kusjuures λ_1 ja λ_2 vahelise seose määramine võib osutuda üpris komplitseerituks. Enamgi veel, et tagada vaadeldava kokkusurutava materjali puhul kindla suurusega pikenemine, võib osutuda vajalikuks pindkoormuse rakendamine.

2.1.4 Hüdrostaatiline surve

Hüdrostaatilise surve[3] puhul $\lambda_\alpha = K$ ja $t_{kl} = -p\delta_{kl}$. Seega saame võrrandeist (2.15) avaldada surve

$$p = -2\left(\frac{1}{K}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + 2K\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + K^3\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}\right). \tag{2.20}$$

Kuna $\mathrm{III} \equiv \mathrm{III}_{\overset{-1}{c}} \equiv 1/\mathrm{III}_c = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = K^6$ ja $\rho/\rho_0 = \sqrt{\mathrm{III}_c}$, siis $K = \sqrt[3]{\rho_0/\rho}$. Seega nii deformatsioonitensori $\overset{-1}{c}$ invariandid kui siseenergia avalduvad tiheduse ρ funktsioonidena ($\mathrm{I} = \mathrm{I}(\rho), \ldots, \Sigma = \Sigma(\rho)$) ning ka olekuvõrrandi (2.20) üldkuju on $p = p(\rho)$.

2.1.5 Nihe

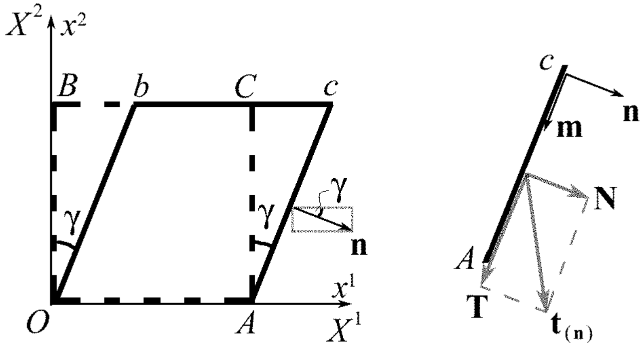
(Lihtsa) nihke[4] puhul deformeerub ruut $OABC$ rööpkülikuks $OAbc$ (vt. joonis 2.1). Nüüd kirjeldavad deformatsiooni seosed

$$x^1 = X^1 + KX^2, \quad x^2 = X^2, \quad x^3 = X^3, \tag{2.21}$$

kus $K = \tan\gamma$. Seega valides

$$[A_{lL}] = \begin{bmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \left[\overset{-1}{A}_{lL}\right] \begin{bmatrix} 1 & -K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

[3] I. k. *Hydrostatic pressure*
[4] I. k. *Simple shear*



Joonis 2.1: Nihe

saame ka nihke puhul esitada deformatsiooni kujul (2.1), st. ka nihe on vaadeldav homogeennse deformatsioonina ja vastavalt avaldistele (2.3) avalduvad Fingeri ja Greeni deformatsioonitensorid kujul

$$\left[\overset{-1}{c}_{kl}\right] = \begin{bmatrix} 1+K^2 & K & 0 \\ K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad [c_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & -K & 0 \\ -K & 1+K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Fingeri deformatsioonitensori $\overset{-1}{c}_{kl}$ invariandid

$$\mathrm{I} = \mathrm{II} = 3 + K^2 \;\text{ ja }\; \mathrm{III} = 1. \tag{2.24}$$

Viimane võrdus viitab isohoorilisele deformatsioonile.

Asendades avaldised (2.22)–(2.24) olekuvõrrandeisse (2.5) ja arvestades võrduseid (2.6) saame pingetensori komponendid

$$\begin{cases} t_{11} = 2\left(1+K^2\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + 2\left(2+K^2\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + 2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}, \\ t_{22} = 2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + 4\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + 2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}, \\ t_{33} = 2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + 2\left(2+K^2\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + 2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}, \\ t_{12} = 2K\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right), \quad t_{23} = t_{31} = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Deformeerunud pinna Ac ühiknormaali **n** projektsioonid koordinaatelgedel (vt. joonis 2.1)

$$\begin{cases} n_1 = \cos\gamma = \left(1+K^2\right)^{(-1/2)}, \\ n_2 = -\sin\gamma = -K\left(1+K^2\right)^{(-1/2)}, n_3 = 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

Keha pinnal mõjuva pingevektori koordinaattelgede sihilised komponendid on esitatud valemiga $t_{k(\mathbf{n})} = t_{kl} n_l$ (**n** on pinna normaal ning indeksid on all, sest kasutame DRK). Seega,

$$\begin{cases} t_{1(\mathbf{n})} = 2\left(1+K^2\right)^{(-1/2)}\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + 2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}\right), \\ t_{2(\mathbf{n})} = -2K\left(1+K^2\right)^{(-1/2)}\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}\right), \\ t_{3(\mathbf{n})} = 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Normaal- ja nihkepinged (tangentsiaalpinged) tahul Ac √

$$\begin{cases} N = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{n} = t_{k(\mathbf{n})} n_k = \\ \quad = 2\left(1+K^2\right)^{(-1/2)}\left[\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \left(2+K^2\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \left(1+K^2\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}\right] \\ T = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{m} = t_{k(\mathbf{n})} m_k = -2K\left(1+K^2\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right), \end{cases} \tag{2.28}$$

kus $m_1 = n_2$ ja $m_2 = -n_1$. Deformeerumata pindadel $X^2 = const.$ ja $X^3 = const.$ mõjuvaid pingeid saab leida otse valemeist (2.25).

Leitud pingeavaldistest nähtub, et vastupidiselt lineaarsele teooriale, pole antud juhul võimalik saavutada nihkeseisundit vaid nihkepingete rakendamisega kuubi tahkudele. Antud juhul tuleb nihke saavutamiseks lisaks pingetele $t_{21} = t_{12}$ rakendada ka normalpinged pinged t_{kk} (vt. valemid (2.25)). Viimased võib omakorda jagada kahte ossa:

(i) ruumala muutust — Kelvini effekti — ära hoidev hüdrostaatiline tõmme, mis on võrdne normaalpingega t_{22};

(ii) keha proportsioonide muutust — Poyntingi effekti — ärahoidev osa $t_{\underline{kk}} - t_{22}$.

Kokkusurumatu materjali puhul lähtume olekuvõrrandist (2.7) ning valemeist (2.23) ja (2.24) ning saame pingetensori komponendid kujul

$$\begin{cases} t_{11} = -p + 2K^2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}, \quad t_{22} = -p - 2K^2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}, \quad t_{33} = -p, \\ t_{12} = 2K\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right), \quad t_{31} = t_{32} = 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Valides viimastes võrrandites $p = 0$ saame pinnad $X^3 = const.$ pingevabaks.

Kokkusurumatu materjali puhul loomulikult ei esine Kelvini effekti, kuid Poyntingi effekt on endiselt esindatud (vt. t_{11} ja t_{22} avaldisi).

Nii kokkusurutava kui kokkusurumatu materjali puhul

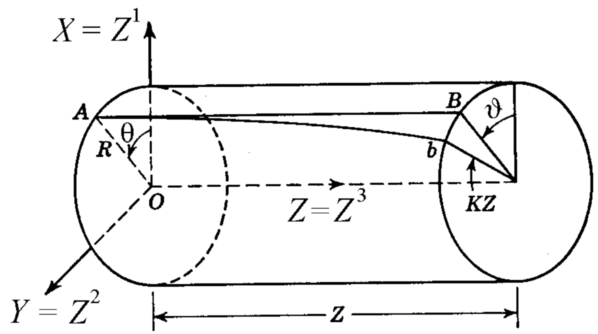
$$t_{11} - t_{22} = Kt_{12}. \tag{2.30}$$

2.2 Ringsilindri vääne

Ringsilindri ehk ümarvarda (ühtlast) väänet[5] esitab deformatsioon

$$r = R, \quad \vartheta = \Theta + KZ, \quad z = Z, \tag{2.31}$$

kus K on vääne varda pikkusühiku kohta. Antud juhul Euleri koordinaadid $x^k \leftrightarrow r, \vartheta, z$ ja Lagrange'i koordinaadid $X^K \leftrightarrow R, \Theta, Z$, kusjuures vastavalt definitsionile (2.31) $r = R$.



Joonis 2.2: Ümarvarda vääne

Silindriliste koordinaatide puhul meetrilised tensorid

$$[g_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad [G_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

Deformatsioonitensorid $c_{kl} = G_{KL}X^K{}_{,k}X^L{}_{,l}$ ja $\overset{-1}{c}{}^{kl} = G^{KL}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}$. Kuna antud on liikumise Lagrange'i kirjeldus, siis leiame algul $\overset{-1}{c}{}^{kl}$

[5] I. k. *Uniform torsion of a circular cilinder*

$$\left[\overset{-1}{c}{}^{kl}\right] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

Kuna kasutatavad olekuvõrrandid on esitatud segatensorite jaoks, siis tuleb järgmisena leida $\overset{-1}{c}{}^{k}{}_{l} = g_{lm}\overset{-1}{c}{}^{km}$ ja viimase pöördtensor $c^{k}{}_{l}$:

$$\left[\overset{-1}{c}{}^{k}{}_{l}\right] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \text{ ja } \left[c^{k}{}_{l}\right] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Fingeri deformatsioonitensori $\overset{-1}{c}{}^{k}{}_{l}$ invariandid

$$\mathrm{I} = \mathrm{II} = 3 + K^2r^2 \text{ ja } \mathrm{III} = 1. \tag{2.35}$$

Seega on deformatsioon isohooriline ning seetõttu vaatleme siin vaid kokkusurumatut materjali. Pärast indeksite ülestõstmist saame olekuvõrrandist (1.144)

$$\begin{cases} t^{11} = -p + 2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}} - 2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{II}}, \\ r^2t^{22} = -p + 2\left(1 + K^2r^2\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}} - 2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{II}}, \\ t^{33} = -p + 2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}} - 2\left(1 + K^2r^2\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{II}}, \\ t^{23} = 2K\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}} + \dfrac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{II}}\right), \quad t^{31} = t^{21} = 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Homogeense deformatsiooni puhul (vt. lk. 53) olid Cauchy liikumisvõrrandeist saadud tasakaaluvõrrandid ($p = const.$) puhul automaatselt rahuldatud, nüüd see aga nii pole. Cauchy I liikumisseaduse $(1.107)_1$ põhjal omab tasakaaluvõrrand omab kuju

$$t^{kl}{}_{;l} = 0. \tag{2.37}$$

Meil tuleb leida[6]

$$t^{kl}{}_{;l} = \dots \tag{2.40}$$

Seega tuleb leida järgmised kovariantsed osatuletised:

$$\begin{cases} t^{1l}{}_{;l} = \\ t^{2l}{}_{;l} = \\ t^{3l}{}_{;l} = \end{cases} \tag{2.41}$$

Viimaste valemite tuletamisel on arvestatud, et avaldiste (2.36) põhjal $r^2t^{22} = t^{11} + 2K^2r^2\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}}$ ja $t^{33} = t^{11} - 2K^2r^2\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{II}}$. Kuna avaldiste (2.35) põhjal sõltuvad invariandid I ja II vaid koordinaadist r, siis saavad tasakaaluvõrrandid (2.41) olla rahuldatud vaid juhul kui

[6]Kontravariantse tensori kovariantne tuletis —

$$A^{kl}{}_{;m} = A^{kl}{}_{,m} + \begin{Bmatrix} k \\ mn \end{Bmatrix} A^{nl} + \begin{Bmatrix} l \\ mn \end{Bmatrix} A^{kn} \tag{2.38}$$

Christoffeli sümbolid silindriliste koordinatide r, ϑ ja z puhul —

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = -r, \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, \text{ kõik teised } \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} = 0. \tag{2.39}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} \overbrace{\left(-p + 2\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} - 2\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} \right)}^{t^{11}} -2K^2 r \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0; \qquad \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{2.42}$$

Seega sõltub hüdrostaatiline pinge p vaid koordinaadist r ja seega saab ta määrata integreerides avaldist $(2.42)_1$, st.

$$p = 2\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} - K^2 \int_0^r r \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} dr \right) + C_1. \tag{2.43}$$

Konstandi C_1 määramiseks kasutame tingimust $t_{11} = 0$ silindri pinnal $r = a$, st. avaldiste $(2.36)_1$ ja (2.43) põhjal

$$C_1 = 2K^2 \int_0^a r \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} dr. \tag{2.44}$$

Asendame viimase võrdusse (2.43), ning tulemuse omakorda avaldistesse (2.36) ning saame

$$\begin{cases} t^{11} = -2K^2 \displaystyle\int_r^a r \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} dr, \\ r^2 t^{22} = 2K^2 \left(r^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} - \displaystyle\int_r^a r \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} dr \right), \\ t^{33} = -2K^2 \left(r^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \displaystyle\int_r^a r \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} dr \right), \\ t^{23} = 2K \left(\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} \right), \quad t^{31} = t^{21} = 0. \end{cases} \tag{2.45}$$

Silindri vabal otsal $z = l$ on ühiknormaal $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Seega pingevektori $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ komponendid $t^k_{(\mathbf{n})} = t^{kl} n_l$

$$t^1_{(\mathbf{n})} = 0, \quad t^2_{(\mathbf{n})} = t^{23}, \quad t^1_{(\mathbf{n})} = t^{33}. \tag{2.46}$$

Järelikult radiaalne pinge puudub, kuid eksisteerivad tangentsiaalne pinge (nihkepinge) ja silindri telje sihiline normaalpinge. Viimase läbi ilmnebki Pointingi effekt. Kuna eksperimentide põhjal on tuletised $\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}}$ ja $\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}}$ mittenegatiivsed, siis on pinge $t^{33} \leq 0$. Kui varda otsa ei rakendata seda pinget tasakaalustavat normaaljõudu, siis silindriline varras püüab väändel lüheneda. Lineaarses teoorias normaalpinged $t^{\underline{kk}}$ hüljatakse kui lõpmata väikesed (võrreldes pingega t^{23}).

Silindri otspinnal mõjuvate pindjõudude summaarse mõju (peavektori ja peamomendi) leidmiseks on vaja teada pingetensori füüsikalisi komponente. Teatavasti on kontravariantse tensori füüsikalised komponendid defineeritud järgmiselt

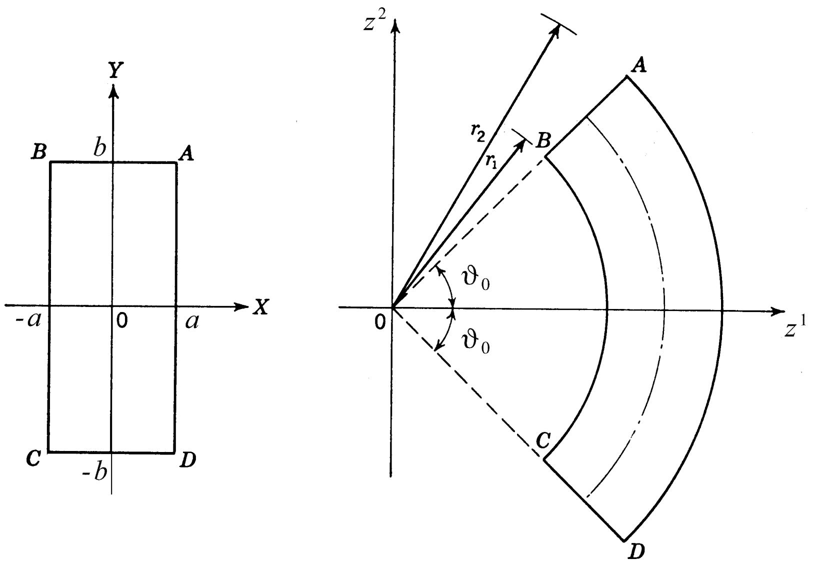
$$t^{(k)(l)} = \sqrt{g_{\underline{ll}} g_{\underline{kk}}} t^{kl}. \tag{2.47}$$

Seega $t^{(1)(1)} = t^{11}$, $t^{(2)(2)} = r^2 t^{22}$, $t^{(3)(3)} = t^{33}$ ja $t^{(2)(3)} = rt^{23}$ ning otspinnal mõjuvate pindjõudude $(0, rt^{23}, t^{33})$ peamoment ja peavektor avalduvad kujul

$$\begin{cases} M_z = 2\pi \displaystyle\int_0^a r^3 t^{23} dr, \\ N = 2\pi \displaystyle\int_0^a r t^{33} dr. \end{cases} \tag{2.48}$$

2.3 Ploki paine

Vaatleme ploki (tala) painet[7]. Lagrange'i koordinaatideks on valitud DRK ($X^1 \equiv X, X^2 \equiv Y, X^3 \equiv Z$) ja Euleri koordinaatideks silindrilised koordinaadid ($x^1 \equiv r, x^2 \equiv \vartheta, x^3 \equiv z$).



Joonis 2.3: Ploki paine — tasandid $X = -a$ ja $X = a$ deformeeruvad silindrilisteks pindadeks $r = r_1$ ja $r = r_2$; tasandid $Y = \pm b$ tasanditeks $\vartheta = \pm\vartheta_0$; tasandid $Z = const.$ tasanditeks $z = const.$

Joonisel 2.3 kujutatud deformatsioon on kirjeldatav valemitega

$$r = f(X), \qquad \vartheta = g(Y), \qquad z = h(Z). \tag{2.49}$$

[7]I. k. *Bending of a block.* Vt. ka pideva keskkonna mehaanika loengukonspekt paragrahv 2.10

Meetrilised tensorid

$$G_{KL} = G^{KL} = \delta_{KL},$$
$$\left[g_{kl}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left[g^{kl}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{(-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deformatsioonitensorid $c_{kl} = G_{KL}X^K{}_{,k}X^L{}_{,l}$, $\overset{-1}{c}{}^{kl} = G^{KL}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}$ ja $\overset{-1}{c}{}^k{}_l = g_{lm}\overset{-1}{c}{}^{km}$. Kui tähistame $f' = \partial f/\partial X$, $g' = \partial g/\partial Y$ ja $h' = \partial h/\partial Z$, siis

$$\begin{gathered} \left[x^k{}_{,K}\right] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & g' & 0 \\ 0 & 0 & h' \end{bmatrix}, \\ \left[\overset{-1}{c}{}^{kl}\right] = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}, \left[\overset{-1}{c}{}^k{}_l\right] = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{2.50}$$

Deformatsioonitensori $\overset{-1}{c}{}^k{}_l$ invariandid (arvestades, et $r \equiv f$)

$$\begin{cases} \mathrm{I} = f'^2 + r^2g'^2 + h'^2 = f'^2 + f^2g'^2 + h'^2, \\ \mathrm{II} = f'^2r^2g'^2 + f'^2h'^2 + r^2g'^2h'^2 = f^2f'^2g'^2 + f'^2h'^2 + f^2g'^2h'^2, \\ \mathrm{III} = f'^2r^2g'^2h'^2 = f^2f'^2g'^2h'^2. \end{cases} \tag{2.51}$$

Selleks, et protsess oleks isohooriline peab $\mathrm{III} = 1$. See on tagatud kui $ff' = A$, $g' = C$ ja $h' = D = 1/AC$, kus A, C, D on konstandid. Seega saame konkretriseerida funktsioonide f, g ja h sisu — tuues †
sisse veel ühe konstandi B võime avaldada

$$r = \sqrt{2AX + B}, \qquad \vartheta = CY, \qquad z = DZ. \tag{2.52}$$

Deformatsioonitensorid ja deformatsioonitensori $\overset{-1}{c}{}^k{}_l$ invariandid saavad nüüd kuju

$$\left[\overset{-1}{c}{}^k{}_l\right] = \begin{bmatrix} A^2/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & C^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix}, \quad \left[c^k{}_l\right] = \begin{bmatrix} r^2/A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/C^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/D^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{I} = \frac{A^2}{r^2} + C^2r^2 + D^2, \quad \mathrm{II} = \frac{1}{D^2} + \frac{r^2}{A^2} + \frac{1}{C^2r^2}, \quad \mathrm{III} = 1. \tag{2.53}$$

ning konstantide A, B, C ja D määramiseks on järgmised valemid (vt. joonis 2.3)

$$A = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4a}, \; B = \frac{r_2^2 + r_1^2}{2}, \; C = \frac{\vartheta_0}{b}, \; D = \frac{4ab}{\vartheta_0(r_2^2 - r_1^2)}. \tag{2.54}$$

Kuna tegu on isohoorilise deformatsiooniga, siis valime Ariano-Rivlini olekuvõrrandi (1.144) (kokkusurumatu materjali jaoks)

$$t^k{}_l = -p\delta^k{}_l + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}\overset{-1}{c}{}^k{}_l - 2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}c^k{}_l.$$

Arvestades deformatsioonitensorite avaldisi $(2.53)_{1,2}$ on seega pingete ja deformatsioonide vahelised seosed järgmised

$$\begin{cases} t^1{}_1 = -p + \dfrac{2A^2}{r^2}\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} - \dfrac{2r^2}{A^2}\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}, \\ t^2{}_2 = -p + 2C^2r^2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} - \dfrac{2}{C^2r^2}\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}, \\ t^3{}_3 = -p + 2D^2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} - \dfrac{2}{D^2}\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}, \\ t^k{}_l = 0, \quad k \neq l. \end{cases} \tag{2.55}$$

Tasakaaluvõrrandid $t^l{}_{k;l} = 0$ saadakse Cauchy I liikumisseadusest

(1.106). Seega on meil vaja leida kovariantsed osatuletised[8]

$$t^l{}_{k;l} = t^l{}_{k,l} - \begin{Bmatrix} n \\ kl \end{Bmatrix} t^l{}_n + \begin{Bmatrix} l \\ ln \end{Bmatrix} t^n{}_k, \tag{2.56}$$

$$\begin{cases} t^l{}_{1;l} = \\ t^l{}_{2;l} = \\ t^l{}_{3;l} = \end{cases} \tag{2.57}$$

Seega saavad tasakaaluvõrrandid kuju

$$\frac{\partial t^1{}_1}{\partial r} + \frac{t^1{}_1 - t^2{}_2}{r} = 0, \qquad \frac{\partial t^2{}_2}{\partial \vartheta} = \frac{\partial t^3{}_3}{\partial z} = 0. \tag{2.58}$$

Vastavalt valemitele $(2.53)_{3-5}$ avaldub siseenergia kujul $\rho_0\varepsilon = \Sigma(\mathrm{I}, \mathrm{II}) = \Sigma(r)$. Seega valemite (2.58) ja $(2.55)_{2,3}$ põhjal ka $p = p(r)$. Avaldame valemitest $(2.55)_{1,2}$

$$\frac{t^1{}_1 - t^2{}_2}{r} = 2\left(\frac{A^2}{r^3} - C^2r\right)\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} - 2\left(\frac{r}{A^2} - \frac{1}{C^2r^3}\right)\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}. \tag{2.59}$$

Teiselt poolt, kuna $\Sigma(\mathrm{I}, \mathrm{II}) = \Sigma(r)$, siis arvestades $(2.53)_{3-5}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Sigma}{\partial r} &= \frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial r} + \frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial r} = \ldots \\ &= -\frac{t^1{}_1 - t^2{}_2}{r} \end{aligned} \tag{2.60}$$

---

[8]Segatensori kovariantne tuletis —

$$A^k{}_{l;m} = A^k{}_{l,m} - \begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix} A^k{}_n + \begin{Bmatrix} k \\ mn \end{Bmatrix} A^n{}_l$$

Christoffeli sümbolid silindriliste koordinatide r, ϑ ja z puhul —

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = -r, \; \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, \text{ kõik teised } \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} = 0.$$

Avaldiste $(2.58)_1$ ja (2.60) põhjal $\frac{\partial}{\partial r}(t^1{}_1 - \Sigma) = 0$. Selle integreerimisel saame

$$t^1{}_1 = \Sigma + K, \tag{2.61}$$

kus K on konstant. Asendades tulemused (2.60) ja (2.61) olekuvõrrandeisse (2.55) saame pingetensorite normaalkomponentidele[9] avaldised

$$\begin{cases} t^1{}_1 = \Sigma + K, \\ t^2{}_2 = 2\left(C^2 r^2 - \dfrac{A^2}{r^2}\right)\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} - D^2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right) = r\dfrac{\partial\Sigma}{\partial r} + \Sigma + K, \\ t^3{}_3 = 2\left(D^2 - \dfrac{A^2}{r^2}\right)\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}_{\underset{c}{-1}}}\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} - r^2 C^2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right) + \Sigma + K. \end{cases} \tag{2.62}$$

Vastavalt saadud avaldistele on pinged kõverdunud pindadel $r = r_1$ ja $r = r_2$

$$t^1{}_1(r_1) = \Sigma(r_1) + K \quad \text{ja} \quad t^1{}_1(r_2) = \Sigma(r_2) + K. \tag{2.63}$$

Kui vaadeldav deformatsioon on saavutatud vaid tala otstesse rakendatud koormuste abil, siis peavad ülaltoodud pinged (2.63) olema nullid, st.,

$$\Sigma(r_1) = \Sigma(r_2) = -K. \tag{2.64}$$

Viimane tingimus tähendab ühtlasi, et $\mathrm{I}(r_1) = \mathrm{I}(r_2)$ ja $\mathrm{II}(r_1) = \mathrm{II}(r_2)$, kust

$$A = C r_1 r_2, \quad \text{ehk} \quad A^2 = \frac{r_1 r_2}{D}. \tag{2.65}$$

Seega jäävad vabalt valitaveteks konstantideks näiteks D ja r_1. †

[9]NB! Segatensori normaalkomponendid osutuvad ka füüsikalisteks komponentideks, sest

$$t^{(k)}{}_{(l)} = t^k{}_l \sqrt{\frac{g_{\underline{kk}}}{g_{\underline{ll}}}}.$$

Paindemoment tala paksususühiku kohta

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_z = \int_{r_1}^{r_2} r t^2{}_2 dr = \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_2^1\right) K + \int_{r_1}^{r_2} r\Sigma dr \tag{2.66}$$

Kui on teada Σ ja $\boldsymbol{\mathcal{M}}_z$ siis saab võrrandit (2.66) kasutada raadiuse r_1 määramiseks.

Deformeerunud oleku neutraalkiht $r = r_0$ on määratud tingimusega $c^2{}_2 = C^2 r^2 = 1$. Seega arvestades (2.65) $r_0^2 = D r_1 r_2$. Kui $D = 1$, siis $z = Z = const.$ ja $r_0^2 = r_1 r_2$. Sama tulemuse annab ka lineaarne teooria. ⋆

Poyntingi effekt avaldub jällegi selles, et pinge $t^3{}_3$ pole null. Järelikult tuleb puhta painde saavutamiseks rakendada vastassuunalist pindkoormust.

2.4 Lõplik tasapinnaline deformatsioon[10]

Suur hulk elastsusteooria ülesandeid on oma olemuselt tasapinnalised. Nende lahendamine lihtsustub tunduvalt kui esitada siirdeväli kujul

$$x^a = x^a(X^1, X^2), \quad x^3 = \lambda X^3, \tag{2.67}$$

kus λ on konstatant. Tasapinnalise deformatsiooni puhul indeksid a, b, c, d omavad väärtusi 1 ja 2. Esimene avaldistest (2.67) kirjeldab deformatsioone (x^1, x^2) tasapinnas ja teine ühtlast pikenemist x^3 sihis. Siinjuures eeldatakse, et $x^3 \perp (x^1, x^2)$ tasapinnaga. Sobivaks kõverjooneliseks koordinaatsüsteemiks selliste protsesside kirjeldamisel on on näiteks silindriline koordinaatsüsteem. Meetriline tensor ja deformatsioonitensorid on nüüd esitatavad kujul

$$\left[g_{kl}\right] = \begin{bmatrix} [g_{ab}] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\overset{-1}{c}{}^k{}_l\right] = \begin{bmatrix} \left[\overset{-1}{c}{}^a{}_b\right] & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \left[c^k{}_l\right] = \begin{bmatrix} [c^a{}_b] & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} \end{bmatrix}. \tag{2.68}$$

Siinjuures on tensorid g_{ab}, $\overset{-1}{c}{}^a{}_b$ ja $c^a{}_b$ vaid muutujate x^1 ja x^2 funktsioonid. Dünaamika ülesannete puhul võivad x^a ja λ sõltuda lisaks ka ajast t.

Deformatsioonitensori $\overset{-1}{c}{}^k{}_l$ invariandid saab nüüd avaldada kujul ⋆

$$\begin{cases} \mathrm{I} = \overset{-1}{c}{}^k{}_k = \overset{-1}{c}{}^a{}_a + \lambda^2 = \mathrm{I}_1 + \lambda^2, \\ \mathrm{II} = \ldots = \lambda^2 \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \lambda^2, \\ \mathrm{III} = \ldots = \lambda^2 \mathrm{I}_2, \end{cases} \quad \text{kus} \quad \begin{cases} \mathrm{I}_1 = \overset{-1}{c}{}^a{}_a, \\ \mathrm{I}_2 = \left|\overset{-1}{c}{}^a{}_b\right|. \end{cases} \tag{2.69}$$

[10] Lõplikku mõistetakse siin kui vastandit lõpmata väikesele. I. k. *Finite plane deformation.*

Cayley-Hamiltoni teoreemi[11] põhjal √

$$\overset{-1}{c}{}^a{}_c \overset{-1}{c}{}^c{}_b - \mathrm{I}_1 \overset{-1}{c}{}^a{}_b + \mathrm{I}_2 \delta^a{}_b = 0 \mid \cdot c^b{}_d \Rightarrow \tag{2.70}$$

$$\mathrm{I}_2 c^a{}_b = \mathrm{I}_1 \delta^a{}_b - \overset{-1}{c}{}^a{}_b \tag{2.71}$$

Asendades (2.69) ja (2.71) isotroopse kokkusurutava keskkonna olekuvõrrandeisse (vt. Fingeri olekuvõrrand (1.142), (1.143) lk. 49), saame

$$\begin{cases} t^a{}_b = \dfrac{2}{\lambda\sqrt{\mathrm{I}_2}} \left[\left(\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \lambda^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} \right) \overset{-1}{c}{}^a{}_b + \left(\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \lambda^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{III}} \right) \mathrm{I}_2 \delta^a{}_b \right], \\ t^3{}_3 = \dfrac{2\lambda}{\sqrt{\mathrm{I}_2}} \left(\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \mathrm{I}_1 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \mathrm{I}_2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{III}} \right), \qquad t^a{}_3 = t^3{}_a = 0. \end{cases} \tag{2.72}$$

Nüüd oleks mõttekas esitada $\Sigma = \Sigma(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) = \Sigma(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \lambda^2)$. Seega avaldiste (2.69) põhjal •

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_1} = \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \lambda^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}}, \qquad \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_2} = \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \lambda^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{III}}, \\ \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \lambda^2} = \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \mathrm{I}_1 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \mathrm{I}_2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{III}}. \end{cases} \tag{2.73}$$

Viimase kahe avaldise põhjal

$$\begin{cases} t^a{}_b = \dfrac{2}{\lambda\sqrt{\mathrm{I}_2}} \left(\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_1} \overset{-1}{c}{}^a{}_b + \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_2} \mathrm{I}_2 \delta^a{}_b \right), \\ t^3{}_3 = \dfrac{2\lambda}{\sqrt{\mathrm{I}_2}} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \lambda^2}, \qquad t^a{}_3 = t^3{}_a = 0. \end{cases} \tag{2.74}$$

[11] Maatriks $[c^k{}_l]$ rahuldab karakteristlikku võrrandit

$$\mathbf{c}^3 - \mathrm{I}_c \mathbf{c}^2 + \mathrm{II}_c \mathbf{c} - \mathrm{III}_c \mathbf{I} = 0,$$

kus $\mathbf{c} \equiv [c^k{}_l]$ ja $\mathbf{I}$ on ühikmaatriks. Tensorkujul

$$c^k{}_m c^m{}_n c^n{}_l - \mathrm{I}_c c^k{}_m c^m{}_l + \mathrm{II}_c c^k{}_l - \mathrm{III}_c \delta^k{}_l = 0$$

Kokkusurumatu materjali puhul III $= \lambda^2 \mathrm{I}_2 = 1$ ja seega $\Sigma = \Sigma(\mathrm{I}_1, \lambda^2)$ ning analoogselt valemitega (2.74) saame Ariano-Rivlini olekuvõrrandeist (1.144) (lk. 49)

$$\begin{cases} t^a{}_b = -p\delta^a{}_b + 2\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_1} \overset{-1}{c}{}^a{}_b, \\ t^3{}_3 = -p + 2\lambda^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \lambda^2}, \qquad t^a{}_3 = t^3{}_a = 0. \end{cases} \tag{2.75}$$

Cauchy I liikumisseadus $t^{kl}{}_{;l} + \rho(f^k - a^k) = 0$ saab nüüd tasakaaluvõrrandina kuju

$$t^{ab}{}_{;b} = 0. \tag{2.76}$$

Seega tuleb kokkusurutava materjali puhul lahendada võrrand (2.76) koos olekuvõrrandiga (2.74) ja kokkusurumatu materjali puhul koos olekuvõrrandiga (2.75).

Pindjõud olid esitatud valemiga $t^k{}_{(\mathbf{n})} = t^{lk} n_l$. Nüüd

$$t^a{}_{(\mathbf{n})} = t^{ba} n_b; \qquad t^3{}_{(3)} = t^{33}. \tag{2.77}$$

Järgnevalt toome sisse Airy' pingefunktsiooni, et veelgi lihtsustada tasapinnalise deformatsiooniülesande lahendamist. Pideva keskkonna mehaanika kursuses on näidatud, et tasakaaluvõrrandile $t^{kl}{}_{;l} = 0$ saab anda kuju

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} \mathbf{t}^k \right) = 0, \text{ kus pingevektor } \mathbf{t}^k = t^{kl} \mathbf{g}_l. \tag{2.78}$$

Antud juhul saame esitada pingevektori kujul

$$\mathbf{t}^a = t^{ba} \mathbf{g}_b, \qquad \mathbf{t}^3 = t^{33} \mathbf{g}_3. \tag{2.79}$$

Kuna g ja $\mathbf{t}^a$ on vaid x^1 ja x^2 funktsioonid, siis lihtsustub $(2.78)_1$ kujule

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \left(\sqrt{g} \mathbf{t}^a \right) = 0. \tag{2.80}$$

Võrrand (2.80) on rahuldatud kui pingevektori $\mathbf{t}^a$ avaldada kujul

$$\mathbf{t}^a = \epsilon^{ca} \boldsymbol{\chi}_{,c}\,, \text{ kus} \begin{cases} \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0 \\ \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \end{cases} \tag{2.81}$$

ja $\boldsymbol{\chi}$ on vektor tasandil $x^3 = 0$, st.

$$\boldsymbol{\chi} = \chi^b \mathbf{g}_b \text{ ja } \frac{\partial \chi}{\partial x^c} \equiv \boldsymbol{\chi}_{,c} = \chi^b{}_{;c} \mathbf{g}_b. \tag{2.82}$$

Kokku annavad avaldised $(2.81)_1$ ja $(2.82)_2$

$$\mathbf{t}^a = \epsilon^{ca} \chi^b{}_{;c} \mathbf{g}_b. \tag{2.83}$$

Kuna kovariantne osatuletis on võetud tasandil, kus $x^3 = 0$, siis saavad Christoffeli II liiki sümbolid kuju

$$\left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\} = g^{ad}[bc, d] = \frac{1}{2} g^{ad} \left(g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d} \right). \tag{2.84}$$

Avaldiste (2.79) ja (2.83) põhjal pingetensor

$$t^{ab} = \epsilon^{cb} \chi^a{}_{;c}. \tag{2.85}$$

Cauchy II liikumisseaduse põhjal peab pingetensor olema sümmeetriline. See on tagatud, kui tuua sisse Airy' pingefuntsioon $\phi(x^1, x^2)$ selliselt, et †

$$\chi^a = \epsilon^{da}\phi_{,d}. \tag{2.86}$$

Nüüd

$$t^{ab} = \epsilon^{cb}\epsilon^{da}\phi_{;dc} = \epsilon^{bc}\epsilon^{ad}\phi_{;cd}. \tag{2.87}$$

Võrrandi (2.87) lahendi saab esitada kujul

$$\phi_{;}{}^{a}{}_{b} = \epsilon^{ac}\epsilon_{bd}t^{d}{}_{c} = t^{c}{}_{c}\delta^{a}{}_{b} - t^{a}{}_{b}. \tag{2.88}$$

Asendades $(2.74)_1$ võrrandisse (2.88) saame pingefunktsiooni avaldise kokkusurumatu materjali jaoks

$$\phi_{;}{}^{a}{}_{b} = \frac{2}{\lambda\sqrt{\mathrm{I}_2}}\left[\left(\mathrm{I}_1\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_1} + \mathrm{I}_2\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_2}\right)\delta^{a}{}_{b} - \frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_1}\overset{-1}{c}{}^{a}{}_{b}\right] \tag{2.89}$$

Asendades aga $(2.75)_1$ võrrandisse (2.88) saame pingefunktsiooni avaldise kokkusurutava materjali jaoks

$$\phi_{;}{}^{a}{}_{b} = \left(-p + 2\mathrm{I}_1\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_1}\right)\delta^{a}{}_{b} - 2\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_1}\overset{-1}{c}{}^{a}{}_{b}. \tag{2.90}$$

Avaldistest (2.89) on võimalik ellimineerida kas $\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_1}$ või $\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_2}$ kui võtta arvesse, et

$$\phi_{;}{}^{a}{}_{a} = \frac{2}{\lambda\sqrt{\mathrm{I}_2}}\left(\mathrm{I}_1\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_1} + 2\mathrm{I}_2\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_2}\right). \tag{2.91}$$

Vastavad alternatiivsed kujud valemile (2.89) on

$$\begin{aligned}
&\phi_{;}{}^{a}{}_{b} - \frac{1}{2}\phi_{;}{}^{c}{}_{c}\delta^{a}{}_{b} = \frac{2}{\lambda\sqrt{\mathrm{I}_2}}\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_1}\left(\frac{\mathrm{I}_1}{2}\delta^{a}{}_{b} + \overset{-1}{c}{}^{a}{}_{b}\right) \quad \text{ja} \\
&\phi_{;}{}^{a}{}_{b} - \left(\delta^{a}{}_{b} - \frac{1}{\mathrm{I}_1}\overset{-1}{c}{}^{a}{}_{b}\right)\phi_{;}{}^{c}{}_{c} = \frac{4\sqrt{\mathrm{I}_2}}{\lambda\mathrm{I}_1}\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_2}\left(-\frac{\mathrm{I}_1}{2}\delta^{a}{}_{b} + \overset{-1}{c}{}^{a}{}_{b}\right).
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Kokkusurumatu materjali puhul saame võrrandist (2.90)

$$\phi_{;}{}^{a}{}_{a} = -2p + 2\mathrm{I}_1\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_1} \tag{2.93}$$

ja avaldistest (2.90) võime ellimineerida kas p või $\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_1}$. Vastavad alterrnatiivsed kujud on järgmised:

$$\begin{aligned}
&\phi_{;}{}^{a}{}_{b} - \frac{1}{2}\phi_{;}{}^{c}{}_{c}\delta^{a}{}_{b} = 2\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}_1}\left(\frac{\mathrm{I}_1}{2}\delta^{a}{}_{b} - \overset{-1}{c}{}^{a}{}_{b}\right) \quad \text{ja} \\
&\phi_{;}{}^{a}{}_{b} - \left(\delta^{a}{}_{b} - \frac{1}{\mathrm{I}_1}\overset{-1}{c}{}^{a}{}_{b}\right)\phi_{;}{}^{c}{}_{c} = \frac{2p}{\mathrm{I}_1}\left(\frac{\mathrm{I}_1}{2}\delta^{a}{}_{b} - \overset{-1}{c}{}^{a}{}_{b}\right).
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Kuna saadud võrrandid sisaldavad deformatsioonitensorit $\overset{-1}{c}{}^{a}{}_{b}$, siis tuleb enne ülesande lahendamist rahuldada pidevus ehk sobivustingimused[12]

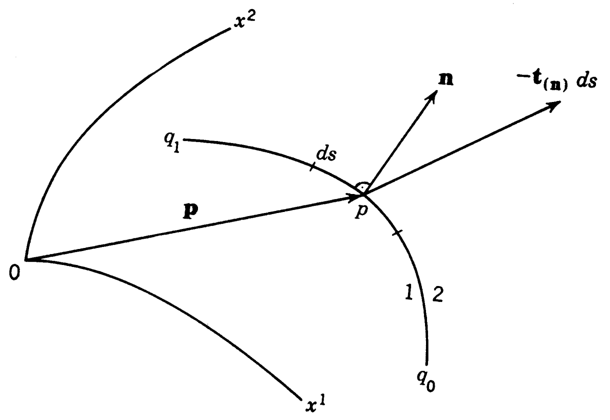
$$R^{\left(\overset{-1}{c}\right)}{}_{klmn} = 0. \tag{2.95}$$

Vaadeldaval tasapinnalisel juhul vaid komponent R_{1212} pole samaselt null. Seega sobivustingimuste rahuldamiseks tuleb avaldada $\overset{-1}{c}{}^{a}{}_{b}$ avaldistest (2.89) või (2.90) (või nende alternatiivkujudest (2.92) või (2.94)) sõltuvana Airy' pingefunktsioonist ϕ ning seejärel asendada saadud tulemus tingimusse $R^{\left(\overset{-1}{c}\right)}{}_{1212} = 0$. Tulemuseks on neljandat järku mittelineaarne võrrand ϕ suhtes. Lineaarses teoorias on selleks biharmooniline võrrand $\nabla^4\phi = 0$.

Järgnevalt püüame selgitada suuruste $\boldsymbol{\chi}$ ja ϕ füüsikalist sisu. Leiame summaarse jõu millega mõjub piirkond 1 piirkonnale 2 läbi kaare q_0q_1. Jõud $\mathbf{r}$ on esitatud x^3 pikkusühiku kohta. Lähtume sellest, et

$$\mathbf{r} = -\int_{q_0}^{q_1}\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}ds. \tag{2.96}$$

[12] I. k. *Compatibility conditions* (vt. pideva keskkonn amehaanika loengukonspekt)



Joonis 2.4: Suuruste $\boldsymbol{\chi}$ ja ϕ füüsikaline sisu — piirkondade 1 ja 2 vastastikune mõju.

Kuna

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}^a n_a = \mathbf{t}^a \underbrace{\epsilon_{ab}\frac{dx^b}{ds}}_{n_a}. \tag{2.97}$$

Asendades (2.97) ja (2.81) avaldisse (2.96) saame

$$\begin{aligned} &\mathbf{r} = -\int_{q_0}^{q_1} \epsilon^{ca}\boldsymbol{\chi}_{,c}\epsilon_{ab}\frac{dx^b}{ds}ds = -\int_{q_0}^{q_1}\boldsymbol{\chi}_{,b}dx^b = \boldsymbol{\chi} \quad \text{ehk} \\ &\mathbf{r} = \boldsymbol{\chi} = \chi^a\mathbf{g}_a = \epsilon^{ba}\phi_{,b}\mathbf{g}_a. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Jõuga analoogne moment

$$\mathbf{m} = \left(p^a\phi_{,a} - \phi\right)\mathbf{g}^3, \tag{2.99}$$

st momendi moodul

$$m = p^a\phi_{,a} - \phi. \tag{2.100}$$

Kui vaadeldava piirkonna rajajoon on koormusvaba, siis $\boldsymbol{\chi} = 0$ kõigis rajapunktides Seega avaldise $(2.98)_2$ põhjal ka $\phi_{,1} = \phi_{,2} = 0$ ja $\phi = const.$ kõigis rajapunktides.

2.5 Elastsuskonstantide eksperimentaalne määramine

2.5.1 Sissejuhatus

Klassikalises elastsusteoorias vaadeldakse homogeenseid isotroopseid lineaarselt elastseid kehasid ja kasutatakse kahte materjalikonstanti — nn. Lamé konstanti — λ_e ja μ_e ning olekuvõrrandina üldistatud Hooke'i seadust

$$t^k{}_l = \lambda_e \tilde{e}^m{}_m \delta^k{}_l + 2\mu_e \tilde{e}^k{}_l. \tag{2.101}$$

Nende konstantide määramine on suhteliselt lihtne. On vaja sooritada vaid kaks eksperimenti — tõmme ja nihe. Mittelineaarse teooria olekuvõrrandid homogeensele isotroopsele materjalile omavad aga tunduvalt keerukamat kuju (vt. alajaotus 1.3 lk. 48). Kokkusurutava materjali puhul näiteks

$$t^k{}_l = b_{-1}\overset{-1}{c}{}^k{}_l + b_0\delta^k{}_l + b_1 c^k{}_l,$$

kus konstandid b_α sõltuvad deformatsiooonitensori invariantidest I, II ja III. Elastsuskonstantide määramine on siin tunduvalt keerulisem, sest keskkonna mittelineaarsuse tõttu ei saa kasutada superpositsiooni printsiipi. Koefitsendid b_α püütakse määrata läbi potentsiaali Σ. See lihtsustab küll asja, kuid kokkusurutavate materjalide puhul on praktiliste tulemuste saamine, vähemalt Eringeni andmeil, ülimalt problemaatiline.

Alljärgnevalt vaatleme kokkusurumatuid materjale, mille olekuvõrrandid avalduvad kujul (1.144)

$$t^k{}_l = -p\delta^k{}_l + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}\overset{-1}{c}{}^k{}_l - 2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}c^k{}_l, \tag{2.102}$$

kus invariandid vastavad deformatsioonitensorile $\overset{-1}{c}{}^k{}_l$, $\Sigma = \Sigma(\mathrm{I}, \mathrm{II})$ ja $\mathrm{III} = 1$. Kuna deformeerumata olekus $\mathrm{I} = \mathrm{II} = 3$, siis on leitud, et potentsiaali Σ võib esitada järgmise rea kujul

$$\Sigma = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn}(\mathrm{I}-3)^m(\mathrm{II}-3)^n, \tag{2.103}$$

kus A_{mn} on konstandid ja $A_{00}=0$. Kuna väikeste deformatsioonide puhul on suurused $\mathrm{I}-3$ ja $\mathrm{II}-3$ väikesed, siis piirdutakse reaga

$$\Sigma = A_{10}(\mathrm{I}-3) + A_{01}(\mathrm{II}-3). \tag{2.104}$$

Kummilaadsete materjalide puhul kasutatakse potentsiaali

$$\Sigma = A_{10}(\mathrm{I}-3). \tag{2.105}$$

Selliseid materjale nimetatakse inglise keeles «neo-hookean materials.» Kui (2.105) ei rahulda siis kasutatakse ka potentsiaali

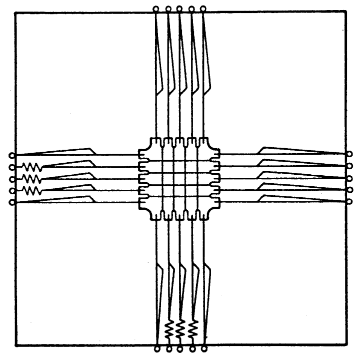
$$\Sigma = A_{10}(\mathrm{I}-3) + f(\mathrm{II}-3), \tag{2.106}$$

kus f sõltub vaid argumendist II.

Järgnevalt esitatakse ülevaade mõningatest eksperimentidest, mis algselt on teostatud Rivlini ja Sandersi poolt. Nimetatud teadlased korraldasid terve rea eksperimente «kummist lehega», kus tekitati selliseid homogeenseid deformatsioone, kus üks invariantidest I või II omas fikseeritud väärtust. Eksperimentideseeria tulemusena saadi olekuparameetrite $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}$ ja $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}$ ning invariantide I ja II vahelised sõltuvused. Nii suurte kui väikeste deformatsioonide puhul ilmnes eksperimentaalseid ebatäpsusi, näiteks kui invariandid I ja II olid viiest väiksemad, muutusid tulemused väga tundlikuks eksperimendi vigade suhtes. Olekuvõrrandis (2.102) esinev tundmatu rõhk p määrati rajatingimustest.

2.5.2 Puhas homogeenne deformatsioon (kokkusurumatu lehe ühtlane laienemine)

Katse skeem on kujutatud joonisel 2.5. Ruudukujulist õhukest kummist lehte tõmmatakse risti külgedega. Pikenemiskoefitsentide λ_1 ja λ_2 arvutamiseks tuleb mõõta lehele joonistatud ruutude külgede pikkused deformeerunud olekus. Ruudu külgede pikkusühiku kohta mõjuvad jõud t_1 ja t_2 saadakse mõõtes vedrudes mõjuvad jõud.



Joonis 2.5: Puhta homogeense deformatsiooni eksperiment — «kummist lehe» ühtlane tõmme ristuvates suundades.

Lähtume olekuvõrrandeist (2.16), st.

$$t_{\underline{kk}} = -p + 2\lambda_k^2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} - \frac{2}{\lambda_k^2}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}. \tag{2.107}$$

Kuna pindadel $z=\pm H/2$ (kus H on lehe paksus) $t_{33}=0$, siis saame viimasest avaldisest ellimineerida p —

$$\begin{cases} t_{11} = 2\left(\lambda_1^2 - \dfrac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right)\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \lambda_2^2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right), \\ t_{22} = 2\left(\lambda_2^2 - \dfrac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right)\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \lambda_1^2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right), \\ t_{33} = t_{kl} = 0, \quad k\neq l \end{cases} \tag{2.108}$$

Kokkusurumatuse tõttu $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. Seega invariandid

$$\mathrm{I} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}, \quad \mathrm{II} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2, \quad \mathrm{III} = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 1. \tag{2.109}$$

Lehe serva pikkusühiku kohta mõjuvad jõud t_1 ja t_2 avalduvad järgmiselt

$$t_1 = t_{11}\frac{H}{\lambda_1}, \qquad t_2 = t_{22}\frac{H}{\lambda_2}, \tag{2.110}$$

kus nii serva pikkus kui lehe paksus H on mõõdetud deformeerumata olekus. Avaldistest (2.108) ja (2.110) saame avaldada $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}$ ja $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}$ sõltuvana jõududest t_1 ja t_2 —

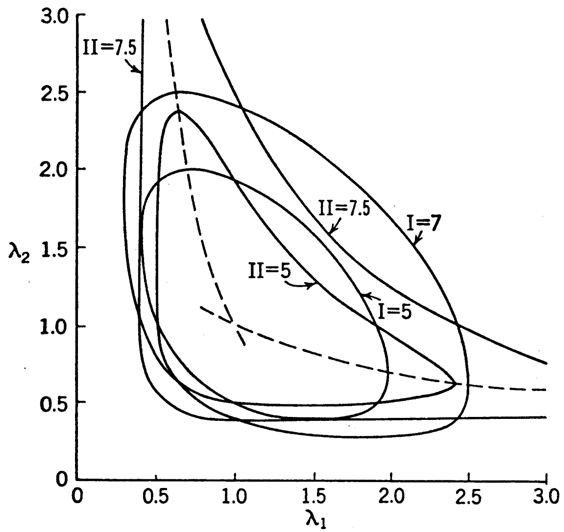
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} = \dfrac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left[\dfrac{\lambda_1^3(t_1/H)}{\lambda_1^2-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}} - \dfrac{\lambda_2^3(t_2/H)}{\lambda_2^2-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}\right] \\ \dfrac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} = \dfrac{1}{2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}\left[\dfrac{\lambda_1(t_1/H)}{\lambda_1^2-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}} - \dfrac{\lambda_2(t_2/H)}{\lambda_2^2-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}\right] \end{cases} \tag{2.111}$$

Mõõtes nüüd t_1 ja t_2 etteantud λ_1 ja λ_2 puhul, saab leida vastavad $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}$ ja $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}$ väärtused. Avaldiste (2.109) kaudu saame omakorda vastavad I ja II väärtused ning meil on võimalik esitada $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}$ ja $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}$ kui invariantide I ja II funktsioone.

Eksperimendi käigus muudeti λ_1 ja λ_2 väärtusi nii, et emb-kumb, kas I või II oli jääv. Avaldise (2.109) põhjal

$$\begin{cases} \lambda_2^2 = \dfrac{1}{2}\left\{\left(\mathrm{I}-\lambda_1^2\right) \pm \sqrt{\left(\mathrm{I}-\lambda_1^2\right)^2 - 4\lambda_1^{-2}}\right\}, \quad \mathrm{I} = const. \\ \lambda_2^2 = \dfrac{1}{2\lambda_1^2}\left\{\left(\mathrm{II}-\lambda_1^{-2}2\right) \pm \sqrt{\left(\mathrm{II}-\lambda_1^{-2}\right)^2 - 4\lambda_1^2}\right\}, \quad \mathrm{II} = const. \end{cases} \tag{2.112}$$

Seega pole pikenemiskoefitsente λ_1 ja λ_2 võimalik suvaliselt ette anda — fikseeritud I ja II puhul on tegu suletud kõveratega $\lambda_1 - \lambda_2$ tasandil (vt. joonis 2.6). Punktiirjooned esitavad kõveraid $\lambda_2 = \lambda_1^{-2}$ ($t_2 = 0$) ja $\lambda_1 = \lambda_2^{-2}$ ($t_1 = 0$), mis vastavad tõmbele servade sihis.



Joonis 2.6: Pikenemiskoefitsentide λ_1 ja λ_2 vaheline sõltuvus invariantide I ja II erinevate väärtuste puhul.

Tehtud eksperimendid näitasid, et

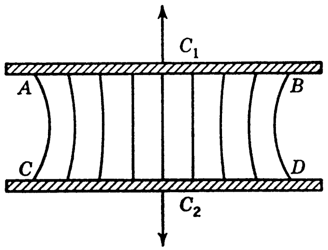
- $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}$ on konstantne piirkonnas $5 \leq \mathrm{I} < 12$ ja $5 \leq \mathrm{II} \leq 30$ ning $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ on vaid II funktsioon;
- suhe $(\partial\Sigma/\partial\mathrm{II})/(\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}) \approx 1/8$ invariandi II väikeste väärtuste jaoks ning kahanes kiiresti suuremate puhul;
- avaldist (2.106) võib kasutada siseenergia Σ ja invariantide vahelise sõltuvuse aproksimeerimiseks (mõistlikes piires).

2.5.3 Puhas nihe

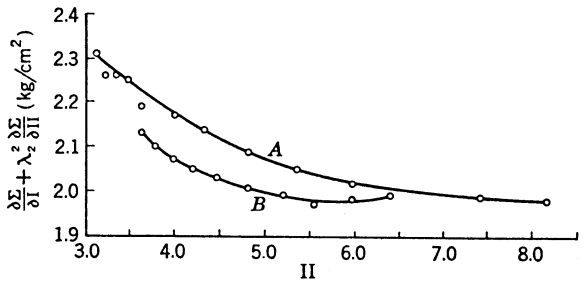
Puhas nihe[13] on selline homogeenne deformatsioon, mille puhul üks pikenemiskoefitsentidest, näiteks λ_2, hoitakse konstantne ja teisi kahte muudetakse. Valemite $(2.108)_1$ ja (2.110) põhjal

$$t_1 = 2H\left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2^2}\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \lambda_2^2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right). \tag{2.113}$$

Hoides nüüd $\lambda_2 = const.$ ja mõõtes t_1 erinevate λ_1 puhul saame joonistada suuruse $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + \lambda_2^2\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ sõltuvana teisest invariandist II. Kuna suurusel $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}$ leiti olema konstantne väärtus $5 \le \mathrm{I} \le 12$ ja $5 \le \mathrm{II} \le 30$ puhul, siis saame esitada ka $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ ja II vahelise sõltuvuse.



Joonis 2.7: Puhta nihke eksperiment.



Joonis 2.8: Suurus $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + \lambda_2^2\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ sõltuvana invariandist II. Kõver A vastab puhtale nihkele ($\lambda_2 = 1$) ja kõver B nihkele koos tõmbega ($\lambda_2 = 0,776$).

Joonis 2.7 kirjeldab vaadeldavat eksperimenti. Kitsas õhuke kummiriba on kinnitatud klambrite C_1 ja C_2 vahele. Kui rakendada risti klambritega jõud t_1 (mõõdetunan pikkusühiku kohta) siis tekib joonisel kujutatud deformatsioon. Riba keskosa deformatsioon on aproksimeeritav puhta nihke kaudu. Joonisel 2.8 esitab kõver A katsetulemusi $\lambda_2 = 1$ jaoks ja kõver B $\lambda_2 = 0,776$ jaoks. Eelmisena vaadeldud eksperimendis tuvastati, et $(\partial\Sigma/\partial\mathrm{II})/(\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}) = 1/8$ kui $\mathrm{II} = 5$. $\lambda_2 = 1$ puhul saab nüüd joniselt 2.8 määrata suuruse $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ väärtuse ($\lambda_2 = 1$!). Edasi saab leida, et $\mathrm{II} = 5$ puhul $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} = 1,84$ kg/cm^2 ja $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II} = 0,23$ kg/cm^2. Eelmise eksperimendi põhjal eeldatakse, et $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} = 1,84$ kg/cm^2 $= const.$ ja $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ sõltub vaid invariandist II. Seega saab määrata $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ väärtused suvalise II väärtuse jaoks.

[13]I. k. *Pure shear*

Kõver B joonisel 2.8 esitab eksperimendi tulemusi $\lambda_2 = 0,776$ jaoks. Need tulemused lähevad hästi kokku tulemustega, mis saadakse avaldisest $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + 0,776^2\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$, kui suurused $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}$ ja $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ võtta eksperimendist, kus $\lambda_2 = 1$.

2.5.4 Tõmme

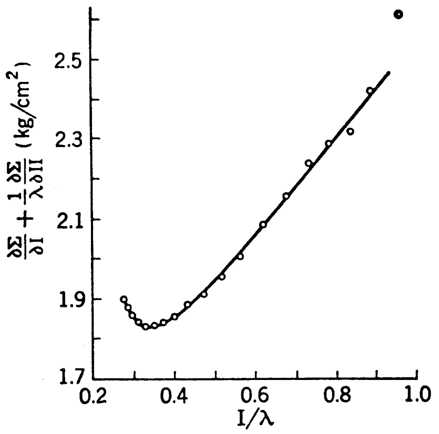
Tõmbe[14] puhul $t_{22} = t_{33} = 0$. Seega võttes avaldises $(2.108)_2$ $t_{22} = 0$ saame $\lambda_1 = \lambda_2^{-2} \overset{\text{tähist}}{=} \lambda$. Avaldis $(2.108)_1$ ja invariandid saavad nüüd kuju

$$t_{11} = 2\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{II}}\right), \quad \mathrm{I} = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}, \quad \mathrm{II} = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}. \tag{2.114}$$

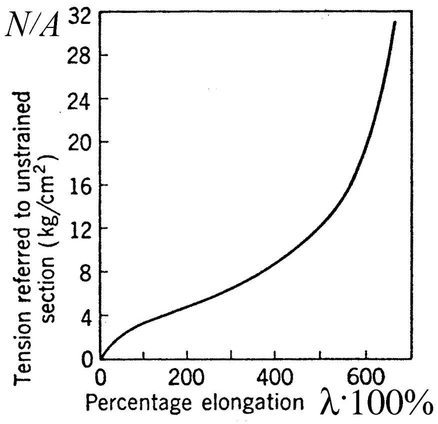
Katsekehaks on siin ühtlase ristlõikega «kummikang». Rakendatav pikijõud $N = At_{11}/\lambda$ (A — ristlõike algpindala). Seega mõõtes jõu N iga λ jaoks saame arvutada $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$. Tulemused on esitatud joonisel 2.9 (NB! horisontaalteljel on $1/\lambda$). Kui kasutati eelmistes eksperimentides saadud suuruste $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}$ ja $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ väärtusi, siis leiti, et avaldise $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ väärtus ühtis väga hästi eksperimendi tulemustega.

Joonisel 2.10 on esitatud tõmbejõud jagatuna algpindalaga sõltuvana pikenemiskoefitsendist λ.

[14]I. k. *Simple extention*



Joonis 2.9: Suuruste $1/\lambda$ ja $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ vaheline sõltuvus.



Joonis 2.10: Tõmbejõu sõltuvus pikenemiskoefitsendist

2.5.5 Ühtlane kahedimensionaalne tõmme

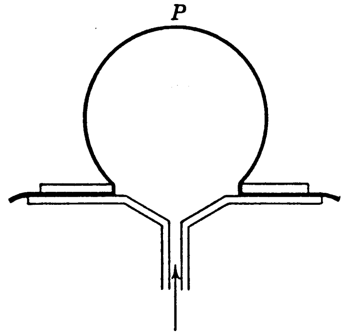
Tähistame

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda_3 = 1/\lambda^2 = \lambda', \text{ ehk } \lambda^2 = 1/\lambda'. \tag{2.115}$$

Joonisel 2.11 kujutatud katse puhul puhutakse servadest kinnitatud kummikile alla õhku ja saavutatakse meid huvitav deformatsioon vaadeldava katsekeha keskosas. Joonis 2.12 esitab suuruste $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}+1/\lambda'\cdot\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ ja $1/\lambda'$ vahelist sõltuvust (NB! kohal $1/\lambda' = 1$ toimub skaala muutus). Tabelis 1 on esitatud $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ ja II vaheline sõltuvus, eeldades, et $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} = const$. Rõhk p keras ja tõmme T pikkusühiku kohta deformeeritud kiles (punktis P) on seotud valemiga

$$p = \frac{2T}{r}, \tag{2.116}$$

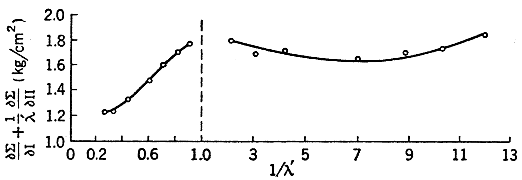
kus r on kõverusraadius punktis P.



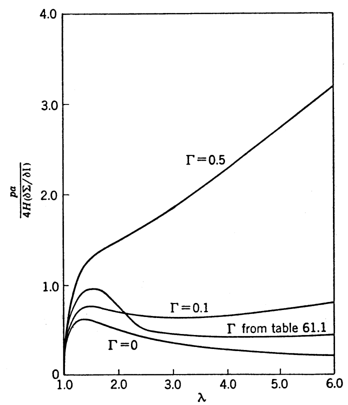
Joonis 2.11: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme

Tabel 1

$\lambda^2 \equiv 1/\lambda'$	II	$\frac{\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}}{\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}}$
0,5	4,25	0,16
0,6	3,69	0,26
0,7	3,35	0,33
0,8	3,14	0,39
3	9,67	0,12
5	25,4	0,06
7	49,3	0,04
9	81,2	0,03
11	121	0,035



Joonis 2.12: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme — suuruste$\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}+1/\lambda'\cdot \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ ja $1/\lambda'$ vaheline sõltuvus.



Joonis 2.13: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme — suuruste p ja λ vaheline sõltuvus.

Kuna deformeeritud olekus on kile paksus H/λ^2, siis saame valemitest (2.108), (2.115) ja (2.116), et

$$p = \frac{2Ht_{11}}{r\lambda^2} = \frac{4H}{r}\left(1 - \frac{1}{\lambda^6}\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}} + \lambda^2\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{II}}\right). \qquad (2.117)$$

Joonise 2.12 ja tabeli 1 koostamisel ongi kasutatud valemit (2.117), st. mõõdetakse p ja r iga λ jaoks ning leitakse suurus $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}+1/\lambda'\cdot\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$. Joonis 2.13 esitab rõhu p ja pikenemise λ vahelisi seoseid erinevate $\Gamma = (\partial\Sigma/\partial\mathrm{II})/(\partial\Sigma/\partial\mathrm{I})$ väärtuste jaoks (a — sfäärilise «õhupalli» algraadius.)

Näide. Õhupalli täispuhumisel on kõige suuremat rõhku tarvis algul. Kui palli diameeter on saavutanud teatud väärtuse, siis palli suurendamiseks vajalik surve väheneb (võrdle joonis 2.13).

Sisukord

Eessõna **1**

1 Sissejuhatus **3**

1.1 Kirjandus 4

1.2 Ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhimõistetest, -hüpoteesidest ja -võrrandeist. 6

1.2.1 Põhieeldused ja -hüpoteesid 6

1.2.2 Skalaar, vektor, tensor 9

1.2.3 Baasivektorid ja meetrilised tensorid 11

1.2.4 Liikumise kirjeldamine 12

1.2.5 Deformatsioon ja siire 13

1.2.6 Kiirus ja kiirendus 23

1.2.7 Mass 26

1.2.8 Jõud 27

1.2.9 Liikumishulk 29

1.2.10 Kineetiline moment 30

1.2.11 Pinge 31

1.2.12 Pingetensor 33

1.2.13 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused — Cauchy liikumisseadused 35
1.2.14 Liikumisvõrrandid Lagrange'i koordinaatides 36
1.2.15 Energia ja entroopia 38
1.2.16 Pidevustingimused ehk sobivustingimused . 44
1.2.17 Olekuvõrrandid 45
1.3 Elastsusteooria põhivõrrandite süsteem 48

2 Valik teemasid mittelineaarsest elastsusteooriast 51
2.1 Homogeenne ehk ühtlane deformatsioon 51
2.1.1 Põhiseosed 51
2.1.2 Puhas homogeenne deformatsioon 53
2.1.3 Tõmme 55
2.1.4 Hüdrostaatiline surve 56
2.1.5 Nihe 56
2.2 Ringsilindri vääne 60
2.3 Ploki paine 65
2.4 Lõplik tasapinnaline deformatsioon 71
2.5 Elastsuskonstantide eksperimentaalne määramine . 78
2.5.1 Sissejuhatus 78
2.5.2 Puhas homogeenne deformatsioon (kokkusurumatu lehe ühtlane laienemine) . . 80
2.5.3 Puhas nihe 83
2.5.4 Tõmme 84
2.5.5 Ühtlane kahedimensionaalne tõmme 85