

Peatükk 3

Valik teemasid lineaarsest elastsusteooriast

Käesolev peatükk põhineb õpiku [2] 7. peatükil (Selected topics in Linear Elasticity Theory).

Eeldame, et vaadeldavad elastsed kehad on isotroopsed ja homogeensed ning deformatsioonid on isothermilised.

3.1 Põhivõrrandid

Üldiselt lähtume 1. peatükis esitatud põhivõrrandest, kuid lisaks seni domineerivalt kasutatud komponentkujule esitame nad ka alternatiivkujul, mis sarnaneb nn. maatriks ja vektorkirjaviisile. Deformatsioonitensorite ja olekuvõrrandite puhul kasutame nüüd loomulikult vaid lineaarseid seoseid.

1) Massi jäävuse seadus.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0. \quad (3.1)$$

Operaatorit

$$\nabla = \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (3.2)$$

nimetatakse siin gradientoperaatoriks kõverjoonelistes koordinaatides x^k ning skalaarkorrutis $\nabla \cdot \mathbf{v}$ kujutab endast vektori \mathbf{v} divergentsi •

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \text{div } \mathbf{v} = \mathbf{g}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} = \mathbf{g}^k \cdot v^m_{;k} \mathbf{g}_m = v^k_{;k}. \quad (3.3)$$

2) Cauchy liikumisseadused.

$$\text{I)} \quad t^{kl}_{;l} + \rho(f^k - a^k) = 0 \quad \text{ehk} \quad \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \nabla \cdot \mathbf{t} + \rho \mathbf{f}. \quad (3.4)$$

Siin \mathbf{t} on pingetensor ja \mathbf{f} massjõud.

Teist järku tensori $\mathbf{t} = t^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \equiv t^{kl} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_l$ puhul on divergents $\nabla \cdot \mathbf{t}$ defineeritud järgmiselt —

$$\nabla \cdot \mathbf{t} \equiv \text{div } \mathbf{t} = \mathbf{g}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial x^k} = \mathbf{g}^k \cdot t^{lm}_{;k} \mathbf{g}_l \mathbf{g}_m = t^{km}_{;k} \mathbf{g}_m. \quad (3.5)$$

$$\text{II)} \quad t^{kl} = t^{lk} \quad \text{ehk} \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}^{(T)} \quad (3.6)$$

3) **Euleri deformatsioonitensor** on nüüd esitatud vastavalt lineaarsele teooriale, st. kujul

$$e^k_l \equiv \tilde{e}^k_l = \frac{1}{2} (u^k_{;l} + u_{l; k}) \quad \text{ehk} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{(T)}]. \quad (3.7)$$

Vektori gradient $\nabla \mathbf{u}$ on siin defineeritud lähtudes \mathbf{u} kovariantsetest komponentidest

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{g}^k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = u_{m;k} \mathbf{g}^k \mathbf{g}^m = (\nabla \mathbf{u})_{mk} \mathbf{g}^k \mathbf{g}^m, \quad (3.8)$$

kus

$$(\nabla \mathbf{u})_{mk} = u_{m;k} \quad (3.9)$$

on teist järku kovariantne tensor ning kui kirjutatakse $\nabla \mathbf{u}$, siis peetakse tavaliselt silmas just ülaltoodud kovariantset tensorit. Loomulikult saab meetriliste tensorite abil $(\nabla \mathbf{u})_{mk}$ indekseid tõsta ja langetada. Analoogselt, tensor

$$\left\{ (\nabla \mathbf{u})^{(T)} \right\}_{km} = u_{k;m} \quad (3.10)$$

4) Lineaarse teooria olekuvõrrand on antud kujul

$$t^k_l = \lambda e^m_m \delta^k_l + 2\mu e^k_l \text{ ehk } \mathbf{t} = \lambda I_e \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}. \quad (3.11)$$

See on üldistatud Hooke'i seadus, kus λ ja μ on Lamé koefitsendid, \mathbf{I} on nn. identsustensor ja I_e deformatsioonitensori \mathbf{e} esimene invariant, st.

$$I_e = e^k_k = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (3.12)$$

5) Sobivus- ehk pidevustingimused

$$e_{kl;mn} + e_{mn;kl} - e_{km;ln} - e_{ln;km} = 0 \quad (3.13)$$

6) Deformatsioonienergia tihedus

$$\Sigma = \frac{1}{2} t^{mn} e_{mn} \stackrel{(3.11)}{=} \frac{1}{2} [\lambda I_e^2 + 2\mu e^{mn} e_{mn}] \geq 0. \quad (3.14)$$

Liikumisvõrrandid siiretes

Asendades invariandi I_e avaldisest (3.12) olekuvõrrandisse (3.11), saame

$$\mathbf{t} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}. \quad (3.15)$$

Kasutades viimast tulemust, saame Cauchy I liikumisseadusele kuju

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \nabla \cdot [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}] + \rho \mathbf{f} \quad (3.16)$$

Teisendame avaldise (3.16) esimest liidetavat.

Kui $\mathbf{A} = \Phi \mathbf{I}$, kus Φ on diferentseeruv skalaarväli, siis

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{I}) = A^{kl}{}_{;k} \mathbf{g}_l = \nabla \Phi \quad (3.17)$$

Seega võttas $\Phi = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}$, saame

$$\nabla \cdot [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}] = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (3.18)$$

Korrutame nüüd avaldise (3.7) nablaga —

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{2} [\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})]. \quad (3.19)$$

Siin on arvestatud, et $\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \equiv \nabla^2 \mathbf{u}$ ja $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^{(T)} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$. Asendame (3.18) ja (3.19) avaldisse (3.16) ja saame

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (3.20)$$

Arvestades, et $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ saame eelmisele võrrandile kuju

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (3.21)$$

Viimase kaks võrrandit, (3.20) ja (3.21) on tuntud kui Navier' (Navier'-Cauchy) võrrandid. Nad esitavad liikumisvõrrandid siiretes ja on lineaarse elastsusteooria ühed põhivõrrandid. Komponentkujul saab võrrandi (3.20) avaldada kujul

$$(\lambda + \mu)u^k_{;kl} + \mu u_{l; k}^k + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0. \quad (3.22)$$

Kuna lineaarses teoorias eeldatakse, et nii siirde kui kiiruse gradiendid on väikesed, siis tavaliselt esitatakse võrrandid (3.20) ja (3.21) kujul, kus v.p. on liige $\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$, st., materiaalse tuletise asemel vaadeldakse osatuletist.

Navier' võrrandid on liikumisvõrrandid ja elstostaatika ülesannete puhul, kus eeldatakse, siire \mathbf{u} ei sõltu ajast, saavad nad tasakaaluvõrrandite kuju —

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} &= 0 \\ \text{ehk} \\ (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} &= 0 \\ \text{ehk} \\ (\lambda + \mu)u^k_{;kl} + \mu u_{l; k}^k + \rho f_l &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Kui rajatingimused on antud pingetes, siis on tavaline, et tasakaaluvõrranditena kasutatakse Cauchy I liikumisvõrrandit kujul

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \rho \mathbf{f} = 0. \quad (3.24)$$

3.2 Lamé koefitsentide seos Youngi mooduli ja Poisson'i teguriga

Insenerirakenduste puhul kasutatakse Lamé koefitsentide λ ja μ asemel tavaliselt Youngi moodulit ja Poissoni tegurit. Olekuvõrrandist (3.11) avaldame deformatsioonitensori

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{t} - \lambda \mathbf{I}_e \mathbf{I}). \quad (3.25)$$

ja leiame invariandi

$$\mathbf{I}_t = t^k_k = \mathbf{I}_e(3\lambda + 2\mu). \quad (3.26)$$

Avaldame viimasest \mathbf{I}_e , asendame ta avaldisse (3.25) ja saame

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{t} - \frac{\lambda \mathbf{I}_t}{3\lambda + 2\mu} \mathbf{I}) \quad \text{ehk} \quad e^k_l = \frac{1}{2\mu}(t^k_l - \frac{\lambda \mathbf{I}_t}{3\lambda + 2\mu} \delta^k_l). \quad (3.27)$$

Seega saab avaldada deformatsioonitensori normaal ja nihkekomponendid läbi pingetensori normaal ja nihkekomponentide kujul

$$e^k_{\underline{k}} = \frac{1}{2\mu}(t^k_{\underline{k}} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} t^k_k) \quad \text{ja} \quad e^k_l = \frac{1}{2\mu}(t^k_l), \quad k \neq l. \quad (3.28)$$

(3.28)₁ saab avaldada kujul

$$\left\{ \begin{aligned} e^1_1 &= \frac{1}{2\mu} \left[t^1_1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (t^1_1 + t^2_2 + t^3_3) \right] \\ &= \frac{1}{E} [t^1_1 - \nu(t^2_2 + t^3_3)], \\ e^2_2 &= \frac{1}{E} [t^2_2 - \nu(t^3_3 + t^1_1)], \\ e^3_3 &= \frac{1}{E} [t^3_3 - \nu(t^1_1 + t^2_2)], \end{aligned} \right. \quad (3.29)$$

kus

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (3.30)$$

on Youngi moodul ja

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3.31)$$

on Poissoni tegur. Viimasest kahest saab omakorda tuletada seosed

$$\begin{cases} 1 + \nu = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} = \frac{E}{2\mu}, & \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ ja} \\ \lambda = \frac{2\nu\mu}{1 - 2\nu} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Elastsuskonstantide E ja ν füüsikaline tähendus ilmneb väga lihtsalt tõmbekatsel. Kui x^k on DRK ja näiteks silindriline katsekeha on allutatud telje x^3 sihilisele tõmbele nii, et $t_{33} = t_o = \text{const.}$ ja $t_{11} = t_{22} = t_{kl} = 0, k \neq l$, siis (3.28) ja (3.29) põhjal

$$\begin{cases} e_{33} = \frac{t_o}{E}, & e_{11} = e_{22} = -\nu \frac{t_o}{E} \\ e_{kl} = 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (3.33)$$

Seega $t_{33} = t_o = Ee_{33}$ ja me võime öelda, et Youngi moodul iseloomustab normaalpinge ja vastava (samasuunalise) deformatsiooni suhet. Avaldise põhjal

$$\nu = \left| \frac{e_{11}}{e_{33}} \right| = \left| \frac{e_{22}}{e_{33}} \right|, \quad (3.34)$$

st. Poissoni tegur iseloomustab põiksuunalise ja pikisuunalise deformatsiooni suhet. Mõlemad konstandid on positiivsed.

Vaatleme nüüd ühtlasele hüdrostaatilisele survele allutatud keha, st.

$$t^k_l = -p\delta^k_l, \quad p > 0. \quad (3.35)$$

Kui pingetensor on esitatav kujul (3.35), siis öeldakse, et tegu on hüdrostaatilise pingeseisundiga (pingusega)¹. (3.35) põhjal

$$p = -\frac{1}{3} \text{I}_t \stackrel{(3.26)}{=} -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \text{I}_e = -k \text{I}_e, \quad (3.36)$$

kus

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.37)$$

on ruumimoodul ehk ruumpaisumismoodul ehk (EE järgi) mahtelastsusmoodul², mida tähistatakse tihti ka tähega K . Kuna nii k kui E on positiivsed, siis (3.37) põhjal peab $\nu < 0,5$. Arvestades viimast, saab (3.30)–(3.32) põhjal väita, et ka Lamé koefitsendid λ ja μ peavad olema positiivsed. Konstanti μ nimetatakse ka nihkemooduliks ning tähistatakse $G \equiv \mu$.

¹I. k. *hydrostatic stress state*

²I. k. *bulk modulus*

3.3 Sobivustingimused pingetes

Sobivustingimusi ehk pidevustingimusi on vaja selleks, et elastsusteooria ülesandele oleks võimalik saada ühene lahend siiretes. Originaalis olid sobivustingimused esitatud deformatsioonide jaoks. Kui aga rajatingimused on esitatud pindjõudude kaudu, siis osutub vajalikuks esitada ka sobivustingimused läbi pingetensori komponentide. Kasutades elastsuskonstantide määratlusi (3.32) saame olekuvõrrandist (3.27)

$$e_{kl} = \frac{1 + \nu}{E} \left[t_{kl} - \frac{\nu}{1 + \nu} \mathbf{I}_t g_{kl} \right]. \quad (3.38)$$

Pannes (3.38) sobivustingimustesse (3.13) ja arvestades, et Ricci teoreemi põhjal $g_{kl;m} = 0$ saame

$$t_{kl;mn} + t_{mn;kl} - t_{km;ln} - t_{ln;km} = \frac{\nu}{1 + \nu} \left[g_{kl} (\mathbf{I}_t)_{,mn} + g_{mn} (\mathbf{I}_t)_{,kl} - g_{km} (\mathbf{I}_t)_{,ln} - g_{ln} (\mathbf{I}_t)_{,km} \right]. \quad (3.39)$$

Korrutades saadut meetrilise tensoriga g^{mn} ja lihtsustades saame •

$$g^{mn} t_{kl;mn} + (\mathbf{I}_t)_{,kl} - t^n_{k;ln} - t^m_{l;km} = \frac{\nu}{1 + \nu} \left[g_{kl} g^{mn} (\mathbf{I}_t)_{,mn} + 3 (\mathbf{I}_t)_{,kl} - 2 (\mathbf{I}_t)_{,kl} \right]. \quad (3.40)$$

Kuna

$$g^{mn} t_{kl;mn} = \nabla^2 t_{kl} \text{ ja } g^{mn} (\mathbf{I}_t)_{,mn} = \nabla^2 \mathbf{I}_t, \quad (3.41)$$

siis saame

$$\nabla^2 t_{kl} - t^n_{k;ln} - t^m_{l;km} + \frac{1}{1 + \nu} (\mathbf{I}_t)_{,kl} = \frac{\nu}{1 + \nu} g_{kl} \nabla^2 \mathbf{I}_t. \quad (3.42)$$

Elastostaatika ülesannete puhul saame Cauchy I liikumisseadusest (3.4), et

$$t^n_{k;ln} = -\rho f_{k;l} \text{ ja } t^m_{l;km} = -\rho f_{l;k}. \quad (3.43)$$

Asendades (3.43) sobivustingimustesse (3.42), saame

$$\nabla^2 t_{kl} + \frac{1}{1 + \nu} (\mathbf{I}_t)_{,kl} - \frac{\nu}{1 + \nu} g_{kl} \nabla^2 \mathbf{I}_t = -\rho (f_{k;l} + f_{l;k}). \quad (3.44)$$

Viimased esitavad kuus lineaarselt sõltumatut sobivusvõrrandit pingekomponentides ja nad on tuntud kui *Beltrami-Michelli sobivusvõrrandid* ehk lühidalt *Beltrami-Michelli võrrandid*.

Juhul kui mahujõud puuduvad või on konstantsed, siis lihtsustuvad viimased võrrandid veelgi. Võtame võrrandist (3.23)₂ divergentsi, st. $\nabla \cdot (3.23)_2$. Saame

$$\nabla \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{I}_e = 0. \quad (3.45)$$

Avaldise (3.26) põhjal $\mathbf{I}_t = t^k_k = (3\lambda + 2\mu) \mathbf{I}_e$. Kuna (3.45) põhjal $\nabla^2 \mathbf{I}_e = 0$, siis ka

$$\nabla^2 \mathbf{I}_t = (3\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{I}_e = 0. \quad (3.46)$$

Seega antud juhul lihtsustuvad Beltrami-Michelli võrrandid (3.44) oluliselt ja saavad kuju

$$\nabla^2 t_{kl} + \frac{1}{1 + \nu} (\mathbf{I}_t)_{,kl} = 0. \quad (3.47)$$

Kui rakendada võrrandile (3.47) Laplace'i operaatorit ∇^2 , siis saame

$$\nabla^4 t_{kl} = 0, \quad (3.48)$$

st. juhul kui mahujõud puuduvad või on konstantsed, peab pingetensor elastostaatika ülesannete puhul rahuldama biharmoonilist võrrandit (3.48). Rakendades nüüd biharmoonilist operaatorit ∇^4 olekuvõrrandile (3.38) ja arvestades, et $\nabla^4 \mathbf{I}_t = \nabla^2 (\nabla^2 \mathbf{I}_t)$, saame

$$\nabla^4 e_{kl} = 0. \quad (3.49)$$

Seega peab ka lineaarne deformatsioonitensor antud juhul rahuldama biharmoonilist võrrandit.

3.4 Tasand-deformatsioon ja tasandpinge elastostaatikas

Tasand-deformatsioon ehk tasapinnaline deformatsioon³. Siia alla käivad ülesanded, mille puhul deformatsioonid on identsest paralleelsetel tasanditel ja vaadeldava tasandi normaali sihis deformatsioonid puuduvad. Seega on siirdevektori see komponent, mis on risti vaadeldava tasandiga võrdne nulliga ja teised kaks on funktsioonid kahest koordinaadist vaadeldaval tasandil.

Näitena vaatleme pikka silindrilist keha ja silindrilisi koordinaate $r-\vartheta-z$. On loomulik valida z -telg silindri teljeks. Seega $r-\vartheta$ tasandis toimuvaid deformatsiooni kirjeldab siirdeväli ($\mathbf{u} = (u_r, u_\vartheta, u_z)$)

$$u_r = u_r(r, \vartheta), \quad u_\vartheta = u_\vartheta(r, \vartheta), \quad u_z = 0. \quad (3.50)$$

Võttes siirdekomponentidest kovariantsed osatuletised koordinaadi järgi, saame leida lineaarse deformatsioonitensori (3.7) komponendid

$$\begin{cases} e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, & e_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r \right), & e_{zz} = 0, \\ e_{r\vartheta} = e_{\vartheta r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right), \\ e_{rz} = e_{zr} = e_{\vartheta z} = e_{z\vartheta} = 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Seega on vaid kolm deformatsioonikomponenti e_{rr} , $e_{\vartheta\vartheta}$ ja $e_{r\vartheta}$ nullist erinevad. Invariant

$$I_e = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta}. \quad (3.52)$$

Olekuvõrrandi (3.11) abil saab nüüd avaldada pingetensori komponendid

$$\begin{cases} t_{rr} = \lambda I_e + 2\mu e_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ t_{\vartheta\vartheta} = \lambda I_e + 2\mu e_{\vartheta\vartheta} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + 2\frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r \right) \\ t_{zz} = \lambda I_e + 2\mu e_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \\ t_{r\vartheta} = t_{\vartheta r} = 2\mu e_{r\vartheta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right) \\ t_{rz} = t_{zr} = t_{\vartheta z} = t_{z\vartheta} = 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Erinevalt deformatsioonikomponentidest, on siin nullist erinev ka pingekomponent t_{zz} . Valemite (3.53)₁₋₃ põhjal

$$t_{zz} = \nu (t_{rr} + t_{\vartheta\vartheta}) \quad (3.54)$$

Seega, tasapinnalise deformatsiooni puhul on pingekomponent t_{zz} nullist erinev samal ajal kui deformatsioonikomponent e_{zz} on null.

Vaadeldud näite puhul oli meil viis tundmatut (kaks siirdekomponenti ja kolm sõltumatut pingekomponenti), mille määramiseks tuleb kasutada tasakaalu- ja sobivusvõrrandeid ning massi jäävuse seadust koos rajatingimustega.

³I. k. *plane stress*

Tasandpinge ehk tasandpingus ehk tasapinnaline pingeseisund⁴. Keha pingeseisund on tasapinnaline siis ja ainult siis kui üks peapingetest on null. Vaadeldud silindri puhul tähendab see seda, et pingeseisund on $r - \vartheta$ tasandi suhtes tasapinnaline, kui nullist erinevad on vaid pingekomponendid t_{rr} , $t_{\vartheta\vartheta}$ ja $t_{r\vartheta} = t_{\vartheta r}$. Olekuvõrrandi (3.11) abil saab jällegi esitada seosed pingetensori komponentide ja siirete vahel. Tingimuse $t^z_z = 0$ tõttu saame nüüd

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{rr} = \lambda I_e + 2\mu e_{rr} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ t_{\vartheta\vartheta} = \lambda I_e + 2\mu e_{\vartheta\vartheta} \\ \quad = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + 2\frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r \right) \\ t_{r\vartheta} = t_{\vartheta r} = 2\mu e_{r\vartheta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right) \\ t_{zz} = t_{rz} = t_{zr} = t_{\vartheta z} = t_{z\vartheta} = 0. \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Seega, kuigi mõlemal vaadeldud tasapinnalisel juhul on pingekomponendid avaldatavad läbi siirdekompontentide u_r ja u_ϑ , on pingeseisundid täiesti erinevad — tasapinnalise deformatsiooni puhul pole pingeseisund tasapinnaline.

⁴I. k. *Plane strain*

3.5 Biharmoonilise võrrandi lahendamine analüütiliste funktsioonide abil

Biharmooniline võrrand, õigemini tema lahend, omab elastostaatikas väga suurt tähtsust. Ka käesolevas kursuses on sellest võrrandist juba mitu korda juttu olnud. Järgnevalt vaatleme kuidas leida biharmoonilise võrrandi lahendit rakendades kompleksmuutuja funktsioonide teooriat. Saadud tulemust kasutame järgmistes alajaotustes.

Vaatleme funktsiooni $F(x, y)$, mis on reaalne ja ühene analüütiline \star funktsioon⁵ klassis C^r , $r \geq 4$ ning on määratud ja tõkestatud x, y tasandi piirkonnas Ω (x, y on DRK). Allpool konstrueeritakse läbi kahe analüütilise (kompleksmuutuja $z = x + iy$) funktsiooni selline funktsioon F , mis rahuldab biharmoonilist võrrandit

$$\nabla^4 F = 0. \quad (3.56)$$

Loomulikult saadakse lahend vaid piirkonnas Ω . Tähistame

$$\nabla^2 F = U(x, y), \quad (3.57)$$

st. (3.56) on avaldatav kujul

$$\nabla^2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (3.58)$$

Seega on U *harmooniline funktsioon*⁶, mis on teada Laplace'i võrrandi (3.58) lahendist.

⁵Analüütiline funktsioon ehk holomorfe funktsioon ehk regulaarne funktsioon — kompleksmuutuja funktsioon, mida vaadeldava piirkonna igas punktis saab esitada koonduva astmereana.

⁶Harmooniline funktsioon — Laplace'i võrrandit rahuldav funktsioon.

Iga harmoonilise funktsiooni U jaoks saab leida kaasharmoonilise funktsiooni V . Funktsioone U ja V nimetatakse kaasharmoonilisteks funktsioonideks kui nad rahuldavad Cauchy-Riemanni võrrandeid

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.59)$$

Kui funktsioonid U ja V on teineteise kaasharmoonilised funktsioonid, siis funktsioon

$$W(z) = U(x, y) + iV(x, y) \quad (3.60)$$

on analüütiline funktsioon. Analüütilise funktsiooni integraal on samuti analüütiline funktsioon, st., et saame tuua sisse uue analüütilise funktsiooni

$$w(z) = \int W(z) dz = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (3.61)$$

Diferentseeruva kompleksmuutuva funktsiooni puhul

$$w'(z) = W(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3.62)$$

Viimase avaldise põhjal

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{ja} \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3.63)$$

Seega on φ ja ψ teineteise kaasharmoonilised funktsioonid. Enamgi veel, funktsioonid φ ja ψ on harmoonilised funktsioonid, st. nad rahuldavad Laplace'i võrrandit

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{ja} \quad \nabla^2 \psi = 0. \quad (3.64)$$

Vaatleme funktsiooni

$$G(x, y) = F(x, y) - \frac{1}{4}(x\varphi + y\psi) \quad (3.65)$$

ja näitame, et tegu on harmoonilise funktsiooniga (piirkonnas Ω), st. näitame, et G rahuldab võrrandit

$$\nabla^2 G = \nabla^2 F - \frac{1}{4} \nabla^2 (x\varphi + y\psi). \quad (3.66)$$

Teisendame võrrandit (3.66):

$$\nabla^2 (x\varphi) = \dots$$

$$\dots = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \stackrel{(3.63)}{=} 2U, \quad (3.67)$$

$$\nabla^2 (y\psi) = \dots$$

$$\dots = 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \stackrel{(3.63)}{=} 2U, \quad (3.68)$$

Asendame (3.67), (3.68) \rightarrow (3.66) ja saame

$$\nabla^2 G = \nabla^2 F - U \stackrel{(3.57)}{=} 0. \quad (3.69)$$

Seega on G harmooniline funktsioon, sest ta rahuldab Laplace'i võrrandit (3.69). Avaldisest (3.65) saame avaldada

$$F(x, y) = G(x, y) + \frac{1}{4}(x\varphi + y\psi). \quad (3.70)$$

Harmoonilist funktsiooni $G(x, y)$ saab vaadelda mingi analüütilise funktsiooni $g(z)$ reaalosana, st.,

$$g(z) = G(x, y) + iH(x, y), \quad (3.71)$$

kusjuures funktsiooni $g(z)$ imaginaarosa $H(x, y)$ määratakse kui $G(x, y)$ kaasharmooniline funktsioon. Avaldist $\frac{1}{4}(x\varphi + y\psi)$ võib vaadelda kui avaldise $\frac{1}{4}\bar{z}w(z)$ reaalosa ($\bar{z} = x - iy$ ja $w(z)$ on määratud \star avaldisega (3.61)). Seega

$$F = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{4}\bar{z}w(z) + g(z) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}\bar{z}w(z) + g(z) + \frac{1}{4}z\bar{w}(\bar{z}) + \bar{g}(\bar{z}) \right] \quad (3.72)$$

Kui tähistada

$$w(z) = 4f(z) \quad (3.73)$$

siis saame avaldisele (3.72) kuju

$$F = \frac{1}{2} [\bar{z}f(z) + g(z) + z\bar{f}(\bar{z}) + \bar{g}(\bar{z})], \quad (3.74)$$

mis ongi biharmoonilise võrrandi (3.56) üldlahend.

3.6 Pingete jaotus ja siirdeväljad tasand-deformatsiooni puhul

Vaatleme elastostaatika ülesannet DRK-s. Tasapinnalise deformatsiooni puhul, kus deformatsioonid on määratud $x - y$ tasapinnas, on pingekomponendid

$$t_{xz} = t_{zx} = t_{yz} = t_{zy} = 0. \quad (3.75)$$

Seega, nullist erinevad pingekomponendid on t_{xx} , t_{yy} , t_{zz} ja $t_{xy} = t_{yx}$, kusjuures

$$t_{zz} = \nu(t_{xx} + t_{yy}). \quad (3.76)$$

Tavaliselt uuritakse sellise ülesandepüstituse puhul riskülikulisi plaate.

Mahujõudude puudumisel saab tasakaaluvõrrand (3.24), st. $\nabla \cdot \mathbf{t} + \rho \mathbf{f} = 0$ kuju

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (3.77)$$

Kui valida

$$t_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad t_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad t_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (3.78)$$

kus $F = F(x, y)$ on siin Airy' pingefunktsioon, siis on tasakaaluvõrrandid (3.77) automaatselt rahuldatud. Peale tasakaaluvõrrandite (3.77) peavad olema rahuldatud ka sobivustingimused, antud juhul Beltrami-Michelli võrrandid kujul (3.47), st.

$$\nabla^2 t_{kl} + \frac{1}{1 + \nu} (\mathbf{I}_t)_{,kl} = 0.$$

Meil on nüüd $k = 1, 2, 3$ ja $l = 1, 2, 3$ asemel x, y, z ja invariant $I_t = t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} = (1 + \nu)(t_{xx} + t_{yy})$. Seega on vaja leida

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 t_{xx} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_t = \dots \\ \nabla^2 t_{yy} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} I_t = \dots \\ \nabla^2 t_{xy} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_t = \dots \end{array} \right. \quad (3.79)$$

Arvestades avaldise (3.78) saame viimastest biharmoonilise võrrandi Airy' pingefunktsiooni jaoks —

$$\nabla^4 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}. \quad (3.80)$$

Viimase üldlahendi leidsime eelmises punktis läbi kompleksmuutuva funktsioonide $f(z)$ ja $g(z)$ ja nende kaaskomplekside. Seega saab läbi biharmoonilise võrrandi lahendi avaldada pingeaotuse, st. pingetensori komponendid t_{xx} , t_{yy} ja t_{xy} . Enne toome aga sisse avaldised

$$\begin{cases} t_{xx} + it_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) \\ \text{ja} \\ t_{yy} - it_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (3.81)$$

Kuna $F = F(z, \bar{z})$, siis läheme muutujatelt x, y üle muutujatele z, \bar{z} . Kompleksmuutuva funktsiooni tuletise leidmise valemite põhjal \checkmark

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \quad (3.82)$$

Nüüd saame avaldistest (3.81) ja (3.82) \bullet

$$\begin{cases} t_{xx} + it_{xy} = 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) F \\ t_{yy} - it_{xy} = 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) F. \end{cases} \quad (3.83)$$

(3.74) \rightarrow \dagger

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2} = \dots \end{cases} \quad (3.84)$$

(3.84) \rightarrow (3.83) \rightarrow

$$\begin{cases} t_{xx} + it_{xy} = f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}) - z\bar{f}''(\bar{z}) - \bar{g}''(\bar{z}) \\ t_{yy} - it_{xy} = f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}) + z\bar{f}''(\bar{z}) + \bar{g}''(\bar{z}). \end{cases} \quad (3.85)$$

Nüüd liidame ja lahutame saadud võrrandid (3.85) —

$$\begin{cases} t_{xx} + t_{yy} = 2 \left[f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}) \right] = 4\text{Re} [f'(z)] \\ t_{yy} - t_{xx} - 2it_{xy} = 2 \left[z\bar{f}''(\bar{z}) + \bar{g}''(\bar{z}) \right]. \end{cases} \quad (3.86)$$

Võtame (3.86)₂-st kaaskompleksi, st.

$$t_{yy} - t_{xx} + 2it_{xy} = 2 \left[\bar{z}f''(z) + g''(z) \right]. \quad (3.87)$$

Kust omakorda

$$\begin{cases} t_{yy} - t_{xx} = 2\text{Re} \left[\bar{z}f''(z) + g''(z) \right] \\ t_{xy} = \text{Im} \left[\bar{z}f''(z) + g''(z) \right] \end{cases} \quad (3.88)$$

On ilmselge, et kui funktsioonid $f(z)$ ja $g(z)$ oleks teada, siis saaks (3.86)₁ ja (3.88) abil määrata pingekomponendid t_{xx} , t_{yy} ja t_{xy} . Puuduvad funktsioonid saab leida rajatingimuste abil, st. ülesannet tuleb konkretiseerida. Seda teeme järgmises alajaotuses.

Järgmisena leiame tasapinnalise deformatsiooni nullist erinevad siirdekomponendid $u(x, y) \parallel x$ ja $v(x, y) \parallel y$. Selleks tuleb kasutada lineaarse elastsusteooria olekuvõrrandeid (3.11) koos deformatsioonitori definitsiooniga (3.7), st.

$$t_{ij} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3.89)$$

Antud juhul, st kasutades tähistusi x, y, u ja v , saame

$$\begin{cases} t_{11} = t_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \\ t_{22} = t_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ t_{21} = t_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (3.90)$$

(3.90)₁₋₂ st saab avaldada osatuletised

$$\begin{cases} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \nabla^2 F \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \nabla^2 F \end{cases} \quad (3.91)$$

(3.57) põhjal $\nabla^2 F = U$ ja (3.63) põhjal $U = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$. Asendades need avaldistesse (3.91) saame

$$\begin{cases} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \frac{\partial\psi}{\partial y}. \end{cases} \quad (3.92)$$

Viimaste integreerimisel saame

$$\begin{cases} 2\mu u = -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \varphi + k(y), \\ 2\mu v = -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \psi + l(x), \end{cases} \quad (3.93)$$

kus $k(y)$ ja $l(x)$ on suvalised funktsioonid vastavalt argumentidest y ja x . Nende suvaliste funktsioonide olemuse määratlemiseks diferentseerime (3.93)₁ muutuja y järgi ja (3.93)₂ muutuja x järgi ning liidame tulemused —

$$\underbrace{2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\stackrel{(3.90)}{=} -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}} = -2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial x}}_{\stackrel{(3.63)}{=} -\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \right) + k'(y) + l'(x). \quad (3.94)$$

Seega $k'(y) + l'(x) = 0$, ehk

$$k'(y) = -l'(x) = C_1, \quad (3.95)$$

kus C_1 on suvaline konstant. Seega

$$k(y) = C_1 y + C_2 \quad \text{ja} \quad l(x) = -C_1 x + C_3, \quad (3.96)$$

kus C_2 ja C_3 on jällegi suvalised konstandid. Kui sellised $k(y)$ ja $l(x)$ panna siirete avaldisse (3.93), siis see osa siirdest ($k(y)$ ja $l(x)$ osa) vastab nn. jäigale deformatsioonile ja seega võib nad lugeda † võrdseks nulliga. Leiame nüüd (3.93)₁+i(3.93)₂ (kasutades valemeid (3.61) ja (3.82)) — ‡

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) = \\ - \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) F + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} (\varphi + i\psi) = -2 \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} w(z). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Arvetsades $w(z)$ ja $F(z)$ avldisi (3.73) ja (3.74) saame võrdusele (3.97) kuju

$$2\mu(u + iv) = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} f(z) - z \bar{f}'(\bar{z}) - \bar{g}'(\bar{z}). \quad (3.98)$$

Kasutades Poissoni teguri ja Lamé koefitsentide vahelist seost $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)]$ saab anda viimasele kuju

$$2\mu(u + iv) = (3 - 4\nu) f(z) - z \bar{f}'(\bar{z}) - \bar{g}'(\bar{z}). \quad (3.99)$$

Eraldades avaldises (3.99) reaali- ja imaginaarosad saamegi määrata siirdekomponendid u ja v tasapinnalise deformatsiooni puhul.

3.7 Pingete kontsentratsioon ühtlaselt pingestatud plaadis oleva elliptilise augu ümber

Käesolevas alajaotuses vaatleme ühtlaselt pingestatud plaati, mis non nõrgestatud elliptilise auguga. Eesmärgiks on leida pingete jaotus ümber selle elliptilise augu. Kuna auk on elliptiline, siis osutub mõistlikuks tuua sisse ka elliptilised koordinaadid. Kompleksarvude puhul saab ellipsi defineerida kujul

$$z = c \cosh \zeta. \quad (3.100)$$

Siin $z = z^1 + iz^2 \equiv x + iy$ ja $\zeta = \xi + i\eta$ on kompleksmuutujad, x, y on DRK, ξ, η elliptilised koordinaadid ja c on reaalne konstant. Avaldise (3.100) põhjal

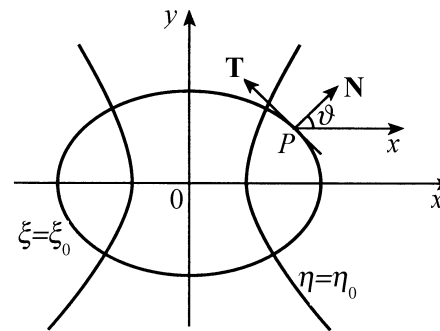
$$z^1 \equiv x = c \cosh \xi \cos \eta \quad \text{ja} \quad z^2 \equiv y = c \sinh \xi \sin \eta. \quad (3.101)$$

Viimasest saame, et

✓

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1. \quad (3.102)$$

Võrranditega (3.102) on esitatud konfokaalsete ellipsite ja hüperboolide $\xi = \text{const.}$ ja $\eta = \text{const.}$ parv. Kuna need ellipsid ja hüperboolid lõikavad teineteist täisnurga all, siis moodustavad ξ ja η ortogonaalse kõverjoonelise koordinaadistiku. \mathbf{T} ja \mathbf{N} on ellipsi $\xi = \xi_0$ puutuja ja välisnormaal suvalises punktis P . $\eta = \eta_0$ esitab hüperbooli, mis lõikab vaadeldavat ellipsit ortogonaalselt. ϑ tähistab nurka x positiivse suuna ja välisnormaali \mathbf{N} vahel. Igas punktis on kõverjooneline koordinaat ξ suunatud ellipsi välisnormaali suunas ja η piki tema puutujat. On selge, et igas punktis võib koordinaate ξ ja η tõlgendada kui DRK x ja y lokaalsel pöördel (vastupäeva) nurga ϑ võrra (vastupäeva) saadud uusi koordinaate.



Joonis 3.1: Elliptilised koordinaadid ξ ja η .

Tähistame pingetensori elliptilistes koordinaatides $\mathbf{T}(\zeta)$ ja DRK-s $\mathbf{t}(z)$, kus $\zeta = (\xi, \eta)$ ja $z = (x, y)$. Siis

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^{(T)} \mathbf{t} \mathbf{Q}, \quad (3.103)$$

kus \mathbf{Q} on ortogonaalne tensor, mille maatriks (lähtudes DRK-st) on

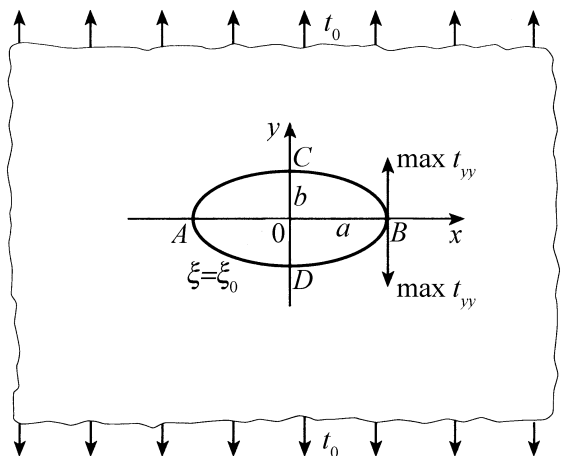
$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

Väljendatuna pingekomponentides saab (3.103) kuju

$$\begin{cases} T_{\xi\xi} = t_{xx} \cos^2 \vartheta + 2t_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta + t_{yy} \sin^2 \vartheta, \\ T_{\eta\eta} = t_{xx} \sin^2 \vartheta - 2t_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta + t_{yy} \cos^2 \vartheta, \\ T_{\xi\eta} = (t_{yy} - t_{xx}) \sin \vartheta \cos \vartheta + t_{xy} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta). \end{cases} \quad (3.105)$$

Avaldiste (3.105), (3.86) ja (3.87) põhjal

$$\begin{cases} T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta} = t_{xx} + t_{yy} = 2 \left[f'(z) + \overline{f'}(\overline{z}) \right] = 4 \operatorname{Re} [f'(z)], \\ T_{\eta\eta} - T_{\xi\xi} + 2iT_{\xi\eta} = (t_{yy} - t_{xx} + 2it_{xy}) e^{2i\vartheta} = \\ = 2 [\overline{z} f''(z) + g''(z)] e^{2i\vartheta}. \end{cases} \quad (3.106)$$



Joonis 3.2: Ühtlaselt tõmmatud lõpmatu plaat elliptilise auguga tsentris.

Täpsustame uuritavat probleemi. Vaadeldav plaat on nn. lõpmatu plaat ja elliptilise augu poolteljed on a ja b ($a > b$). Lõpmatuses on plaadile rakendatud ühtlane tõmme, mis on risti poolteljega a . Ellips on määratud võrrandiga $\xi = \xi_0$. Kehtivad tasapinnalise deformatsiooni hüpoteesid, st. nullist erinevaks loetakse vaid neli pingetensori komponenti t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} ja $t_{zz} = \nu(t_{xx} + t_{yy})$. Viimased saab leida avaldistest (3.106), kuid enne tuleb formuleerida rajatingimused:

$$\text{lõpmatuses:} \quad t_{yy} = t_0, \quad t_{xx} = t_{xy} = 0; \quad (3.107)$$

$$\text{augu serval:} \quad T_{\xi\xi} = T_{\xi\eta} = 0. \quad (3.108)$$

Asendades rajatingimused (3.107) avaldistesse (3.106) saame lõpmatuse jaoks

$$4\text{Re}[f'(z)] = t_0 \quad \text{ja} \quad 2[\bar{z}f''(z) + g''(z)]e^{2i\vartheta} = t_0. \quad (3.109)$$

Elliptilised koordinaadid ξ ja η toodi sisse avaldisega (3.100). Seega teeb punkt ühe tiiru ümber ellipsi kui η muutub nullist 2π . Seega peavad ka pingekomponendid ja siirdekomponeendid olema ühesed

ja η suhtes perioodilised perioodiga 2π . Sellest tulebki lähtuda funktsioonide $f(z)$ ja $g(z)$ valikul — näiteks hüperboolsed funktsioonid $\sinh n\zeta$ ja $\cosh n\zeta$ ($n \in \mathbb{Z}$ täisarv) on perioodilised η suhtes perioodiga 2π . Inglis [1913] pakkus välja järgmise valiku

$$\begin{cases} 4f(z) = A_1 c \cosh \zeta + A_2 c \sinh \zeta, \\ 4g(z) = B_1 c^2 \zeta + B_2 c^2 \cosh 2\zeta + B_3 c^2 \sinh 2\zeta, \end{cases} \quad (3.110)$$

kus konstandid A_1, A_2, B_1, B_2 ja B_3 määratakse rajatingimustest ja avaldise (3.100) põhjal $z = c \cosh \zeta$. Pärast rajatingimuste rahuldumist saavad avaldised (3.110) kuju

$$\begin{cases} 4f(z) = ct_0 [(1 + e^{2\xi_0}) \sinh \zeta - e^{2\xi_0} \cosh \zeta], \\ 4g(z) = \\ -c^2 t_0 \left\{ (\cosh 2\xi_0 - \cosh \pi) \zeta + \frac{1}{2} e^{2\xi_0} - \cosh \left[2 \left(\zeta - \xi_0 - \frac{i\pi}{2} \right) \right] \right\}. \end{cases} \quad (3.111)$$

Kui tähistada siirdekomponeente elliptilistes koordinaatides u_ξ ja u_η ning DRK-s u ja v ., siis on nende vaheline seos esitatav kujul

$$u_\xi = u \cos \vartheta + v \sin \vartheta \quad \text{ja} \quad u_\eta = -u \sin \vartheta + v \cos \vartheta. \quad (3.112)$$

Viimase põhjal

$$u_\xi + iu_\eta = e^{-i\vartheta}(u + iv). \quad (3.113)$$

Kasutades avaldist (3.99) saab viimasest

$$2\mu(u_\xi + iu_\eta) = e^{-i\vartheta} [(3 - 4\nu)f(z) - z\bar{f}'(\bar{z}) - \bar{g}'(\bar{z})]. \quad (3.114)$$

Kuna augu serval $T_{\xi\xi} = 0$, siis avaldiste (3.106) ja (3.111) põhjal

$$T_{\eta\eta}|_{\xi=\xi_0} = 4\text{Re}[f'(z)] = \frac{t_0[\sinh(2\xi_0) - 1 + e^{2\xi_0} \cos(2\eta)]}{\cosh(2\xi_0) - \cos(2\eta)}. \quad (3.115)$$

$T_{\eta\eta}$ maksimaalsed väärtused on seal, kus $\cos 2\eta = 1$, st. kus $\eta = 0, \pi, 2\pi, \dots$, st. pikema peatelje otstes. See maksimaalne väärtus

$$\max T_{\eta\eta} = T_{\eta\eta} \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = 0, \pi, \dots}} = \frac{t_0[\sinh(2\xi_0) - 1 + e^{2\xi_0}]}{\cosh(2\xi_0) - 1}. \quad (3.116)$$

Võrrandi (3.102) põhjal $a = c \cosh \xi_0$, $b = c \sinh \xi_0$ ja $c^2 = a^2 - b^2$. Seega $\sinh 2\xi_0 = 2ab/c^2$, $\cosh 2\xi_0 = (a^2 + b^2)/c^2$ ning avaldis (3.116) saab kuju

$$\max T_{\eta\eta} = T_{\eta\eta} \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = 0, \pi, \dots}} = t_0 \left(1 + \frac{2a}{b} \right). \quad (3.117)$$

Seega kui $b \rightarrow 0$, siis $\max T_{\eta\eta} \rightarrow \infty$. Kui $b \rightarrow 0$, siis ellips läheneb joonele, täpsemalt sirgele praole. Seega ennustab lineaarne teooria siin füüsikaliselt paikapidamatut.⁷ Kui $a = b$, siis on auk ringikujuline ja probleeme pole — $\max T_{\eta\eta} = 3t_0$. $T_{\eta\eta}$ minimaalne väärtus on lühema pooltelje otsas ja on nii ellipsi kui ringi puhul $-t_0$.

3.8 Lainelevi elastses keskkonnas

3.8.1 Põhivõrrandid

Käesolevas alajaotuses tuletame harmooniliste lainete levimist kirjeldavad võrrandid lineaarse elastse keskkonna jaoks. Lähtume punktis 3.1 tuletatud Navier' võrrandeist (3.21) või (3.22), st.,

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (3.118)$$

Viimase kirjeldavad elastse keskkonna liikumist siiretes \mathbf{u} . Kasutades lineaarse elastsusteooria eeldust, et nii siirde kui kiiruse grafiendid on väikesed ja tähistades

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{ja} \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.119)$$

saame Navier' võrranditele kuju

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c_1^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_2^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (3.120)$$

Helmholtzi teoreemi põhjal saab siirdevälja $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ avaldada kujul

$$\mathbf{u} = \nabla F + \nabla \times \mathbf{G}, \quad (3.121)$$

kus $F = F(\mathbf{x}, t)$ ja $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ on vaadeldavas piirkonnas pidevalt diferentseeruvad skalaar- ja vektorfunktsioonid, mis on tuntud kui Lamé potentsiaalid. Helmholtzi teoreemi rakendades eeldasime, et \mathbf{u} on vaadeldavas piirkonnas tõkestatud, pidevalt diferentseeruv ja et $r^2 |\mathbf{u}|$ on tõkestatud lõpmatuses. Siin $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ on punkti \mathbf{x} ja suvalise punkti \mathbf{x}' vaheline kaugus (tavaliselt vaadeldakse \mathbf{x} kui laineallika asukohta ja \mathbf{x}' kui vaatleja asukohta).

⁷Mittelineaarses seades on see probleem praeguseks lahendatud.

Kuna nüüd on meil kolm siirdekomponenti u_k esitatud avaldisega (3.121) läbi nelja muutja F ja G_K , siis on tekkinud nn. esimest järku määramatus. Selle kõrvaldamiseks on vaja sisse tuua lisakitsendus. Üks, kuid mitte ainuke võimalus selleks on väita, et vektorväli \mathbf{G} peab olema divergentsi vaba, st.,

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0. \quad (3.122)$$

Sellist tingimust nimetatakse kalibratsiooni tingimuseks⁸. Ka võrrandis (3.121) esinevale mahujõule võime rakendada Helmholtzi teoreemi koos kalibratsiooni tingimusega —

$$\mathbf{f} = \nabla f_1 + \nabla \times \mathbf{f}_2, \quad \nabla \cdot \mathbf{f}_2 = 0, \quad (3.123)$$

kus f_1 ja \mathbf{f}_2 on vastavalt skalaar- ja vektorpotentsiaal mahujõu jaoks. Sageli on ainukeseks mahujõuks gravitatsioonijõud, mis omakorda on ajast sõltumatu. Väga sageli aga mahujõud hüljatakse.

Asendades Navier'võrrandeis (3.120) suurused \mathbf{u} ja \mathbf{f} avaldistest (3.121) ja (3.123), saame saame

$$\nabla \left(c_1^2 \nabla^2 F + f_1 - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right) + \nabla \times \left(\nabla c_2^2 \nabla^2 \mathbf{G} + \mathbf{f}_2 - \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (3.124)$$

Võrrand (3.124) on rahuldatud kui valida F ja \mathbf{G} kui kahe võrrandi

$$c_1^2 \nabla^2 F + f_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad \text{ja} \quad \nabla c_2^2 \nabla^2 \mathbf{G} + \mathbf{f}_2 = \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} \quad (3.125)$$

lahendid. Võrrandid (3.125) on mittehomoogeensed lineaarsed lainevõrrandid. Kui nüüd suurused F ja \mathbf{G} on leitud kui võrrandeid (3.125) ja konkreetseid raja- ning algtingimusi rahuldavad lahendid, siis on siirdeväli leitav avaldistest (3.121).

Lamé potentsiaalidel on mitmeid huvitavaid omadusi, näiteks kalibreerimistingimuse tõttu

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 F \quad \text{ja} \quad \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla^2 \mathbf{G}. \quad (3.126)$$

⁸I. k. *gauge condition*

Lisaks eelnimetatule väidab Helmholtzi teoreem, et ∇F kujutab endast siirdevälja \mathbf{u} keerisevaba osa ja $\nabla \times \mathbf{G}$ solenoidaalset osa — $\nabla \times \nabla F = 0$ ja $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0$. Tähistame siirdevälja solenoidaalse osa

$$\mathbf{u}_s = \nabla \times \mathbf{G}. \quad (3.127)$$

Seega

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0. \quad (3.128)$$

Kuna lineaarse teooria puhul

$$\left(\frac{dv - dV}{dV} \right)_s \approx (\mathbf{I}_e)_s = \nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0, \quad (3.129)$$

siis saab teha järelduse, et siirdevälja solenoidaalsele osale vastav deformatsioon on isohooriline.

Skalaarne ja vektoriaalne lainevõrrand (3.125) viitab selgelt sellele, et antud ülesande lahendina saadakse kaks lainet — üks liigub kiirusega c_1 ja teine kiirusega c_2 , kusjuures need kiirused sõltuvad materjali elastsuskonstantidest ja massi tihedusest. Kui vaatleme tõkestamata piirkonda, siis peab siirdeväli rahuldama veel teatavaid lisatingimusi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \right) \quad \text{ja} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u} = 0, \quad (3.130)$$

kus $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ on allika ja vaadeldava piirkonna suvalise punkti vaheline kaugus ning c on laine kiirus (faasi kiirus). Esimene tingimus, st. (3.130)₁, on nn. kiirgustingimus⁹, mis sisuliselt tähendab seda, et tõkestamata piirkonnas saab laine liikuda vaid allikast eemale ja lõpmatuses ei kiirgu mitte midagi tagasi. Teine tingimus, st. (3.130)₂, on nn. regulaarsustingimus, mis väidab, et lõpmatuses on siirdeväli null. Seega tõkestamata piirkonnas tuleb ühese lahendi saamiseks täita lisaks raja- ja algtingimustele ka nn. kiirgus- ja regulaarsustingimused.

⁹I. k. *radiation condition*

3.8.2 Tasapinnalised harmoonilised lained

Vaatleme selliseid laineid, mille liikumine on identne paralleelse tel tasanditel tasanditel ning mis ei sõltu tingimustest vaadeldava tasandiga ristaval suunal. Sel juhul on kõik väljamuutujad, kaasa arvatud siirded, deformatsioonid ja pinged, vaadeldavad kui kahe ruumimuutuja ja aja funktsioonid. Seega on meil tegu tasapinnalise ülesandega. Lihtsuse mõttes vaatleme juhtu, kus mahujõud on hüljatud, st., vaatleme vaid selliseid füüsikalisi protsesse, kus mahujõud võib jätta arvesse võtmata.

Kasutame DRK $x^1 \equiv x, x^2 = y$ ja $x^3 = z$. Vastavaid siirdekomponeente tähistame $u^1 = u, u^2 = v$ ja $u^3 = w$. Avaldise (3.121) kohaselt on siirdekomponeendid esitatavad läbi Lamé potentsiaalide F ja \mathbf{G} kujul

$$u^k = \delta^{kl} F_{,l} + e^{klm} G_{m,l}. \quad (3.131)$$

Kuna tasapinnalised juhul sõltuvad kõik väljamuutujad vaid kahest ruumikoordinaadist, näiteks $x^1 = x$ ja $x^2 = y$, siis saavad võrdused (3.131) kujul

$$u^1 = \frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial G_3}{\partial x^2}, \quad u^2 = \frac{\partial F}{\partial x^2} - \frac{\partial G_3}{\partial x^1}, \quad u^3 = \frac{\partial G_2}{\partial x^1} - \frac{\partial G_1}{\partial x^2}. \quad (3.132)$$

Tähistades $G_3 = G$, saab viimase esitada kujul

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}. \quad (3.133)$$

Lamé potentsiaalid leitakse lainevõrranditest (3.125).

Et leida pingeaotust, asendame siirdekomponeendid (3.133) olekuvõrranditesse (3.89). Saame

$$\begin{cases} t_{xx} = \lambda \nabla^2 F + 2\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \right), \\ t_{yy} = \lambda \nabla^2 F + 2\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \right), \\ t_{zz} = \lambda \nabla^2 F, \\ t_{xy} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right), \\ t_{yz} = \mu \left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2} \right), \\ t_{zx} = \mu \left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y} \right), \end{cases} \quad (3.134)$$

kus $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Standardne meetod lainevõrrandite (3.125) lahendamiseks «harmoonilistes lainetes» on järgmine. Lainevõrrandi lahend esitatakse kujul

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \operatorname{Re} E, \quad E = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]. \quad (3.135)$$

Siin \mathbf{a} ja \mathbf{k} on konstantsed vektorid, mida nimetatakse vastavalt amplituudivektoriks ja lainevektoriks, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ on laine faas ning ω laine ringsagedus (nurksagedus). Sellisel juhul on siirdevälja periood $T = 2\pi/\omega$. Lainevektori füüsikaline sisu on järgmine — lainevektor \mathbf{k} määrab laine levimissuuna ja tema moodul $k = |\mathbf{k}|$ annab lainearvu. Viimane on omakorda seotud lainepikkusega $l = 2\pi/k$ ehk $k = 2\pi/l$. Suurust

$$c = \frac{l}{T} = \frac{\omega}{k} \quad (3.136)$$

nimetatakse faasikiiruseks ja ta määrab laine levimise kiiruse. Kui tähistame laine levimissuunda määrava ühikvektori \mathbf{n} , siis

$$\mathbf{k} = \mathbf{n}k. \quad (3.137)$$

Pinda, mille lokaalseks normaaliks on \mathbf{n} , nimetatakse laine frondiks. Frondi võrrandi saaame avaldisest (3.135)₂ —

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t = kn_p x^p - \omega t = \text{const.}, \quad p = 1, 2. \quad (3.138)$$

On selge, et frondi võrrand sõltub ajast.

Enne avaldiste (3.135) asendamist Navier' võrrandeisse (3.120) loobume kokkuleppeliselt tähistusest Re avaldises (3.135) ning toome sisse mõningad lihtsustused.

$$\begin{cases} \nabla E = \mathbf{g}^m \frac{\partial E}{\partial x^m} = i\mathbf{g}^m k_m E & \Rightarrow \quad \nabla = i\mathbf{k} = ik\mathbf{n}, \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{a})k^2 E, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = (\mathbf{a} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{a})k^2 E, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\mathbf{a}\omega^2 E, \end{cases} \quad (3.139)$$

kus $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ on vektori \mathbf{n} väliskorrutis (tensorkorrutis) iseendaga. Asendame nüüd siirdevektori (3.135) Navier' võrrandeisse (3.120). Arvestades lihtsustusi (3.139) saame

$$[(c^2 - c_2^2)\mathbf{I} - (c_1^2 - c_2^2)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (3.140)$$

Siin $c = \omega/k$ on faasikiirus ning nii identsustensor \mathbf{I} kui vektorid \mathbf{n} ja \mathbf{a} on defineeritud (x^1, x^2) tasandil.

Võrrand (3.140) omab ühest lahendit \mathbf{a} suhtes kui

$$\det(m\mathbf{B}) = 0, \quad (3.141)$$

kus

$$m = c^2 - c_2^2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} - \frac{1}{m} (c_1^2 - c_2^2) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (3.142)$$

Kuna \mathbf{B} on esitatav 2×2 matriksina, siis

$$\det(m\mathbf{B}) = m^2 \det(\mathbf{B}). \quad (3.143)$$

Omakorda

$$\det(\mathbf{B}) = 1 - \frac{1}{m} (c_1^2 - c_2^2) = \frac{c^2 - c_1^2}{c^2 - c_2^2}, \quad (3.144)$$

sest $\det(\mathbf{I} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = \det(\delta^k_l - b^k c_l) = 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ kui \mathbf{b} ja \mathbf{c} on defineeritud ruumis E^2 . Seega, arvestades (3.144) on tingimus (3.141) esitatav kujul

$$(c^2 - c_1^2)(c^2 - c_2^2) = 0. \quad (3.145)$$

Viimane tingimus viitab veelkord sellele, et elastses keskkonnas on võimalik kaks erinevat laine liikumist — üks toimub faasikiirusega $c = c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ ja teine faasikiirusega $c = c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$.

Juht $c = c_1$. Sel korral saame võrrandist (3.140)

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}). \quad (3.146)$$

Viimane avaldis ütleb, et siirdevektor \mathbf{u} on laine levimissuunaga samasihiline — $\mathbf{a} \parallel \mathbf{n}$. Selliseid laineid nimetatakse pikilaineteks ja nad levivad kiirusega $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$. Kuna avaldiste (3.135), (3.137) ja (3.139) põhjal

$$\nabla \times \mathbf{u} = -ikE\mathbf{n} \times \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) = 0, \quad (3.147)$$

siis on pikilaine alati nn. mittepöörlev laine (keerisevaba laine). Vahel nimetatakse neid ka paisumislaineteks¹⁰.

Juht $c = c_2$. Nüüd on (3.140) põhjal

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (3.148)$$

mis tähendab, et siirdevektor \mathbf{u} on risti laine levimissuunaga \mathbf{n} , st., et siirdevektor asub liikuva laine frondi tasandil. Sellist lainet nimetatakse põiklaineteks ehk ristlaineteks ehk nihkelaineteks. Tema levib kiirusega $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$. Antud juhul

$$\mathbf{I}_e = \nabla \cdot \mathbf{u} = ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}E = 0 \quad (3.149)$$

¹⁰I. k. *dilatational waves*

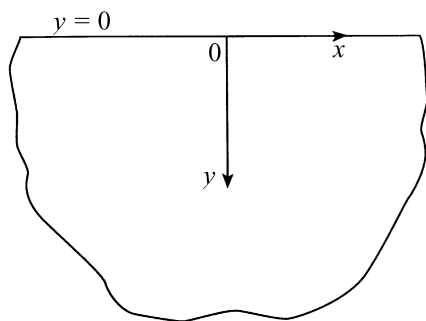
ja seega on tegu isohoorilise protsessiga (vt. (3.129) lk. 117).

Tasapinnaliste harmooniliste lainete puhul nimetatakse pikilainet primaarseks¹¹ ja põiklainet sekundaarseks¹², sest kuna $c_1 > c_2$, siis näiteks maavärina puhul saabub esimene varem.

3.8.3 Rayleigh' lained

Käesolevas punktis vaadeldakse pinnalaineid (näit. seismilised lained). Pinnalaine kujutab endast häiritust, mis liigub läbi keskkonna nii, et tema mõju on oluline vaid kitsas piirkonnas keskkonna piirpinna lähedal. Selliste lainete amplituud väheneb kiiresti sügavuse kasvades ja lained levivad pinnakihtide puutujate sihis. Vaadeldava teooria loojaks peetakse Rayleigh't (1885).

Vaatleme elastset poolruumi $y \geq 0$, mis on piiratud tasandiga $y = 0$ ning alajaotuste 3.8.1 ja 3.8.2 tulemusi. z -telje (mis on



Joonis 3.3: Elastne poolruum

risti xy tasandiga) sihis ulatub keskkond $z = \pm\infty$. Kõik vaadeldavad füüsikalised suurused sõltuvad vaid muutujatest x, y ja t .

¹¹I. k. *primary wave, P-wave*

¹²I. k. *secondary wave, S-wave*

Massjõudude puudumisel saavad võrrandid (3.125) kuju

$$\nabla^2 F = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 G = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad (3.150)$$

kus konstandid c_1 ja c_2 leitakse valemitest (3.119), F ja G on vastavalt Lamé skalaarpotentsiaal ja vektorpotentsiaali \mathbf{G} z -telje sihiline komponent (vt. (3.132)). (Kuna me oleme huvitatud vaid xy tasandil toimuvast, siis ei paku G_1 ja G_2 huvi.)

Eeldame, et $y = 0$ on vaba pind ja seega on rajatingimused pingete jaoks esitatavad kujul

$$t_{xy} = t_{yy} = 0, \quad \text{kui } y = 0. \quad (3.151)$$

Siirde ja pingeväljad on esitatud vastavalt avaldistega (3.133) ja (3.134).

Antud ülesande puhul otsime lainevõrrandeile (3.150) selliseid lahendeid F ja G , mille puhul laine amplituud kahaneb kiiresti sügavuse y kasvades ning millel on sama periood nii aja t kui koordinaadi x järgi (sest nad koos peavad rahuldama Navier' võrrandeid). Seega on lainevõrrandite (3.150) lahendid on esitatavad kujul

$$\begin{cases} F(x, y, t) = a \exp[-\alpha y + ik(x - ct)], \\ G(x, y, t) = b \exp[-\beta y + ik(x - ct)], \end{cases} \quad (3.152)$$

kus a ja b on lainete amplituudid, α ja β — sumbuustegurid (amplituud peab kiiresti vähenema sügavuse kasvades), k — lainearv ja c — faasikiirus.

Üldiselt võivad suurused a, b, α, β ja c olla mittelineaarsed funktsioonid ringsagedusest ω (või lainearvust k või lainepikkusest l). Seega kui faasikiirus $c(k) = \omega(k)/k \neq \text{const.}$, siis iga alghäiritust moodustav harmooniline laine levib erineva kiirusega ja laine kuju muutub oluliselt. Sellist nähtust nimetatakse dispersiooniks.

Kui panna kompleksed avaldised (3.152) võrranditesse (3.150), siis saame reaalarvulise faasikiiruse eksisteerimise tingimuse

$$\alpha^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right), \quad \beta^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right). \quad (3.153)$$

See reaalarvuline faasikiirus leitakse rajatingimustest. Algul asendame avaldised (3.152) ja (3.153) pingete avaldistesse (3.134) ja rakendame rajatingimusi (3.151). Saame võrrandisüsteemi

$$-\frac{2i\alpha}{k}a + \left(1 + \frac{\beta^2}{k^2}\right)b = 0, \quad \left(1 + \frac{\beta^2}{k^2}\right)a + \frac{2i\beta}{k}b = 0 \quad (3.154)$$

amplituudide a ja b määramiseks. Vaadeldaval võrrandisüsteemil on mittetriviaalne lahend siis ja ainult siis kui

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{k^2}\right)^2 - \frac{4\alpha\beta}{k^2} = 0. \quad (3.155)$$

Asendades $\alpha(c)$ ja $\beta(c)$ avaldistest (3.153) võrrandisse (3.155) saame võrrandi faasikiiruse c leidmiseks. Võrrand (3.155) on tuntud kui Rayleigh' võrrand. Tähistame

$$\xi = \frac{c^2}{c_2^2}, \quad m = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}, \quad (3.156)$$

kus ν on Poisson'i koefitsent. Kuna $0 \leq \nu \leq 1/2$, siis ka $0 \leq m \leq 1/2$ ja kui ν kasvab, siis m kahaneb. Avaldised (3.153) ja Rayleigh' võrrand (3.155) saavad nüüd kujul

$$\alpha = k(1 - m\xi)^{1/2}, \quad \beta = k(1 - \xi)^{1/2} \quad (3.157)$$

ja

$$R(\xi) = (2 - \xi)^2 - 4(1 - \xi)^{1/2}(1 - m\xi)^{1/2} = 0. \quad (3.158)$$

Et vabaneda viimases ruutjuurtest, korrutame teda avaldisega

$$M(\xi) = (2 - \xi)^2 + 4(1 - \xi)^{1/2}(1 - m\xi)^{1/2} \quad (3.159)$$

ning saame

$$\xi [\xi^3 - 8\xi^2 + 8\xi(3 - 2m) - 16(1 - m)] = 0. \quad (3.160)$$

Lahend $\xi = 0$ ei sobi, sest siis ka $c = 0$ ja laine ei leviks. Seega tuleb lahendada kuupvõrrand

$$N(\xi) = \xi^3 - 8\xi^2 + 8\xi(3 - 2m) - 16(1 - m) = 0. \quad (3.161)$$

Kuna $N(0) < 0$ ja $N(1) > 0$, siis järelikult leidub vahemikus $0 < \xi < 1$ vähemalt üks võrrandi (3.161) juur $\xi_1 = c^2/c_2^2$ (vastav c on reaalne ja $c < c_2$).

Võrrandite (3.158)–(3.161) põhjalik analüüs näitab, et ξ_1 ongi ainus reaalse faasikiiruse tagav ja võrrandit (3.158) rahuldav ξ väärtus. Saadud reaalsel pinnalaine kiirust

$$c_R = (\xi_1)^{1/2}c_2 \quad (3.162)$$

nimetatakse Rayleigh' laine kiiruseks.

Eringen ja Suhubi (1975) on leidnud Rayleigh' laine kiirusi väga mitmete materjalide jaoks, nende järgi:

kokkusurumatu materjal,	$\nu = 0,5,$	$c_R = 0,9553c_2,$
teras,	$\nu = 0,29,$	$c_R = 0,9258c_2,$
nn. Poisson'i materjal,	$\nu = 0,25,$	$c_R = 0,9194c_2.$

Kasutades c_R väärtust Poisson'i materjali jaoks saame läbi avaldiste (3.133) siirdekomponeendid kujul

$$\begin{cases} u = -kA[\exp(-0,8475ky) - \\ \quad - 0,5773 \exp(-0,3933ky)] \sin[k(x - c_R t)], \\ v = kA[-0,8475 \exp(-0,8475ky) + \\ \quad + 1,4679 \exp(-0,3933ky)] \cos[k(x - c_R t)], \end{cases} \quad (3.163)$$

kus A on ampituudi tegur. Vastavad pingekomponendid saadakse avaldistest (3.134).

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	3
1.1 Kirjandus	4
1.2 Ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhimõistetest, -hüpoteesidest ja -võrrandeist.	6
1.2.1 Põhieeldused ja -hüpoteesid	6
1.2.2 Skalaar, vektor, tensor	9
1.2.3 Baasivektorid ja meetrilised tensorid	11
1.2.4 Liikumise kirjeldamine	12
1.2.5 Deformatsioon ja siire	13
1.2.6 Kiirus ja kiirendus	23
1.2.7 Mass	26
1.2.8 Jõud	27
1.2.9 Liikumishulk	29
1.2.10 Kineetiline moment	30
1.2.11 Pinge	31
1.2.12 Pingetensor	33

1.2.13 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused — Cauchy liikumisseadused	35
1.2.14 Liikumisvõrrandid Lagrange'i koordinaatides	36
1.2.15 Energia ja entroopia	38
1.2.16 Pidevustingimused ehk sobivustingimused	44
1.2.17 Olekuvõrrandid	45
1.3 Elastsusteooria põhivõrrandite süsteem	48
2 Valik teemasid mittelineaarsest elastsusteooriast	51
2.1 Homogeenne ehk ühtlane deformatsioon	51
2.1.1 Põhiseosed	51
2.1.2 Puhas homogeenne deformatsioon	53
2.1.3 Tõmme	55
2.1.4 Hüdrostaatiline surve	56
2.1.5 Nihe	56
2.2 Ringsilindri vääne	60
2.3 Ploki paine	65
2.4 Lõplik tasapinnaline deformatsioon	71
2.5 Elastsuskonstantide eksperimentaalne määramine	78
2.5.1 Sissejuhatus	78
2.5.2 Puhas homogeenne deformatsioon (kokkusurumatu lehe ühtlane laienemine)	80
2.5.3 Puhas nihe	83
2.5.4 Tõmme	84
2.5.5 Ühtlane kahedimensionaalne tõmme	85

3	Valik teemasid lineaarsest elastsusteooriast	88
3.1	Põhivõrrandid	88
3.2	Lamé koefitsentide seos Youngi mooduli ja Poisson'i teguriga	93
3.3	Sobivustingimused pingetes	96
3.4	Tasand-deformatsioon ja tasandpinge elastostaatikas	98
3.5	Biharmoonilise võrrandi lahendamine analüütiliste . . .	101
3.6	Pingete jaotus ja siirdeväljad tasand-deformatsiooni puhul	104
3.7	Pingete kontsentratsioon . . . elliptilise augu ümber .	110
3.8	Lainelevi elastses keskkonnas	115
3.8.1	Põhivõrrandid	115
3.8.2	Tasapinnalised harmoonilised lained	118
3.8.3	Rayleigh' lained	122