

Peatükk 4

Valik klassikalisi inseneriprobleeme

4.1 Sissejuhatus

Käesolesvas peatükis esitatav materjal põhineb Timoshenko & Goodieri õpikul “Theory of Elasticity”

Tähistused

- σ — normaalpinge; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — normaalpinge komponendid (pingetensori normaalkomponendid).
- τ — nihkepinge; $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ — nihkepinge komponendid.
- Siirdevektori komponendid $u \parallel x, v \parallel y, w \parallel z$ on lõpmata väikesed pidevalt muutvad (üle kogu vaadeldava keha ruumala) suurused.

Deformatsioonitensori komponendid

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{cases} \quad (4.1)$$

NB! tensortähistuse puhul $2\tilde{e}_{12} = \gamma_{xy}$ jne.

Olekuvõrrand — Hooke'i seadus

- Vaatleme vaid nn. väikeseid deformatsioone.
- Tõmme x telje sihis ($\sigma_x \neq 0, \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \dots = 0$)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad (4.2)$$

kus E on Youngi moodul ja ν Poisson'i koefitsent. Tõmbel y telje või z telje sihis — analoogsed seosed.

- Nn. kolmeteljelisel tõmbel

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)], \end{cases} \quad (4.3)$$

- Nihkel

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ — nihkeelastsus moodul.} \end{aligned} \quad (4.4)$$

- Deformatsioonikomponendid ε . ja γ .. on üksteisest sõltumatud.
- Normaalspingete summa

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (4.5)$$

- Ruumpaisumine

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E}. \quad (4.6)$$

Hüdrostaatilisel surveel $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ ja

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E}p = -\frac{p}{k} \quad (4.7)$$

kus $k = E/[3(1 - 2\nu)]$ (see pole Timošenko ja Goodieri tähistus) on ruumpaisumis moodul ehk ruumi moodil.

- (4.3) pöördteisendus

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x, \\ \sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y, \\ \sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z, \end{cases} \quad (4.8)$$

kus

$$\lambda = \nu E/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)] \quad \text{ja} \quad \mu = G \quad (4.9)$$

on Lamé konstandid.

Tasapinnalised ülesanded

- Tasapinnaline pingeseisund (tasandpingus) — $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$, teised pingekomponendid on nullist erinevad. Võib veel täiendavalt eeldada, et pinge ei sõltu koordinaadist z .

- Tasapinnalisel deformatsioonil $w = 0$ ja $u = u(x, y)$ ning $v = v(x, y)$. Nüüd on vaja leida vaid kolm nullist erinevat sõltumatut pingekomponenti σ_x , σ_y ja τ_{xy} —

$$\begin{cases} \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

- Tasapinnalisel juhul saadakse tasakaalu diferentsiaal võrrandid elementaarristiküliku tasakaalu tingimustest

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

kus \mathbf{f} on mahujõud (st. $\dim \mathbf{f} = \text{jõud/ruumala}$).

- Rajatingimused

$$\begin{cases} t_x = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \\ t_y = m\sigma_y + l\tau_{xy}, \end{cases} \quad (4.12)$$

kus \mathbf{t} on pindjõud ja l, m — pinnanormaali \mathbf{N} suunakoosinused.

- Sobivus- ehk pidevustingimused (kolm deformatsioonikomponenti ja kaks siirdekompontenti).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.13)$$

- Tasapinnalise deformatsiooni puhul saame valemeist (4.3) ja

$$(4.4) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x], \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{cases} \quad (4.14)$$

- Kombineerides valemeid (4.14), sobivustingimusi (4.13) ja tasakaaluvõrrandeid (4.11) saame sobivustingimused pingetes

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right). \quad (4.15)$$

Viimase võrrandi põhjal selgub, et kui mahujõud on konstantsed, siis ei sisalda sobivusvõrrand materjalikonstantne.

- Tasandpinguse puhul saame avaldistest (4.3) ja (4.4)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (4.16)$$

- Kombineerides nüüd avaldise (4.16), sobivustingimusi (4.13) ja tasakaaluvõrrandeid (4.11) saame võrrandi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right). \quad (4.17)$$

Ka võrrand (4.17) (nagu ka sobivusvõrrand (4.15)) annab konstantsete mahujõudude puhul tulemuseks

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (4.18)$$

mis ei sisalda materjalikonstante.

Airy' pingefunktsioon. Vaatleme juhtu, kus ainuke mahujõud on keha kaal. Seega kui y telg on suunatud alla, siis $f_x = 0$ ja $f_y = \rho g$ ning tasakaaluvõrrandid (4.11) saavad kuju

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Need tuleb lahendada koos sobivustingimustega (4.18) ja rajatingimustega (4.12).

Väga tihti tuuakse nende võrrandite lahendamiseks sisse Airy' pingefunktsioon $\varphi = \varphi(x, y)$, mis on seotud pingekomponentidega järgmisel moel:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \rho g y; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho g y; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (4.20)$$

Sellise φ valiku puhul on tasakaaluvõrrandid (4.19) automaatselt rahuldatud. Pingekomponentide (4.20) asendamisel võrrandisse (4.18) saame biharmoonilise võrrandi

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (4.21)$$

Seega tuleb leida selline funktsioon φ , mis rahuldab nii diferentsiaalvõrrandit (4.21) kui ka rajatingimusi (4.12).

4.2 Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides

Vaadeldav lähenemisviis on rakendatav kui uuritakse pikki ristkülikulisi plaate või talasid.

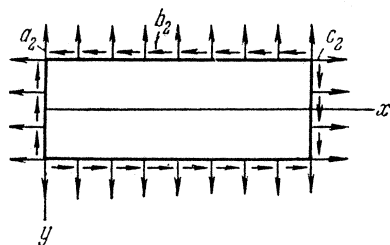
A) Ruutpolünoom

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2. \quad (4.22)$$

Sellise valiku puhul on biharmooniline võrrand (4.21) automaatselt rahuldatud. Massjõude hülgamise puhul saame avaldistest (4.20) pingekomponendid kujul

$$\sigma_x = c_2; \quad \sigma_y = a_2; \quad \tau_{xy} = -b_2. \quad (4.23)$$

Selline pingeseisund tähendab $a_2 > 0$ ja $c_2 > 0$ puhul ühtlast



Joonis 4.1: Ruutpolünoomile vastavad rajatingimused.

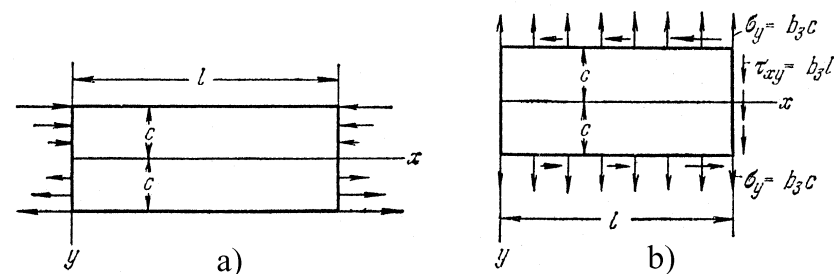
tõmmet kahes ristivas sihis koos ühtlase nihkega. Vastavad rajatingimused on esitatud joonisel 4.1. Võttes osa polünoomi koefitsente võrdseks nulliga, saab rajatingimusi varieerida.

B) Kuuppolünoom

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2}y^3. \quad (4.24)$$

Ka antud juhul on biharmooniline võrrand (4.21) automaatselt rahuldatud. Pingete avaldiste (4.20) põhjal aga

$$\sigma_x = c_3x + d_3y; \quad \sigma_y = a_3x + b_3y; \quad \tau_{xy} = -b_3x - c_3y. \quad (4.25)$$



Joonis 4.2: Kuuppolünoomile vastavad rajatingimused: a) $d_3 \neq 0$, $a_3 = b_3 = c_3 = 0$ ja b) $b_3 \neq 0$, $a_3 = c_3 = d_3 = 0$

- Valides nüüd vaid $d_3 \neq 0$ saame puhtale paindele vastava pingeseisundi. Vastavad rajatingimused on esitatud joonisel 4.2 a).
- Vaid $b_3 \neq 0$ — pindadel $y = \pm c$ mõjuvad pinged $\sigma_y = \pm b_3y$ ja $\tau_{yx} = -b_3x$ ning pinnal $x = l$ pinge $\tau_{xy} = -b_3l$ (joonis 4.2 b)).
- Vaid $c_3 \neq 0$...
- Vaid $a_3 \neq 0$...

Teist ja kolmandat järku polünoomide puhul polnud vaja esitada täiendavaid kitsendusi polünoomide koefitsentidele, sest biharmooniline võrrand oli automaatselt rahuldatud. Kõrgemat järku polünoomide puhul pole asi aga enam nii lihtne.

C) Neljandat järku polünoom

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4. \quad (4.26)$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (4.21) rahuldatud vaid juhul kui

$$e_4 = -(2c_4 + a_4) \quad (4.27)$$

ning pingekomponendid (4.20) saavad kuju

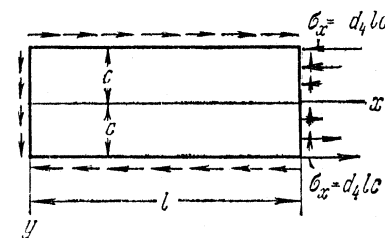
$$\begin{cases} \sigma_x = c_4 x^2 + d_4 x y - (2c_4 + a_4) y^2; \\ \sigma_y = a_4 x^2 + b_4 x y + c_4 y^2; \\ \tau_{xy} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 x y - \frac{d_4}{2} y^2. \end{cases} \quad (4.28)$$

Kuna koefitsentide a_4, \dots, d_4 valik on vaba, siis on (4.28) abil võimalik kirjeldada mitmesuguseid rajatingimusi. Näiteks kui vaid $d_4 > 0$ on nullist erinev polünoomi koefitsent, siis

$$\sigma_x = d_4 x y; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2. \quad (4.29)$$

Vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} y = \pm c, & \tau_{yx} = -\frac{d_4}{2} c^2, \\ x = 0, & \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2 \\ x = l, & \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2, \quad \sigma_x = d_4 l y. \end{cases} \quad (4.30)$$



Joonis 4.3: Neljandat järku polünoomile vastavad rajatingimused $d_4 > 0$ ja $a_4 = b_4 = c_4 = 0$ puhul.

on kujutatud joonisel 4.3.

Vaatleme ühikulise paksusega plaati. Leiame plaadi kontuuril mõjuvatest pingetest põhjustatud jõupaaride momendid (vt. joonis 4.3)

$$\begin{cases} M(\tau_{xy}) = -2 \int_0^c |\tau_{xy}| l dy = \dots = -\frac{d_4 l c^3}{3}, \\ M(\tau_{yx}) = 2 |\tau_{yx}| l c = \dots = d_4 l c^3, \\ M(\sigma_x) = -2 \int_0^c \sigma_x y dy = \dots = -\frac{2d_4 l c^3}{3}. \end{cases} \quad (4.31)$$

Seega on antud juhul (st. juhul kui mööda plaadi kontuuri on raken-datud joonisel 4.3 kujutatud pindjõud) plaadile mõjuv jõusüsteem tasakaalus.

Kui vaid $c_4 > 0$ oleks nullist erinev polünoomi koefitsent, siis saaksime avaldistest (4.28)

$$\sigma_x = c_4 x^2 - 2c_4 y^2; \quad \sigma_y = c_4 y^2; \quad \tau_{xy} = -2c_4 x y. \quad (4.32)$$

Jne., jne.

D) Viiendat järku polünoom

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5. \quad (4.33)$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (4.21) rahuldatud kui

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5) \text{ ja } f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5). \quad (4.34)$$

Pinge komponendid

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} = \dots \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x^2} = \dots \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} = \dots \end{cases} \quad (4.35)$$

Valides vaid $d_5 > 0$ nullist erinevaks polünoomikoefitsendiks, saame pingejaotuse

$$\sigma_x = d_5(x^2 y - \frac{2}{3} y^3), \quad \sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3, \quad \tau_{xy} = -d_5 x y^2. \quad (4.36)$$

Viimasele vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} y = \pm c, & \sigma_y = \pm \frac{1}{3} d_5 c^3, & \tau_{yx} = -d_5 x c^2 \\ x = 0, & \sigma_x = -\frac{2d_5 y^3}{3}, & \tau_{xy} = 0, \\ x = l, & \sigma_x = d_5(l^2 y - \frac{2}{3} y^3), & \tau_{xy} = -d_5 l y^2. \end{cases} \quad (4.37)$$

Kuna biharmooniline võrrand (4.21) on lineaarne diferentsiaalvõrrand, siis on tema lahendiks ka suvaline lahendite superpositsioon. Seega, liites eespool leitud elementaarlahendeid, saame leida meid huvitava probleemi lahendi.

Kui nüüd pingekomponendid on määratud, siis saab Hooke'i seaduse (4.3) ja (4.4) abil leida deformatsioonikomponendid ε_x , ε_y ja γ_{xy} . Viimastest omakorda aga siirdekomponeendid kui diferentsiaalvõrrandite

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} \quad (4.38)$$

lahendid u ja v . Tõsi küll, (4.38) ei määra siirdekomponeente üheselt. Kui lisada siirdekomponeentidele u ja v lineaarfunktsioonid, vastavalt

$$u_1 = a + by \text{ ja } v_1 = c - bx, \quad (4.39)$$

siis jääb (4.38) kehtima (a, b, c on konstandid). Konstandid a ja c määravad jäiga keha rööpliikumise ja konstant b jäiga keha pöörde ümber z telje väikese nurga võrra.

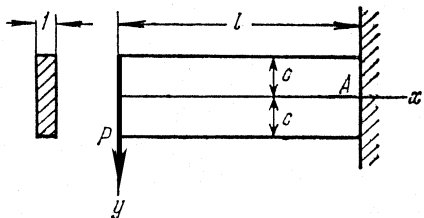
Konkreetsete ülesannete puhul pöördume diferentsiaalvõrrandite (4.38) juurde tagasi.

4.3 Saint-Venant'i printsiip

Elastse keha pinna väikesele osale mõjuva jõusüsteemi asendamine staatiliselt ekvivalentsega muudab oluliselt lokaalseid pingeid jõudude rakenduskoha lähedal, kuid praktiliselt ei mõjuta pingeid punktides, mis asuvad piisavalt kaugel pinnaosast, kus jõusüsteemi muudeti. Kaugust tuleb võrralda vaadeldava pinnaosa lineaarmõõtmega. Mõjud (täiendavad pinged ja deformatsioonid) vähenevad geomeetrilise progressiooni kiirusega.

4.4 Konsooli paine

Vaatleme kitsa ristkülikulise ristlõikega konsooli, mille vabas otsas ($x = 0$) on rakendatud jõud \mathbf{P} , mida võib vaadelda kui otspinnal mõjuvate nihkepingete peavektorit (joonis 4.4). Konsooli pealmine ja alumine pind on pingevabad ja ots $x = l$ jäigalt kinnitatud.



Joonis 4.4: Kitsa ristkülikulise ristlõikega konsool pikkusega l , kõrgusega $2c$ ja paksusega 1 .

Sellist olukorda saab vaadelda kui superpositsiooni puhtast nihkest (alajaotus 4.2 A valemid (4.23) $a_2 = c_2 = 0$ ja $b_2 \neq 0$) ja valemitega (4.29) esitatud juhust (alajaotus 4.2 C $a_4 = b_4 = c_4 = e_4 = 0$ ja $d_4 \neq 0$). Saame

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2. \quad (4.40)$$

Rajatingimused

$$\tau_{yx}|_{y=\pm c} = \tau_{xy}|_{y=\pm c} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}, \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{iy}|_{x=0} = P &= - \int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \int_{-c}^c \left(b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy \\ &\Rightarrow b_2 = \frac{3P}{4c}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Pannes nüüd konstandid b_2 ja d_4 valemite (4.41) ja (4.42) pingete avaldisse (4.40) saame

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right). \quad (4.43)$$

Arvestades, et inertsimoment $I \equiv I_z = 2c^3/3$, siis

$$\sigma_x = -\frac{P}{I} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} (c^2 - y^2). \quad (4.44)$$

Lahend on täpne Saint-Venanti printsipi mõttes, st., 4.2 C puhul on tala otsas nihkepinged paraboolse jaotusega.

Leiame nüüd siirdekomponeendid u ja v . Hooke'i seadusest

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{P}{EI} xy, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\nu P}{EI} xy, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2IG} (c^2 - y^2). \end{cases} \quad (4.45)$$

Integreerime (4.45)_{1,2} —

$$u = -\frac{P}{2EI} x^2 y + f(y), \quad v = \frac{\nu P}{2EI} x y^2 + f_1(x). \quad (4.46)$$

Pannes (4.46) valemisse (4.45)₃ saame

$$-\frac{P}{2EI} x^2 + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu P}{2EI} y^2 + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG} (c^2 - y^2). \quad (4.47)$$

Viimane on esitatav kujul

$$\begin{cases} F(x) + G(y) = K, \\ F(x) = \frac{df_1(x)}{dx} - \frac{P}{2EI} x^2, \\ G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu P}{2EI} y^2 - \frac{P}{2IG} y^2, \\ K = -\frac{P}{2IG} c^2. \end{cases} \quad (4.48)$$

Kuna $F(x) + G(y) = K = \text{const.}$, siis peavad ka $F(x)$ ja $G(y)$ olema konstantsed. Tähistades $F(x) = d$ ja $G(y) = e$ saame valemist (4.48) tingimuse

$$d + e = -\frac{P}{2IG}c^2 \quad (4.49)$$

ja diferentsiaalvõrrandid

$$\begin{cases} \frac{df(y)}{dy} = -\frac{\nu P}{2EI}y^2 + \frac{P}{2IG}y^2 + e, \\ \frac{df_1(x)}{dx} = \frac{P}{2EI}x^2 + d \end{cases} \quad (4.50)$$

Viimaste integreerimisel saame

$$\begin{cases} f(y) = -\frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6IG}y^3 + ey + g, \\ f_1(x) = \frac{P}{6EI}x^3 + dx + h. \end{cases} \quad (4.51)$$

Seega saavad siirete avaldised (4.46) kuju

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + ey + g, \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 + dx + h. \end{cases} \quad (4.52)$$

Konstandid d, e, g ja h määratakse tingimusest (4.49) ja kolmest rajatingimusest siiretele.

Olgu punkt A tala ristlõike $x = l$ kese. Seega peab olema see punkt fikseeritud — tema siirded on nullid ja ristlõige $x = l$ ei saa pöörelda ümber punkti A . Seega kui $x = l$ ja $y = 0$, siis $u = v = 0$ ning

$$g = 0 \quad \text{ja} \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl. \quad (4.53)$$

Et saada konsooli kõverdunud telje võrrandit, võtame valemis (4.52)₂ $y = 0$ —

$$v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l-x). \quad (4.54)$$

Konstandi d määramiseks kasutame kolmandat rajatingimust, mis ei luba vaadeldaval ristlõikel pöörelda ümber punkti A . Seda tingimust võib ette anda mitmel viisil. Vaatleme kahte:

a) tala telje element on punktis A fikseeritud, st.,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0; \quad (4.55)$$

b) tala ristlõike vertikaalne element on punktis A fikseeritud, st.,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0. \quad (4.56)$$

Juhul a) saame avaldiste (4.55), (4.54) ja (4.49) põhjal

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{ja} \quad e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI}. \quad (4.57)$$

Seega saavad siirdekomponeentide avaldised (4.52) ja kõverdunud telje võrrand (4.54) kuju

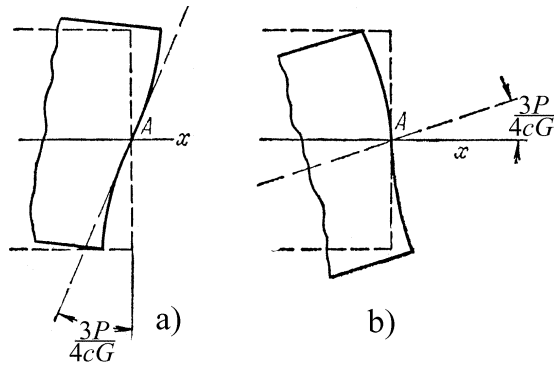
$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI} \right) y, \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI}, \\ v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI}. \end{cases} \quad (4.58)$$

Juhul b) saame konstantidele väärtused

$$d = \frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{ja} \quad e = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI} \quad (4.59)$$

ning tala kõverdunud telje võrrandiks

$$v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{2EI} + \frac{Pc^2}{2GI}(l-x). \quad (4.60)$$

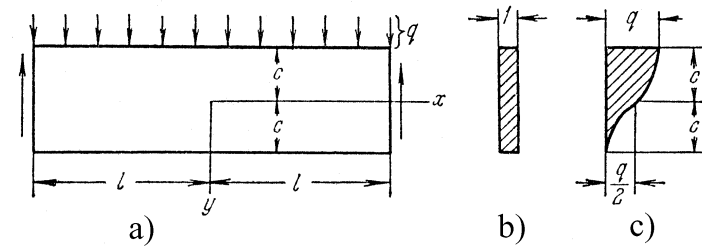
Joonis 4.5: Rajatingimused otsas $x = l$.

Seega saame võrrandi (4.60) kasutamise puhul

$$\frac{Pc^2}{2GI}(l-x) = \frac{3P}{4Gc}(l-x) \quad (4.61)$$

võrra suuremad läbipainded kui võrrandi (4.58)₃ puhul. Põhjus on selles, et rajatingimused (4.55) keelavad tala telje pöörded kuid lubavad otspinna pöörded punktis A (vt. joonis 4.5 a). Rajatingimused (4.56) keelavad aga tala otspinna pöörded kuid lubavad telje pöörded (vt. joonis 4.5 b). Mõlemal juhul toimuvad pöörded ühe ja sama nurga $3P/4cG$ võrra kuigi pöörduvad erinevad elemendid.

Tegelikult jääb aga kogu otspind $x = l$ paigale ja õiget tulemust ei anna ei juht a) ega b) ning kinnituskoha läheduses ei vasta ka pingeaotus valemitega (4.44) antule. Avaldise (4.44) puhul tuleb rakendada Saint-Venant'i printsiipi, st., et (4.44) annaks tõepärasema tulemuse, peame olema otsast $x = l$ piisavalt kaugel. Seega pikkade konsoolide puhul on tulemus «täpsem», st. vastab enam tegelikku- sele, kui lühikeste puhul.

Joonis 4.6: Ühtlaselt koormatud kitsa ristkülikulise ristlõikega tala (tala pikkus $2l$, kõrgus $2c$, paksus 1).

4.5 Ühtlaselt koormatud tala paine

Vaatleme kitsa ristkülikulise ristlõikega tala (joonis 4.6). Tala on otstes vabalt toetatud ja talle mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega q .

Rajatingimused: a) külgpindadel $y = \pm c$

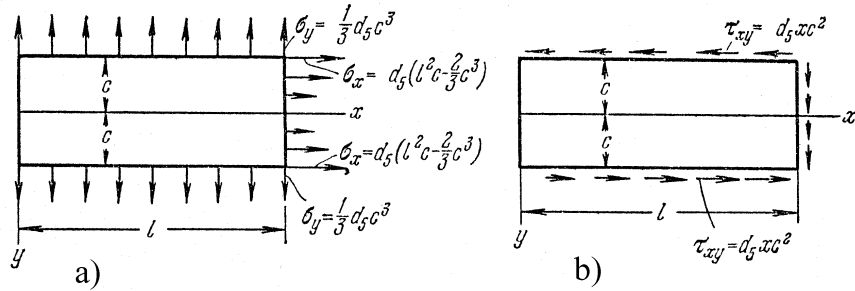
$$\tau_{xy}|_{y=\pm c} = 0, \quad \sigma_y|_{y=+c} = 0, \quad \sigma_y|_{y=-c} = -q; \quad (4.62)$$

b) otspindadel $x = \pm l$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-c}^c \tau_{xy}|_{x=\pm l} dy = \mp ql, \quad \text{põikjõud tala otstes,} \\ \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=\pm l} dy = 0, \quad \text{pikijõud tala otstes,} \\ \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=\pm l} y dy = 0, \quad \text{paindemoment tala otstes.} \end{array} \right. \quad (4.63)$$

Rajatingimusi (4.62) ja (4.63) saab rahuldada kui kombineerida alajaotuses 4.2 leitud lahendeid.

Lähtume lahendist (4.36) (lk. 136), millele vastavad rajatingimused on kujutatud joonisel 4.7 Et vabaneda tõmbepingetest küljel $y = c$ ja nihkepingetest külgedel $y = \pm c$ lisame kehale tõmbe σ_y lahendist



Joonis 4.7: Viiendat järku polünoomile vastavad rajatingimused $d_5 \neq 0$ ja $a_5 = b_5 = c_5 = e_5 = f_5 = 0$ puhul.

(4.23) ja pinged $\sigma_y = b_3 y$ ning $\tau_{xy} = -b_3 x$ lahendist (4.25). Kokku saame seega

$$\begin{cases} \sigma_x = d_5(x^2 y - \frac{2}{3}y^3), \\ \sigma_y = \frac{1}{3}d_5 y^3 + b_3 y + a_2, \\ \tau_{xy} = -d_5 x y^2 - b_3 x. \end{cases} \quad (4.64)$$

Rajatingimustest (4.62) saame

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3q}{4c}, \quad d_5 = -\frac{3q}{4c^3}. \quad (4.65)$$

Arvestades, et $I = I_z = 2c^3/3$ saame valemistest (4.64) ja (4.65)

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{q}{2I}(x^2 y - \frac{2}{3}y^3), \\ \sigma_y = -\frac{q}{2I}(\frac{1}{3}y^3 - c^2 y + \frac{2}{3}c^3), \\ \tau_{xy} = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x. \end{cases} \quad (4.66)$$

Leitud pingekomponendid rahuldavad lisaks rajatingimustele (4.62) ka (4.63)₁₋₂. Et oleks rahuldatud ka (4.63)₃ lisame puhtale paindele vastavad pinged $\sigma_x = d_3 y$ ja $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ lahendist (4.25).

Rajatingimusest (4.63)₃ leiame

$$d_3 = \frac{3q}{4c} \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right). \quad (4.67)$$

Seega kokku avaldub normaalpinge kujul

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} (l^2 - x^2) y + \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2 y \right). \quad (4.68)$$

Avaldise (4.68) esimene liige vastab elementaarsele paindeteooriale ning teist saab vaadelda kui parandusliiget ja ta on väike võrreldes esimesega. «Parandusliige» on põhjustatud sellest, et elementaar-teooria puhul eeldatakse, et $\sigma_y \equiv 0$, kuid (4.66) põhjal pole see nii (vt. joon. 4.6). Avaldisega (4.68) esitatud pinged annavad otspindadel nulliga võrduva peavektori ja peamomendi. Lahend on täpne vaid juhul kui otspindadel $x = \pm l$ mõjuks pindjõud

$$t_x = \pm \frac{3q}{4c^3} \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2 y \right). \quad (4.69)$$

Saint-Venant'i printsiibi põhjal loetakse lahend täpseks punktides, mis on otstest $x = \pm l$ kaugemal kui tala kõrgus, st. $2c$, ka $t_x = 0$ puhul.

Tala punktide siirded u ja v leitakse analoogselt alajaotusele 4.4. Nüüd eeldatakse, et punktis $x = y = 0$ on horisontaalsed siirded võrdsed nulliga ja vertikaalsed siirded võrdsed läbipaindega δ .

Kokku saame, et

$$\begin{cases} u = \frac{q}{2EI} \left[\left(l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \right. \\ \quad \left. + \nu x \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right], \\ v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + \right. \\ \quad \left. + \nu \left[(l^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\} - \\ \quad - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right] + \delta. \end{cases} \quad (4.70)$$

Kuna (4.70)₁ põhjal siirded tala keskjoonel

$$u|_{y=0} = \frac{\nu qx}{2E}, \quad (4.71)$$

siis ei osutu keskjoon neutraalseks jooneks. Tala keskjoone läbipaine

$$v|_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right]. \quad (4.72)$$

Kuna tala otsad on vabalt toetatud, siis $v|_{x=\pm l} = 0$ ja

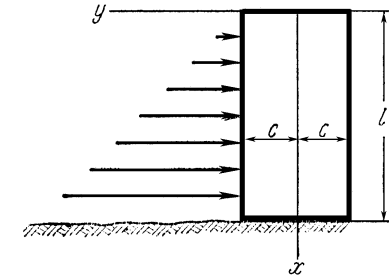
$$\delta = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (4.73)$$

Avaldises (4.73) nurksulgude ees olev kordaja esitab elementaar-teooriale vastavat läbipainet (eeldades, et tala ristlõiked jäävad deformatsioonil tasapinnalisteks). Teine liige nurksulgudes esitab parandust, st. arvestab põikjõu mõju läbipaindele. Diferentseerides (4.72) kaks korda saame keskjoone kõverust iseloomustava avaldise

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (4.74)$$

Ka selles avaldises vastab esimene liige elementaar-teooria valemile ning on proportsionaalne paindemomendiga $q(l^2 - x^2)/2$.

4.6 Hüdrostaatilisel koormatud vertikaalne konsool



Joonis 4.8: Vertikaalsele konsoolile mõjuv hüdrostaatiline surve.

Kui üldistada alajaotuses 4.2 esitatud lahendusmeetodikat ja vaadelda 6. järku polünoomi, siis saame laida pingeaotuse hüdrostaatilisel koormatud vertikaalse konsooli jaoks:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{qx^3 y}{4c^3} + \frac{q^3}{4c^3} \left(-2xy^3 + \frac{6}{5} c^2 xy \right), \\ \sigma_y = -\frac{qx}{2} + qx \left(\frac{y^3}{4c^3} - \frac{3y}{4c} \right), \\ \tau_{xy} = \frac{3qx^2}{8c^3} (c^2 - y^2) - \frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2). \end{cases} \quad (4.75)$$

Siin tähistab q vedeliku erikaalu (N/m^3) ja seega on koormuse intensiivsus sügavusel x võrdne qx , põikjõud $qx^2/2$ ja paindemoment $qx^3/6$. Avaldiste (4.75) esimesed liikmed vastavad jällegi elementaar-teooriale.

Konsooli vabal otsal $x = 0$ on leitud lahendi põhjal normaalpinged nullid, kuid nihkepinged

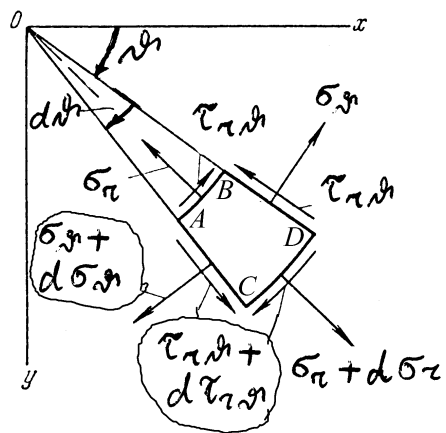
$$\tau_{xy} = \frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2). \quad (4.76)$$

Nihkepingete peavektor on aga null. See võimaldab lugeda väliskoormuse kohal $x = 0$ nulliks.

Kui tahetakse arvesse võtta ka konsooli materjali omakaal, siis tuleb σ_x avaldisse lisada liige $-q_1 x$, kus q_1 on konsooli materjali erikaal.

4.7 Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides

4.7.1 Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon



Joonis 4.9: Väikese elemendi $ABCD$ tasakaal.

DRK-s esitatud tasakaaluvõrrandite analoog saadakse kui vaadeldakse elemendi $ABCD$ tasakaalu ja projekteeritakse tema külgedel mõjuvad summaarsed jõud ja mahujõud ϑ ja r sihile. Minnes üle

piirile $d\vartheta \rightarrow 0$ ja $dr \rightarrow 0$ saame

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + f_r = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{r} + f_\vartheta = 0. \end{cases} \quad (4.77)$$

Siin tähistavad f_r ja f_ϑ mahujõudude projektsioone radiaal ja tangentsiaal suunale (r ja ϑ kasvamise suunale).

Ka siin saab mahujõudude puudumisel sisse tuua Airy' pingefunktsiooni $\varphi = \varphi(\vartheta, r)$, nii et

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}, & \sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\vartheta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right). \end{cases} \quad (4.78)$$

Nüüd Laplace'i operaator

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \quad (4.79)$$

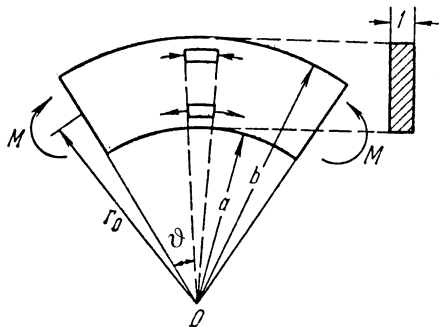
ja biharmooniline võrrand

$$\nabla^4 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (4.80)$$

Kui pingekomponendid ja seega ka φ sõltuvad vaid koordinaadist r , siis saab võrrandi (4.80) üldlahendi esitada kujul

$$\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D. \quad (4.81)$$

4.7.2 Kõvera tala paine



Joonis 4.10: Kõvera tala paine.

Näitena vaatleme kõvera tala puhast painet, st. vaatleme tala, mis paindub kõverustasapinnas otstesse rakendatud momentide M mõjul. Sel juhul jääb paindemoment konstantseks kogu varda pikuse ulatuses, järelikult sõltub pinge vaid radiaalkoordinaadist r . Seega saab kasutada lahendit (4.81).

Rajatingimused:

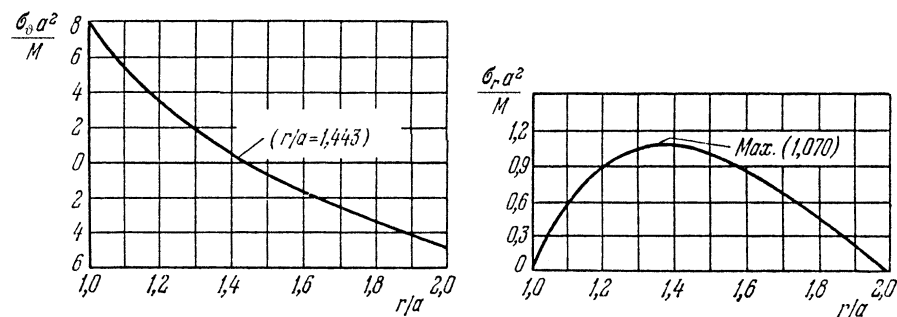
$$\begin{cases} \sigma_r = 0, & r = a, r = b, \\ \int_a^b \sigma_\vartheta dr = 0, & \int_a^b \sigma_\vartheta r dr = -M \\ \tau_{r\vartheta} = 0, & \text{kõigil rajapindadel.} \end{cases} \quad (4.82)$$

Pärast rajatingimuste (4.82) rahuldamist ja tähistuse

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \ln^2 \frac{b}{a} \quad (4.83)$$

sissetoomist saame

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right), \\ \sigma_\vartheta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right), \\ \tau_{r\vartheta} = 0. \end{cases} \quad (4.84)$$



Joonis 4.11: Pingete jaotus kõvera tala paindel.

Lahend on täpne vaid siis kui pingejaotus otspindadel vastab avaldisele (4.84)₂. Muil juhtudel tuleb rakendada Saint-Venanti printsiipi. Joonisel 4.11 on esitatud suurused $\sigma_\vartheta a^2/M$ ja $\sigma_r a^2/M$ sõltuvana suhtest r/a juhul kui $b/a = 2$. Järeldused: 1) $\sigma_r > 0$ iga r puhul vaadeldavas piirkonnas; 2) neutraalne telg vastab $r/a = 1,443$ ja $\max \sigma_\vartheta > |\min \sigma_\vartheta|$; 3) σ_r maksimum ei asu neutraalsel teljel.

4.7.3 Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \\ \gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{cases} \quad (4.85)$$

Siin mõistetakse suurusi u ja v kui radiaalset ja tangentsiaalset siirdekompontenti. Hooke'i seaduse kuju jääb endiseks:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta), \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E}(\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r), \quad \gamma_{r\vartheta} = \frac{\tau_{r\vartheta}}{G}. \quad (4.86)$$

Siirete määramine toimub analoogiliselt DRK-ga.

4.7.4 Pöörlev ketas

Teiseks näiteks polaarkoordinaatide puhul on pöörleva ketta ülesanne. Vaatleme pöörlevat ketast, mis pöörleb jääva nurkkiirusega ω . Ketta paksuse loeme raadiusega võrreldes väikeseks. Ainsaks mahujõuks (mida arvesse võtame) on inertsjõud, st. $f_r = \rho\omega^2 r$ ja $f_\vartheta = 0$. Antud juhul on tegu nn. polaarsümmeetrilise ülesandega, kus σ_r ja σ_ϑ sõltuvad vaid koordinaadist r ja seega valemi (4.78) põhjal $\tau_{r\vartheta} = 0$. Teine tasakaaluvõrrandeist (4.77) on antud juhul automaatselt rahuldatud ja esimesele saab anda kuju

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\vartheta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \quad (4.87)$$

Kuna ka ε_r ja ε_ϑ on vaid r funktsioonid, siis (4.85) põhjal

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r}. \quad (4.88)$$

Hooke'i seadusest (4.86)

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r - \nu\varepsilon_\vartheta), \quad \sigma_\vartheta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\vartheta - \nu\varepsilon_r). \quad (4.89)$$

Asendades nüüd deformatsioonikomponendid (4.88) Hooke'i seadusse (4.89) ning viimase omakorda tasakaaluvõrrandisse (4.87) saame diferentsiaalvõrrandi siirdekomponeendi u määramiseks:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho\omega^2 r^3. \quad (4.90)$$

Selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend avaldub kujul

$$u = \frac{1}{E} \left[(1-\nu)Cr - (1+\nu)C_1 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8} \rho\omega^2 r^3 \right]. \quad (4.91)$$

Vastavad pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 r^2, \\ \sigma_\vartheta = C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2. \end{cases} \quad (4.92)$$

Konstandid C ja C_1 määratakse rajatingimustest.

Täisketta (ilma auguta keskel) puhul vastab $r = 0$ siire $u = 0$, seega $C_1 = 0$. Ketta serval $r = b$ jõudude puudumisel $\sigma_r = 0$, seega

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 b^2. \quad (4.93)$$

Seega pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 (b^2 - r^2) \\ \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2 \end{cases} \quad (4.94)$$

Plaadi keskel on neil pingetel maksimaalne väärtus

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 b^2. \quad (4.95)$$

Kui ketta keskel on ava raadiusega a , siis konstandid C ja C_1 määratakse rajatingimustest $\sigma_r|_{r=a} = \sigma_r|_{r=b} = 0$ —

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 (a^2 + b^2), \quad C_1 = -\frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 a^2 b^2. \quad (4.96)$$

Pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right), \\ \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right). \end{cases} \quad (4.97)$$

Radiaalpinge on nüüd maksimaalne kohal $r = \sqrt{ab}$ ja tangentsiaalpinge sisemisel serval

$$\begin{cases} \max \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 (b-a)^2, \\ \max \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{4} \rho\omega^2 \left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} a^2 \right). \end{cases} \quad (4.98)$$

Kui $a \rightarrow 0$, siis $\max \sigma_y$ läheneb väärtusele, mis on kaks korda suurem kui avaldisega (4.95) esitaud väärtus. Seega kui teha täisketta tsentrisse väike ava, siis suureneb tangentsiaalpinge plaadi tsentris kaks korda.

4.8 Ruumilised ülesanded

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z = 0 \end{cases} \quad (4.99)$$

Rajatingimused

$$\begin{cases} t_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ t_y = \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l, \\ t_z = \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m. \end{cases} \quad (4.100)$$

4.8.1 Varda tõmme omakaalu mõjul

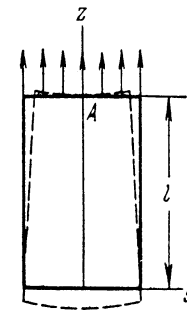
Vaatleme punktis A jäigalt kinnitatud ristkülikulise ristlõikega varrast. Mahujõud

$$f_x = f_y = 0, \quad f_z = -\rho g, \quad (4.101)$$

kus ρg on varda erikaal. Tasakaaluvõrrandid on rahuldatud kui pingeaotus esitada kujul

$$\sigma_z = \rho g z, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0, \quad (4.102)$$

st. varda igas ristlõikes on nullist erinev vaid temast allpool asuva osa kaalust põhjustatud normaalpinge.



Joonis 4.12: Varda deformatsioon omakaalu mõjul.

Rajatingimused: Nullist erinevad pinged vaid varda ülemisel välispinnal — seal $\sigma_z = \rho g l$.

Kuna sobivustingimused pingetes (vt. näiteks Beltrami-Michelli võrrandid (3.44)) sisaldavad vaid teist järku osatuletisi pingekomponentidest, siis on nad antud juhul automaatselt rahuldatud.

Siirded ja deformatsioonid määrame Hooke'i seaduse abil

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\rho g z}{E}, \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (4.103)$$

Siirdekomponeendid u, v ja w leitakse avaldistest (4.103) integreerimise teel. Integreerimiskonstandid määratakse rajatingimustest punktis A . Jäiga kinnituse tõttu on seal keelatud nii siirded kui pöörded, st., punktis $x = y = 0, z = l$ on $u = v = w = 0$ ja $\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = \partial w / \partial x = 0$. Tulemus on järgmine:

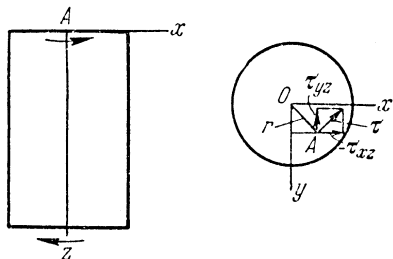
$$\begin{cases} u = -\frac{\nu \rho g x z}{E}, \quad v = -\frac{\nu \rho g y z}{E}, \\ w = \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E} \end{cases} \quad (4.104)$$

On selge, et z -telje punktid omavad vaid vertikaalseid siirdeid:

$$w|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -\frac{\rho g}{2E}(l^2 - z^2). \quad (4.105)$$

Teised punktid, st. kus $x \neq 0$ või $y \neq 0$, omavad ka horisontaa-seid siirdeid. Seega sirged, mis olid enne deformatsiooni paralleel-sed z -teljega on peale deformatsiooni z suhtes kaldu. Tala lõiked, mis olid enne deformatsiooni risti z -teljega, moodustavad pärast deformatsiooni paraboolse pinna. Näiteks punktid, mis olid enne deformatsiooni tasandil $z = c$ asuvad peale deformatsiooni pinnal $z = c + w|_{z=c}$. See pind on risti kõigi nende varda kiududega, mis enne deformatsiooni olid vertikaalsed.

4.8.2 Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne



Joonis 4.13: Ümarvarda vääne.

Vastavalt elementaarteoriale, avaldub nihkepinge varda väändel kujul

$$\tau = G\vartheta r, \quad (4.106)$$

kus G on nihkeelastsusmoodul, r — polaarraadius ja ϑ — väändenurk varda pikkusühiku kohta. Pingevektor $\boldsymbol{\tau}$ on seejuures risti varda raadiusega r .

Lahutame nüüd pingevektori $\boldsymbol{\tau}$ x - ja y -telje sihiliseks komponen-diks:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\vartheta r \frac{x}{r} = G\vartheta x, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -G\vartheta r \frac{y}{r} = -G\vartheta y. \quad (4.107)$$

Ülejäänud pinged eeldatakse võrduvat nulliga, st.,

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \quad (4.108)$$

Kuna pingekomponendid on kas nullid või linearfunktsioonid koor-dinaatidest x ja y , siis on sobivustingimused automaatselt rahulda-tud. Järgnevalt vaatleme kuidas on rahuldatud tasakaaluvõrrandid (4.99) ja rajatingimused (4.100). Tasakaaluvõrrandid on rahulda-tud kui hüljata massjõudude mõju. Silindri külgpind on pingevaba, seega, arvestades avaldist (4.108) ning et ümarvarda pinnal

$$l = \cos(\mathbf{N}, x) = \frac{x}{r}, \quad m = \cos(\mathbf{N}, y) = \frac{y}{r}, \quad n = \cos(\mathbf{N}, z) = 0, \quad (4.109)$$

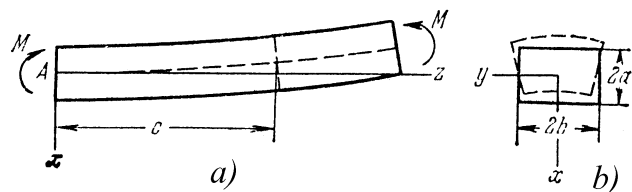
saame rajatingimustest (4.100).

$$0 = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m. \quad (4.110)$$

Seega rahuldab elementaarteooria lahend (4.107)–(4.108) rajatin-gimusi (4.110). Samuti on selge, et mitteümarvarda puhul elemen-taarteooria lahend ei sobi, sest (4.109) ei kehti varda külgpinnal. Varda otspindade lähedal tuleb rakendada Saint-Venant'i printsii-pi. Siirete leidmine tomub analoogselt alajaotuses 4.8.1 käsitletud juhuga, st., $u = v = w = 0$ ja $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial w/\partial x = 0$ punktis A . Sellistel rajatingimustel saame

$$u = -\vartheta yz, \quad v = \vartheta xz, \quad w = 0. \quad (4.111)$$

Seega osutub ümarvarda puhul elementaarteooria eeldus, et ristlõiked jäävad tasapinnaliseks ja raadiused sirgeteks, õigeks.



Joonis 4.14: Prismaatilise varda paine.

4.8.3 Prismaatiliste varraste puhas paine

Vaatleme prismaatilist varrast, mis paindub peatasandis xz varda otstesse rakendatud vastassuunaliste ja suuruselt võrdsete momentide toimel. Koordinaatide alguse paneme varda vasakusse otsa ja ristlõike pinnakeskmesse. Elementaarteooria põhjal

$$\sigma_z = \frac{Ex}{R}, \quad \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (4.112)$$

kus R on painutatud varda kõverusraadius. Lahend (4.112) rahuldab massjõudude puudumisel tasakaaluvõrrandeid (4.99) ja rajatingimusi (4.100) varda külgpinnal. Otspindadel on lahend täpne kui väliskoormus jaotub vastavalt avaldisele (4.112). Paindemoment määratakse valemiga

$$M = \int_A \sigma_z x dA = \int_A \frac{Ex^2 dA}{R} = \frac{EI_y}{R}. \quad (4.113)$$

Viimasest avaldisest saame leida varda telje kõveruse

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_y}. \quad (4.114)$$

Siirete leidmiseks kasutame samu rajatingimusi, mis alajaotuses 4.8.1, st., punktis A on keelatud nii siirded kui pöörded. Hooke'i seaduse (4.2) ja deformatsioonikomponentide definitsioonide (4.1)

põhjal (antud juhul on tala teljeks z -telg!)

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{R}, \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu x}{R}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu x}{R}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (4.115)$$

Kui lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem (4.115) rajatingimustel $u = v = w = 0$ ja $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial w/\partial x = 0$ punktis $x = y = z = 0$, siis saame

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2R}[z^2 + \nu(x^2 - y^2)], \\ v = -\frac{\nu xy}{R}, \quad w = \frac{xz}{R}. \end{cases} \quad (4.116)$$

Varda kõverdunud telje võrrandi saame võttes viimases avaldises $x = y = 0$ —

$$u = -\frac{z^2}{2R} = -\frac{Mz^2}{2EI_y}, \quad v = w = 0. \quad (4.117)$$

See avaldis langeb kokku elementaarteooria läbipainde avaldisega.

Vaatleme nüüd varda suvalist ristlõiget $z = c$ (enne deformatsiooni). Peale deformatsiooni asuvad selle ristlõike punktid tasandil

$$z = c + w = c + \frac{cx}{R}, \quad (4.118)$$

st. puhtal paindel jäävad ristlõiked tasapinnalisteks. Et uurida ristlõike deformatsioone tema tasandis, vaatleme külgi $y = \pm b$ (vt. joonis 4.14 b)). Pärast deformatsiooni

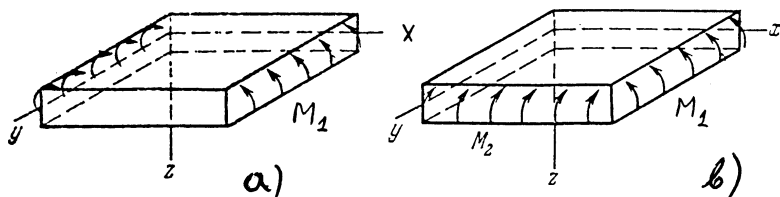
$$y = \pm b + v = \pm b \left(1 - \frac{\nu x}{R}\right), \quad (4.119)$$

st., peale deformatsiooni on küljed $y = \pm b$ kaldu. Kaks ülejäänud külge $x = \pm a$ omavad peale deformatsiooni kuju

$$x = \pm a + u = \pm a - \frac{1}{2R}[c^2 + \nu(a^2 - y^2)], \quad (4.120)$$

st. nende kujuks peale deformatsiooni on parabool. Seega on tala pealmine ja alumine pind pikisuunas nõgus ja ristsuunas kumer, st. moodustab sadulpinna.

4.8.4 Paadi puhas paine



Joonis 4.15: Ristkülikulise plaadi paine.

Eelmises alajaotuses saadud tulemusi saab rakendada konstantse paksusega plaatide paindeülesannete puhul. Kui pinged $\sigma_x = Ez/R$ on rakendatud piki y -teljega paralleelseid plaadi külgi (vt. joonis 4.15 a)), siis omab plaadi pind peale deformatsiooni sadulpinna kuju, kusjuures tema kõverus xz tasapinnas on $1/R$ ning ristuv suunas ν/R . Siinjuures eeldatakse, et läbipainded on võrreldes plaadi paksusega väikesed. Tähistame plaadi paksuse h , paindemomendi plaadi y -telje sihilise serva pikkusühiku kohta M_1 ja inertsimomendi pikkuühiku kohta $I_y = h^3/12$. Nüüd valemi (4.114) põhjal

$$\frac{1}{R} = \frac{M_1}{EI_y} = \frac{12M_1}{Eh^3}. \quad (4.121)$$

Kui paindemomendid M_1 ja M_2 mõjuvad kahes ristuv suunas, siis saadakse elastse plaadi pinna kõverus paindemomentidest M_1 ja M_2 põhjustatud kõveruste superpositsioonina.

Tähistame $1/R_1$ ja $1/R_2$ plaadi kõverused xz ja yz tasandites. Momendid M_1 ja M_2 on endiselt mõõdetud serva pikkusühiku kohta. Kasutades nüüd avaldist (4.121) ja superpositsiooniprintsiipi saame

$$\frac{1}{R_1} = \frac{12}{Eh^3}(M_1 - \nu M_2), \quad \frac{1}{R_2} = \frac{12}{Eh^3}(M_2 - \nu M_1). \quad (4.122)$$

M_1 ja M_2 loetakse positiivseteks kui nad põhjustavad positiivsete kiudude tõmmet. (4.122) põhjal

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right), \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1} \right). \quad (4.123)$$

Väikeste läbipainete puhul võib kasutada aproksimatsiooni

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4.124)$$

Tähistades

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.125)$$

ja arvestades (4.124) saame avaldistele (4.123) kuju

$$M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (4.126)$$

Konstanti D nimetatakse plaadi paindejäikuseks.

Juhul kui plaat paindub silindriliselt (moodustaja on paralleelne y -teljega), siis $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ ja (4.126) saab kuju

$$M_1 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_2 = -D\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.127)$$

Kui $M_1 = M_2 = M$, siis ka $1/R_1 = 1/R_2 = 1/R$ ja plaat paindub sfääriliseks pinnaks, nii et (4.123) saab kuju

$$M = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu)} \frac{1}{R} = \frac{D(1 + \nu)}{R}. \quad (4.128)$$

4.9 Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades

4.9.1 Üldvõrrandid

Mõningaid selliseid ülesandeid oleme juba eespool vaadelnud. Käesolevas alajaotuses leiavad käsitlemist ülesanded, kus ei esine vääned. Silindriliste koordinaatide (r, ϑ, z) puhul tähendab see seda, et vastavatest siirdekompontentidest $v = 0$ ja komponendid u ja w ei sõltu koordinaadist ϑ . Seega ka pingekomponendid ei sõltu koordinaadist ϑ ja kaks neist $\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = 0$. Nullist erinevad deformatsioonikomponendid avalduvad kujul

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (4.129)$$

Tasakaaluvõrrandid saavad aga kuju

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\vartheta}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \end{cases} \quad (4.130)$$

Paljudel juhtudel on jällegi otstarbekas tuua sisse pingefunktsioon φ , siin nimetatakse teda aga Love'i pingefunktsiooniks. Tasakaaluvõrrandid on rahuldatud kui valida

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), & \sigma_{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], & \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{cases} \quad (4.131)$$

Siinjuures peab φ rahuldama biharmoonilist võrrandit

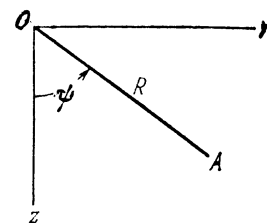
$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (4.132)$$

Antud juhul

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.133)$$

on Laplace'i operaator silindrilistes koordinaatides. Kuna antud juhul ei sõltu φ koordinaadist ϑ , siis langeb Laplace'i operaatoris (4.133) kolmas liige välja. Siirdekompontendid u ja w määratakse avaldistega

$$2Gu = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad v = 0, \quad 2Gw = 2(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (4.134)$$



Joonis 4.16: Sfäärilised koordinaadid.

Mõnel juhul on silindriliste koordinaatide asemel mõistlik kasutada sfäärilisi koordinaate, st., r ja z asemel kasutatakse koordinaate R ja ψ . Nüüd on vaja (4.133)-s asendada osatuletised r ja z järgi. See üleminek on omakorda analoogne DRK x ja y ja polaarkoordinaatide r ja ϑ vahelisele seosele. Saame

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}. \end{cases} \quad (4.135)$$

Seega omab biharmooniline võrrand (4.132) silindriliste koordinaatide puhul kuju

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \varphi = 0 \quad (4.136)$$

ja sfääriliste puhul

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \varphi = 0. \quad (4.137)$$

Võrrandi (4.137) lahend peab samal ajal rahuldama ka Laplace'i võrrandit, st,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0. \quad (4.138)$$

Viimase erilahendit võib otsida kujul

$$\varphi_n = R^n \Psi_n, \quad (4.139)$$

kus Ψ_n on vaid muutuja φ funktsioon. Kokku saame viimasest kahest hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} \right) + n(n+1)\Psi_n = 0. \quad (4.140)$$

Kui tähistame $x = \cos \psi$ ja valime x uueks sõltumatuks muutujaks, siis saame (4.140)-st Legendre'i võrrandi

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} - 2x \frac{d\Psi_n}{dx} + n(n+1)\Psi_n = 0. \quad (4.141)$$

Selle võrrandi lahendid on esitatavad Legendre'i polünoomide $P_n(x)$ kaudu:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x, & P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots, \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{cases} \quad (4.142)$$

Neid polünoome võib kasutada funktsioonidena Ψ_n avaldises (4.139) kusjuures igat neist võib veel korrutada konstandiga A_n . Kasutades valemeid

$$x = \cos \psi, \quad Rx = z \quad \text{ja} \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (4.143)$$

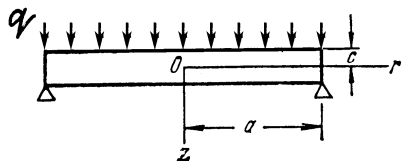
saab minna tagasi muutujatele r ja z . Seejuures saab võrrandi (4.137) lahend kujul

$$\begin{cases} \varphi_0 = A_0, & \varphi_1 = A_1 z, \\ \varphi_2 = A_2 \left[z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_3 = A_3 \left[z^3 - \frac{3}{5}z(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_4 = A_4 \left[z^4 - \frac{6}{7}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \varphi_5 = A_5 \left[z^5 - \frac{10}{9}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \dots \end{cases} \quad (4.144)$$

Toodud polünoomid on ka biharmoonilise võrrandi (4.132) lahendiks. Saab näidata, et kui $R^n \Psi_n$ osutub harmoonilise võrrandi (4.138) lahendiks, siis $R^{n+2} \Psi_n$ rahuldab biharmoonilist võrrandit (4.132) (kuid ei rahulda (4.138)) Korrutades (4.144) $R^2 = r^2 + z^2$, saame uued lahendid

$$\begin{cases} \varphi_2 = B_2(r^2 + z^2), \\ \varphi_3 = B_3 z(r^2 + z^2), \\ \varphi_4 = B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2), \\ \varphi_5 = B_5(2z^3 - 3r^2 z)(r^2 + z^2), \\ \dots \end{cases} \quad (4.145)$$

4.9.2 Ümarplaadi paine



Joonis 4.17: Sümmeetriliselt jaotatud põikkoormusega koormatud ja servadest vabalt toetatud ümarplaat.

Vaatleme sümmeetriliselt koormatud ümarplaati (joonis 4.17). Valides avaldistest (4.144) ja (4.145) kolmandat järku polünoomid, saame pingefunktsiooni esitada kujul

$$\varphi = a_3(2z^3 - 3r^2z) + b_3(r^2z + z^3). \quad (4.146)$$

Avaldiste (4.131) põhjal saame seejärel pingekomponendid kujul

$$\begin{cases} \sigma_r = -6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \\ \sigma_\vartheta = -6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \\ \sigma_z = -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3, \\ \tau_{rz} = 0. \end{cases} \quad (4.147)$$

Seega osutuvad pingekomponendid kogu plaadi ulatuses konstantseteks. Valemites (4.147) olevate konstantide a_3 ja b_3 määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi σ_r ja σ_z jaoks. Kokkuvõttes: kolmandat järku polünoomide abil saab esitada lahendi, mis vastab olukorrale, kus plaadi pinnale on rakendatud telgsümmeetrilised konstantsed koormused.

Valides (4.144) ja (4.145) neljandat järku polünoomid, saame pingekomponentide jaoks avaldised

$$\begin{cases} \sigma_r = 96a_4z + 4b_4(14\nu - 1)z, \\ \sigma_z = -192a_4z + 4b_4(16 - 14\nu)z, \\ \tau_{rz} = 96a_4r - 2b_4(16 - 14\nu)r. \end{cases} \quad (4.148)$$

Kui võtta $96a_4 - 2b_4(16 - 14\nu) = 0$, saame

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{ja} \quad \sigma_r = 28(1 + \nu)b_4z, \quad (4.149)$$

mis esitab plaadi puhast painet juhul kui ta servadesse on rakendatud ühtlaselt jaotatud momendid.

Ühtlaselt jaotatud koormusele allutatud plaadi lahendi saamiseks lähtutakse kuugendat järku polünoomidest. Vastavatele pingetele (mida siin ei esita, kuid mis sisaldavad konstante a_6 ja b_6) lisatakse lahend (4.148) juhul $b_4 = 0$ ja z -telje sihiline ühtlane tõmme $\sigma_z = b$ lahendist (4.147). Seega tuleb rajatingimustest

$$\begin{cases} \sigma_z = 0, & z = c; & \sigma_z = -q, & z = -c; \\ \tau_{rz} = 0, & z = \pm c; \end{cases} \quad (4.150)$$

määrata neli konstanti a_6, b_6, a_4 ja b . Kokku saame

$$\begin{cases} \sigma_r = q \left[\frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2z}{c^3} - \frac{3z}{8c} \right], \\ \sigma_z = q \left[-\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3z}{4c} - \frac{1}{2} \right], \\ \tau_{rz} = -\frac{3qr}{8c^3}(c^2 - z^2). \end{cases} \quad (4.151)$$

Valemite (4.151) puhul on huvitav see, et esitatav pingajaotus on analoogne pingete σ_y ja τ_{xy} jaotusega kitsa ristkülikulise tala puhul (võrdle valem (4.66) lk. 144). Tala valemite puhul tuleb arvestada, et sisse on toodud inertsimoment $I = 2c^3/3$. Radiaalsed pinged on esitatud paaritu funktsioonina koordinaadist z ja annavad servas ühtlaselt jaotatud paindemomendi. Et saada lahendit servast vabalt toetatud plaadi jaoks, lisame pingevaldistele (4.151) lahendi (4.149) ja määrame konstandi b_4 rajatingimusest

$$\int_{-c}^c \sigma_r z dz = 0, \quad r = a. \quad (4.152)$$

Seega saab vaba toetuse puhul radiaalse normaalpinge σ_r avaldis kuhu

$$\sigma_r = q \left[\frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(3 + \nu) r^2 z}{32 c^3} - \frac{3(2 + \nu) z}{8 \cdot 5 c} + \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32 c^3} \right]. \quad (4.153)$$

Kui võtta $r = 0$, saame pinget σ_r , mis mõjub plaadi tsentris. Elementaarteooria puhul esitab pinget plaadi tsentris valem

$$\sigma_r = \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32 c^3}, \quad (4.154)$$

s.o. (4.153) viimane liige. Kui plaadi paksus $2c$ on väike võrreldes raadiusega a , siis osutuvad ka «parandusliikmed» väikesteks.

Puhta painde lisamisega ja rajatingimuse (4.152) rakendamisega kõrvaldasime me küll paindemomendid vabas servas $r = a$, kuid ei vabanenud pingetest

$$\sigma_r|_{r=a} = q \left[\frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(2 + \nu) z}{8 \cdot 5 c} \right]. \quad (4.155)$$

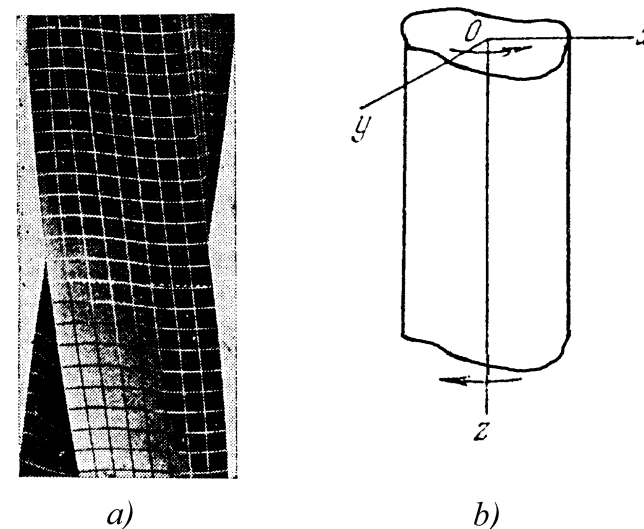
Nende pingete peavektor ja peamoment plaadi servas on nullid, seega tuleb lahendi täpsuse ja «kehtivuse» hindamisel rakendada Saint-Venant'i printsiipi.

Kui kasutada kuuendast kõrgemat järku polünoome, saab leida lahendeid juhtude jaoks, kus $q = q(r)$. Teist liiki Legendre'i polünoome ($Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, \dots$) kasutades saab leida lahendeid rõngasplaadi jaoks. Kõik need lahendid kehtivad juhul kui läbipainded on väikesed võrreldes paksusega $2c$. Suurte läbipainete puhul tuleb arvestada plaadi kesktasandi pikenemisega.

4.10 Vääne

4.10.1 Sirgete varraste vääne

Ümarvarraste väändeülesande lahendamise tehtud hüpotees, et varda ristlõiked jäävad deformatsioonil tasapinnalisteks ei kehti mitteümarvarraste puhul. Seda näitavad ilmekalt eksperimentide tulemused (vt. joonis 4.18 a). Enim kõverduvad algsed sirged külgede



Joonis 4.18: Sirge varda vääne.

keskosas. Korrektsel lahenduse vaadeldavale ülesandele andis Saint-Venant (1855).

Vaatleme ühtlast varrast, mille otstes on rakendatud momendid, kusjuures ristlõike kuhu on meelevaldne (joonis 4.18 b). Saint-Venant lähtus eeldusest, et varda deformatsioon koosneb kahest osast: 1) ristlõike pöörded analoogselt ümarvardaga ja 2) ristlõike tasandite kõverdumine (deplanatsioon), mis on kõigi ristlõigete jaoks sama. Koordinaatide alguseks valime varda otspinna keskme. Sel juhul on

ristlõigete pööretele vastavad siirded

$$u = -\vartheta zy \quad \text{ja} \quad v = \vartheta zx. \quad (4.156)$$

Ristlõigete kõverdumist kirjeldatakse funktsiooniga ψ —

$$w = \vartheta\psi(x, y). \quad (4.157)$$

Seega deformatsioonikomponendid

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \vartheta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \vartheta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{cases} \quad (4.158)$$

ning vastavad pingekomponendid

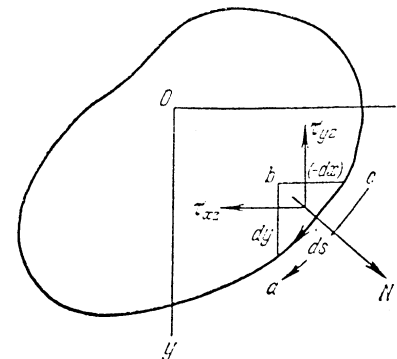
$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = G\vartheta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{yz} = G\vartheta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{cases} \quad (4.159)$$

Seega on meil igas varda punktis puhas nihe, mis on määratud komponentidega τ_{xz} ja τ_{yz} . Pannes avaldised (4.159) tasakaaluvõrrandesse (4.99) saame funktsiooni ψ määramiseks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.160)$$

Vaatleme nüüd rajatingimusi (4.100). Külgpinnal on $t_x = t_y = t_z = 0$ ja $n = \cos(Nz) = 0$, seega $(4.100)_{1,2}$ on samaselt nullid, aga $(4.100)_3$ annab

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0. \quad (4.161)$$



Joonis 4.19: Funktsiooni ψ määramine väänatud varda külgpinna lähedase lõpmata väikese elemendi abc abil

Viimane tingimus tähendab, et summaarne nihkepinge peab olema suunatud piki varda külgpinna puutujat.

Vaatleme varda külgpinna lähedast lõpmata väikest elementi abc (joonis 4.19). Eeldame, et s positiivne suund on $c \rightarrow a$. Suunakosinused

$$l = \cos(Nx) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(Ny) = -\frac{dx}{ds}. \quad (4.162)$$

Kasutades valemeid (4.162) ja (4.159) saame rajatingimusele (4.161) kuju

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \frac{\partial x}{\partial s} = 0. \quad (4.163)$$

Seega suvaline väändeülesanne taandub funktsiooni ψ määramisele diferentsiaalvõrrandist (4.160) rajatingimusel (4.163).

Rajatingimuste rahuldamiseks on ka teine võimalus, mis viib lihtsamale võrrandile. Kuna $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$, siis tasakaaluvõrrandest jääb järgi

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (4.164)$$

Kuna (4.159) põhjal τ_{xz} ja τ_{yz} ei sõltu koordinaadist z , siis esimesed kaks on samaselt rahuldatud, kolmas tähendab aga, et võime tuua sisse pingefunktsiooni $\varphi(x, y)$ —

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.165)$$

Asendades (4.165) pingekomponentide avaldisse (4.159), saame

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = G\vartheta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = G\vartheta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{cases} \quad (4.166)$$

Diferentseerime (4.166)₁ y järgi ja (4.166)₂ x järgi ning lahutame esimesest teise. Saame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F, \quad F = -2\vartheta G \quad (4.167)$$

pingefunktsiooni φ määramiseks. Avaldiste (4.162) ja (4.165) abil saame nüüd rajatingimustele (4.161) kuju

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (4.168)$$

st., pingefunktsion φ peab olema konstantne piki väliskontuuri. Täisvarraste puhul võib selle konstandi vabalt valida, näiteks võtta $\varphi = 0$. Seega tuleb pingete määramiseks leida φ , mis rajal oleks null. Järgmistes alajaotustes vaatleme konkreetse kujuga ristlõikeid.

Varda otstes on $l = m = 0$ ja $n = \pm 1$, st. rajatingimused (4.100) saavad kuju

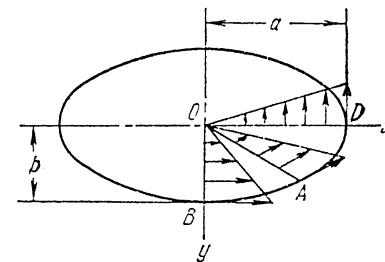
$$t_x = \pm \tau_{xz}, \quad t_y = \pm \tau_{yz}. \quad (4.169)$$

Seega on pingeaotus varda otstes identne pingeaotusega suvalises varda ristlõikes. Integreerimine üle kogu otspindade annab nullise peavektori ja väändemomendi (pöördemomendi)

$$M_t = 2 \iint \varphi dx dy. \quad (4.170)$$

Saadud lahend on täpne Saint-Venant'i printsiibi mõistes.

4.10.2 Elliptiline ristlõige



Joonis 4.20: Elliptilise ristlõikega varda vääne.

Vaatleme varrast mille ristlõige on esitatav võrrandiga (vt. joonis 4.20)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (4.171)$$

Kui valida nüüd pingefunktsioon kujul

$$\varphi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (4.172)$$

kus m on konstant, siis on diferentsiaalvõrrand (4.167) ja rajatingimused (4.168) rahuldatud tingimusel, et

$$m = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} F. \quad (4.173)$$

Seega kokku

$$\varphi = \frac{a^2 b^2 F}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (4.174)$$

Konstandi F määramiseks asendame (4.174) momendi avaldisse (4.170) —

$$F = -\frac{2M_t(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}. \quad (4.175)$$

Kahe viimase põhjal

$$\varphi = -\frac{M_t}{\pi ab^3} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (4.176)$$

ning pingekomponendid (4.165)

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_t y}{\pi ab^3}, \quad \tau_{yz} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b}. \quad (4.177)$$

Järelikult suhe

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} = -\frac{a^2 y}{b^2 x}, \quad (4.178)$$

st., pingekomponentide suhe on proportsionaalne suhtega y/x . Järelikult on see suhe konstantne piki igat punktist O väljuvat kiirt («ellipsi raadiust»), näiteks OA joonisel 4.20. Seega summarse nihkepinge suund (lõigu OA igas punktis) ühtib nihkepinge suunaga punktis A . Vertikaalse telje OB punktide puhul on nihkepinge $\tau_{yz} = 0$ ja summaarne pinge on võrdne nihkepingega τ_{xz} . Horisontaalküljel on olukord vastupidine. On selge, et $\max |\tau_{xz}| > \max |\tau_{yz}|$ ja et

$$\max |\tau_{xz}| = \tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2}. \quad (4.179)$$

Kui $a = b$, siis saame valemi ümarvada maksimaale nihkepinge määramiseks väändel.

Avaldiste (4.175) ja (4.167)₂ põhjal saame määrata väändenurga

$$\vartheta = M_t \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G}. \quad (4.180)$$

Valemis (4.180) esineva väändemomendi kordaja pöördväärtust

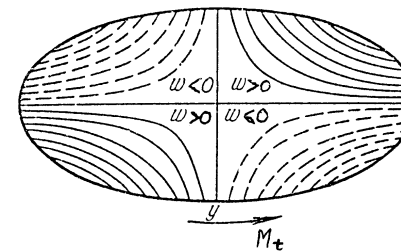
$$C = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2} = \frac{GA^4}{4\pi^2 I_\rho} \quad (4.181)$$

nimetatakse varda väändejäikuseks. Siin $A = \pi ab$ on ristlõike pindala ja $I_\rho = \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$ ristlõike polaarinerksimoment.

Siirdekompontide u ja v leidmiseks tuleb vaid asendada (4.180) avaldistesse (4.156). Kolmanda komponendi w leidmiseks tuleb pingekomponendid (4.177) ja väändenurk (4.180) asendada avaldistesse (4.159), integreerida, avaldada ψ ning (4.157) abil avaldada

$$w = M_t \frac{(b^2 - a^2)xy}{\pi a^3 b^3 G}. \quad (4.182)$$

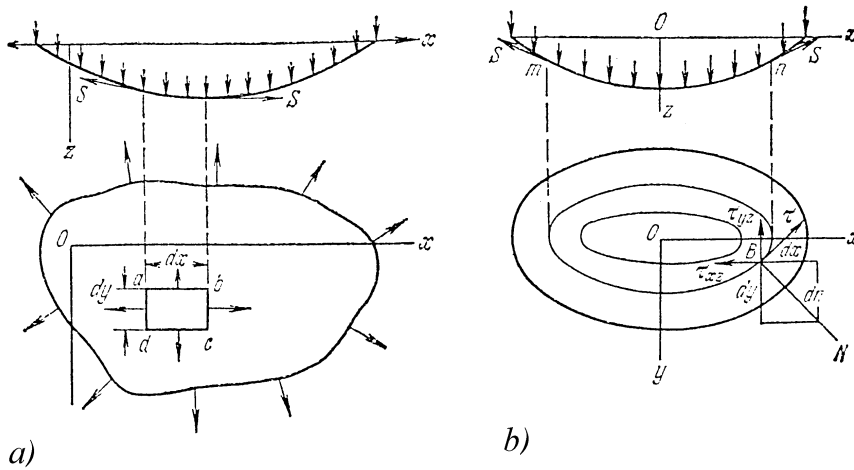
Seega on deformeerunud ristlõike samasiirdejooned $w = const.$ (w isojooned) hüperboolid, mille asümptootideks on ellpsi poolteljed (vt. joonis 4.21).



Joonis 4.21: Samasiirdejooned $w = const.$

4.10.3 Membraanalogia

Väändeülesannete lahendamise puhul on osutunud väga kasulikuks Prantli poolt (1903) sisse toodud membraanalogia. Vaatleme väänatava varda ristlõike kujulist servast toetatatud membraani. Membraani servale on rakendatud ühtlane tõmme ja pinnale ühtlaselt jaotatud rõhk (põikkoormus). Tähistame membraani ühikpinnale mõjuva rõhu q ja serva ühikpikkusele mõjuva tõmbejõu S . Vaatleme membraani väikest elementi $abcd$, täpsemalt öeldes,



Joonis 4.22: Põikkoormusega koormatud ühtlaselt tõmmatud membraan — a); deformeerunud membraani samaläbipainde jooned — b).

tema tasakaalu. Väikeste läbipainete korral on külgedel ad ja bc mõjuva summaarse tõmbejõu projektsioon z -teljel $S(\partial^2 z / \partial x^2) dx dy$ ja ülejäänud kahel küljel $S(\partial^2 z / \partial y^2) dx dy$. Tasakaaluvõrrand omab seega kuju

$$q dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy = 0$$

kust saame

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S}. \quad (4.183)$$

Võrreldes võrrandit (4.183) ja membraani läbipainde rajatingimusi (membraani läbipaine servas on null) võrrandiga (4.167) ja rajatingimustega (4.168) funktsiooni φ jaoks, jõuame järeldusele, et need kaks ülesannet on langevad kokku. Teisisõnu, selleks et leida diferentsiaalvõrrandi (4.183) abil funktsiooni φ , tuleb (4.183)-s asendada $-q/S$ suurusega $F = -2G\vartheta$ võrrandist (4.167).

Joonisel 4.22 b) on membraani deformeerunud pind kujutatud samaläbipaindejoonte (isojoonte) abil. Vaatleme suvalist punkti B . Kuna teda läbival isojoonel on läbipaine konstantne, siis

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 0, \quad (4.184)$$

kus s kujutab endast loomulikku koordinaati vaadeldaval isojoonel. Aanloogne võrrand pingefunktsiooni φ jaoks omab kuju

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) = \tau_{yz} \frac{dx}{ds} + \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0. \quad (4.185)$$

Viimane väljendab asjaolu, et summaarse nihkepinge projektsioon isojoone normalile on null. Järelikult mõjub summaarne nihkepinge vaadeldavas punktis isojoone puutuva sihis. Selliselt konstrueeritud isojooni (kõveraid) vaadeldaval ristlõikel nimetatakse seetõttu nihkepingete trajektooredeks (analogia punkti kiiruse ja trajektooriga).

Summaarne nihkepinge τ vaadeldavas punktis B saadakse kui projekteeritakse nihkepinged τ_{xz} ja τ_{yz} puutuva sihile —

$$\tau = \tau_{xz} m + \tau_{yz} l. \quad (4.186)$$

Arvestades, et

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad l = \cos(Nx) = \frac{dx}{dn} \quad \text{ja} \quad m = \cos(Ny) = \frac{dy}{dn} \quad (4.187)$$

saame avaldisele (4.186) kuju

$$\tau = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} \right) = - \frac{d\varphi}{dn}. \quad (4.188)$$

Seega on nihkepinge punktis B määratud membraani maksimaalse kaldega vaadeldavas punktis. Järelikult mõjuvad maksimaalsed nihkepinged punktides, kus isojooned paiknevad üksteisele kõige lähemal.

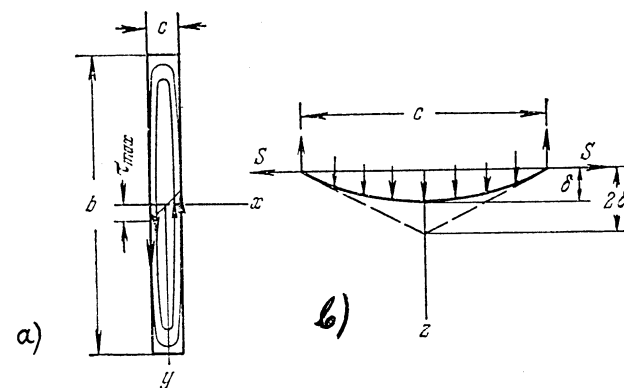
Väändemomendi avaldisest (4.170) saab järeldada, et kahekordne paindunud membraaniga piiratud ruumala on võrdne väändemomendiga (loomulikult eeldusel, et membraani puhul on tehtud asendus $2G\vartheta \rightarrow q/S$).

Eksperimentaalsete uuringute korral kasutatakse membraanina seebikilet. «Katsekehaks» on (tasapinnaline) plaat, kuhu on lõigatud uuritava ristlõike kujuline ava. Kui eesmärgiks on pingete otsene määramine eksperimendist, siis tehakse samasse plaati võrdluseks ka ringikujuline ava. Allutades nüüd mõlemat ava katvad membraanid võrdsele survele¹ saame vajalikud väärtused suhtele q/S , mis vastab suurusele $2G\vartheta$. Viimane on sama mõlema väänatava varda jaoks. Seega, tingimusel, et väändenurk varda pikkusühiku kohta ja nihkeelastsusmoodul G on mõlemal vardal võrdne, saame võrrelda pingeid uuritava ristlõikega vardas pingetega ümarvardas mõõtes kahe seebikile kalded. Tõsi küll, pingekontsentratsioonide lähedal võib seebikile meetod anda ebatäpseid tulemusi. Aljaotuses 4.10.6 refereeritav elektriline analoogia annab siin täpsemaid tulemusi.

¹Katsed näitavad, et mõlemas kiles tekkivad tõmbejõud võib sel juhul lugeda praktiliselt võrdseks.

4.10.4 Kitsa ristküliku kujulise ristlõikega varda vääne

Vaatleme varrast, mille ristlõike laius c on väike võrreldes kõrgusega h (joonis 4.23). Antud juhul saame lahendi kasutades membraananalooegiat järgmisel kujul: hülgame ristküliku lühikeste külgede mõju ja eeldame, et membraani pind on silindriline (läbipainded on seejuures väikesed).



Joonis 4.23: Varda ristlõige ja maksimaalsed nihkepinged — a) ja vastava membraanani läbipaine — b).

Sellisel juhul saab membraani läbipainded määrata niidi mehaanikast tuntud valemi

$$z = \frac{4\delta}{c^2} \left(\frac{c^2}{4} - x^2 \right), \quad (4.189)$$

abil (vt. joonis 4.23 b)). Viimases valemis esinev suurus

$$\delta = \frac{qc^2}{8S} \quad (4.190)$$

määrab läbipainde maksimaalse väärtuse (st. läbipainde kohal $x = 0$). Valem (4.189) on tuntud kui painduva niidi (paraboolsete)

läbipainete valem. Vastavalt läbipainde valemile (4.189) on membraani kalle (parabooli tõus)

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{8\delta x}{c^2} = -\frac{q}{S}x. \quad (4.191)$$

Parabooli maksimaalne tõus vastab servapunktile ja on

$$\left| \frac{dz}{dx} \right|_{x=\pm c/2} = \frac{qc}{2S}. \quad (4.192)$$

Membraani ja x, y tasandiga piiratud «keha» ruumala

$$V = \frac{2}{3}c\delta b = \frac{qbc^3}{12S}. \quad (4.193)$$

Kasutades membraananalooget ja asendades valemities (4.192) ja (4.193) suuruse q/S suurusega $2G\vartheta$, saame

$$\tau_{\max} = cG\vartheta \quad \text{ja} \quad M_t = \frac{1}{3}bc^3G\vartheta. \quad (4.194)$$

Viimasest omakorda

$$\vartheta = \frac{3M_t}{bc^3G} \quad \text{ja} \quad \tau_{\max} = \frac{3M_t}{bc^2}. \quad (4.195)$$

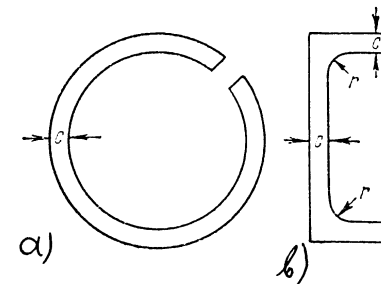
Rakendades membraananalooget valemile (4.191) saame leida nihkepingsed väänatud vardas

$$\tau_{yz} = 2G\vartheta x. \quad (4.196)$$

Leides sellele pingejaotusele vastava väändemomendi

$$M_t^* = 2b \int_0^{c/2} \tau_{yz} x dx = \dots = \frac{bc^2 \tau_{\max}}{6}, \quad (4.197)$$

näeme, et see on 2 korda väiksem kui valemiga (4.194) määratud M_t . Teise poole momendist M_t annavad pinged τ_{xz} , mis on väikesed



Joonis 4.24: Õhukeseseinalised avatud ristlõiked.

võrraldes pingetega τ_{yz} ja omavad maksimaalset väärtust ristõike lühemal küljel. Kuna aga jõu õlg on nende jaoks suur, siis summaarselt annavad nad ikkagi poole väändemomendist M_t .

Valemeid (4.194) ja (4.195) võib kasutada ka näiteks joonisel 4.24 kujutatud õhukeseseinaliste avatud ristlõigete korral. Siin tuleb vaid võtta b võrdseks ristlõike keskjoone pikkusega. Teisisõnu, ristlõige tuleb mõtteliselt sirgestada.

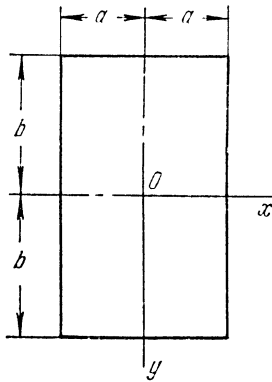
Sellist lähenemist saab kasutada väga erineva kujuga torude (õõnsate varraste) puhul, eeldades, et seina paksus c on väike võrreldes ristlõike diameetriga (kõrgusega, laiussega) ning ristlõige on avatud. Sellisel juhul membraani kalle ja ruumala, mille ta määrab erineb vähe ristkülikulise varda vastavatest suurustest. Tuleb märkida, et joonisel 4.24 b) kujutatud juhul leiab ristlõike nurkades aset märgatav pingete kontsentratsioon.

4.10.5 Ristkülikulise ristlõikega varraste vääne

Vaatleme ristkülikulise ristlõikega varrast (kõrgus $2b$ ja laius $2a$). Kasutame mebraananaloogiat, st. plaadi ristlõike kujulise membraani läbipained peavad rahuldama võrrandit (4.183):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad (4.198)$$

ja olema plaadi servades $x = \pm a$ ja $y = \pm b$ võrdsed nulliga. Kuna läbipained on antud juhul sümmeetrilised nii x kui y telje



Joonis 4.25: Ristkülikulise ristlõike mõõtmed

suhtes, siis on nii (4.198) kui rajatingimused rahuldatud kui anda läbipained ette kujul

$$z = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \left(\cos \frac{n\pi x}{2a} \right) Y_n, \quad (4.199)$$

kus b_1, b_3, \dots on konstandid ja Y_1, Y_3, \dots funktsioonid, mis sõltuvad vaid muutujast y . Funktsioonide Y_n määramiseks väljendatakse (4.198) parem pool Fourier' reana, st., esitatakse kujul

$$-\frac{q}{S} = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q}{S} \frac{4}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a}. \quad (4.200)$$

Seejärel rahuldadakse rajatingimused ja sümmetriatingimused ning saadakse

$$Y_n = \frac{16qa^2}{Sn^3\pi^3b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right). \quad (4.201)$$

Asendades saadud funktsioonid (4.201) läbipainde avaldisse (4.199) saame

$$z = \frac{16qa^2}{S\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (4.202)$$

Asendades nüüd suuruse q/S suurusega $2G\vartheta$ saame esitada pingefunktsiooni kujul

$$\varphi = \frac{32G\vartheta a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a}. \quad (4.203)$$

Pingekomponentide τ_{xz} ja τ_{yz} määramiseks tuleb nüüd differntseerida avaldist (4.203)

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{16G\vartheta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{2a}. \quad (4.204)$$

Kuna järgnevalt oleme huvitatud vaid maksimaalsest nihkepingest, siis τ_{xz} avaldist siin ei esita². Eeldades, et $b > a$ saame, et maksimaalne nihkepinge mõjub pikemate külgede $x = \pm a$ keskpunktides (see vastab membraani läbipainde maksimaalsele kaldele). Pannes $x = a$ ja $y = 0$ ja arvestades, et $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$, saame

$$\tau_{\max} = 2G\vartheta a - \frac{16G\vartheta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh \frac{n\pi b}{2a}}. \quad (4.205)$$

² x ja y telje valik on nagunii meelevaldne ja samuti tähistus a ja b

Kui $b > a$, siis koondub (4.205) paremal pool olev lõpmatu rida väga kiiresti ja τ_{\max} määramine fikseeritud suhte b/a puhul ei valmista raskusi. Näiteks väga kitsa ristlõike puhul on suhe b/a väga suur ja lõpmatu rea avaldise (4.205) paremal poolel võib hüljata. Tulemuseks saame

$$\tau_{\max} = 2G\vartheta a, \quad (4.206)$$

mis on kooskõlas alajaotuses 4.10.4 esitatud valemiga (4.196) või (4.194) ($c = 2a$). Ruudukujulise ristlõike puhul $a = b$ ja

$$\tau_{\max} = 1,351G\vartheta a. \quad (4.207)$$

Üldjuhul esitatakse maksimaalne nihkepinge kujul

$$\tau_{\max} = 2Gk\vartheta a, \quad (4.208)$$

kus kordaja k väärtus sõltub suhtest b/a (vt. tabel 4.1).

Tabel 4.1: Suhte b/a ja konstantide k , k_1 ja k_2 vaheline seos (Timošenko ja Goodieri põhjal).

a/b	k	k_1	k_2	a/b	k	k_1	k_2
1,0	0,675	0,1406	0,208	3	0,985	0,263	0,267
1,2	0,759	0,166	0,219	4	0,997	0,281	0,282
1,5	0,848	0,196	0,231	5	0,999	0,291	0,291
2,0	0,930	0,229	0,246	10	1,000	0,312	0,312
2,5	0,968	0,249	0,258	∞	1,000	0,333	0,333

Et leida väändemomendi M_t ja väändenurga ϑ vahelist seost, tuleb leida integraal (vt. (4.170))

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi dx dy. \quad (4.209)$$

On ilmne, et ka see integraal avaldub lõpmatu rea kujul. Analoogselt nihkepingega, koondub ka see rida $b > a$ puhul ning tuues sisse suhtest b/a sõltuvad kordajad k_1 ja k_2 saame väändemomendi M_t ja väändenurga ϑ vahelise sõltuvuse kujul

$$M_t = k_1 G \vartheta (2a)^3 2b \quad (4.210)$$

ja maksimaalse nihkepinge ning väändemomendi vahelise seose

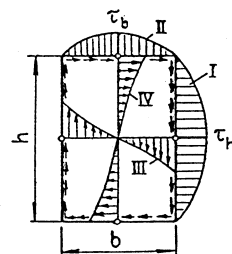
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{k_2 (2a)^2 2b}. \quad (4.211)$$

Tugevusõpetuse kursusest on tuttavad valemid

$$\tau_h = \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad W_t = k_h h b^2, \quad \tau_b = k_b \tau_h$$

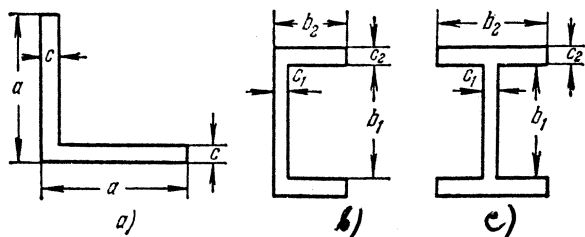
ja tabel 4.2 koos vastava joonisega, mis on kooskõlas esitatud lahendusega.

Tabel 4.2: Suhte h/b ja konstantide k_h ja k_b vaheline seos ning maksimaalsed nihkepinged (Metsaveere ja Raukase põhjal).



h/b	1	1,2	1,5	2	3	5	10	∞
k_h	0,208	0,219	0,231	0,246	0,267	0,291	0,312	0,333
k_b	1,00	0,93	0,86	0,79	0,75	0,74	0,74	0,74

4.10.6 Valtsmetallist talade vääne



Joonis 4.26: Kolm erinevat valtsmetallist tala ristlõiget: a) — «nurkraud»; b) — «karpraud»; c) «I-raud».

Vaatleme nn. nurkprofiilist, karpprofiilist ja I-profiilist talade vääned (joonis 4.26). Rakendame alajaotuses 4.10.4 saadud tulemusi kitsa ristkülikulise tala jaoks, st. valemeid

$$\vartheta = \frac{3M_t}{bc^3G} \quad \text{ja} \quad \tau_{\max} = \frac{3M_t}{bc^2}, \quad (4.212)$$

kus b tähistab ristküliku kõrgust ja c laiust.

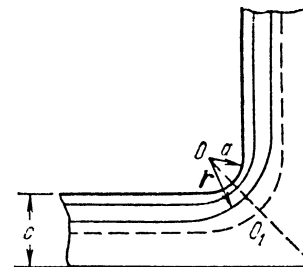
Nurkprofiili puhul tuleb valemis (4.212) võtta $b = 2a - c$. Karpprofiili ja I-profiili puhul tuleb ristlõige lahutada kolmeks ristkülikuks ning eeldada, et vaadeldava ristlõike väändejäikus võrdub ristkülikute väändejäikuste summaga, st. (4.212)₁ tuleb suurus bc^3 asendada suurusega $b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3$. Seega antud juhul väändenurk

$$\vartheta = \frac{3M_t}{(b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3)G}. \quad (4.213)$$

Ristlõike servas mõjuvate maksimaalsete nihkepingete määramiseks (hindamiseks) kasutatakse valemit (4.194)₁, st. valemit $\tau = c\vartheta G$. Seega näiteks I-tala vöös mõjuva nihkepinge hindamiseks saab ka-

sutada valemit³

$$\tau_{\max} = \frac{3M_t c_2}{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3}. \quad (4.214)$$



Joonis 4.27: Pingete kontsentratsioon nurkprofiili korral.

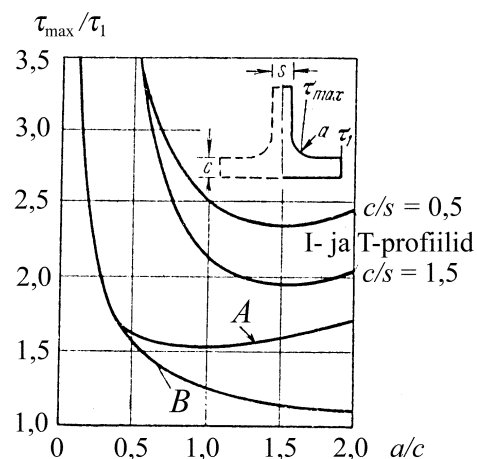
Vaadeldavate ristlõigete nurkades ilmneb oluline pingete kontsentratsioon. Vaatleme näitena nurkprofiili seinapaksusega c (joonis 4.27). Tähistame ümardatud sisenurga raadiuse a . Kasutades membraanalogiat saame nurgas mõjuva maksimaalse nihkepinge jaoks hinnangu

$$\tau_{\max} = \tau_1 \left(\frac{c}{4a} \right), \quad (4.215)$$

kus τ_1 tähistab seinas mõjuvat nihkepinget. Näiteks $a = 0,5c$ puhul $\tau_{\max} = 1,5\tau_1$ ja $a = 0,1c$ puhul $\tau_{\max} = 3,5\tau_1$.

Joonis (4.28) esitab pingete kontsentratsiooni iseloomustava suhte τ_{\max}/τ_1 sõltuvana kõverusraadiuse ja seina paksuse suhtest a/c . Siin vastavad alumised kõverad nurkprofiilile. Kõver A on saadud numbriliselt kasutades lõplike vahede meetodit ja esitab täpsemaid tulemusi kui kõver B , mis vastab valemile (4.215). Samal ajal on selge, et $a/c < 0,3$ korral annab valem (4.215) täpse tulemuse. Ülemised kaks kõverat iseloomustavad pingete kontsentratsiooni I- ja T-profiilides kahe erineva seina ja vöö paksuste suhte c/s jaoks.

³Meenutame, et valemid kitsa ristkülikulise ristlõike jaoks saadi eeldusel, et membraan oli kitsamast otsast lahti, järelikult $\tau = const$ piki pikemat külge.



Joonis 4.28: Suhe τ_{\max}/τ_1 sõltuvana suhtest a/c .

Viimased tulemused on saadud eksperimentidest, kus pingefunktsiooni φ analoogiks on elektriline potentsiaal V konstantse voolutiheduse i puhul. Vastav võrrand omab kuju

$$\nabla^2 V = -\rho i, \quad (4.216)$$

kus ρ on plaadi takistus (konstantne). Katse käigus hoitakse plaadi servas konstantset potentsiaali. Sellisel juhul on meil jällegi täielik analoogia võrranditega (4.167) ja rajatingimustega (4.168). Rakendades viimati käsitletud analoogiat nurkprofiilile, saadakse joonise 4.28 kõver A .

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	3
1.1 Kirjandus	4
1.2 Ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhimõistetest, -hüpoteesidest ja -võrrandest.	6
1.2.1 Põhieeldused ja -hüpoteesid	6
1.2.2 Skalaar, vektor, tensor	9
1.2.3 Baasivektorid ja meetrilised tensorid	11
1.2.4 Liikumise kirjeldamine	12
1.2.5 Deformatsioon ja siire	13
1.2.6 Kiirus ja kiirendus	23
1.2.7 Mass	26
1.2.8 Jõud	27
1.2.9 Liikumishulk	29
1.2.10 Kineetiline moment	30
1.2.11 Pinge	31
1.2.12 Pingetensor	33

1.2.13	Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused — Cauchy liikumisseadused	35
1.2.14	Liikumisvõrrandid Lagrange'i koordinaatides	36
1.2.15	Energia ja entroopia	38
1.2.16	Pidevustingimused ehk sobivustingimused .	44
1.2.17	Olekuvõrrandid	45
1.3	Elastusteooria põhivõrrandite süsteem	48
2	Valik teemasid mittelineaarsest elastsusteooriast	51
2.1	Homogeenne ehk ühtlane deformatsioon	51
2.1.1	Põhiseosed	51
2.1.2	Puhas homogeenne deformatsioon	53
2.1.3	Tõmme	55
2.1.4	Hüdrostaatiline surve	56
2.1.5	Nihe	56
2.2	Ringsilindri vääne	60
2.3	Ploki paine	65
2.4	Lõplik tasapinnaline deformatsioon	71
2.5	Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine .	78
2.5.1	Sissejuhatus	78
2.5.2	Puhas homogeenne deformatsioon (kokkusurumatu lehe ühtlane laienemine) . .	80
2.5.3	Puhas nihe	83
2.5.4	Tõmme	84
2.5.5	Ühtlane kahedimensionaalne tõmme	85

3	Valik teemasid lineaarsest elastsusteooriast	88
3.1	Põhivõrrandid	88
3.2	Lamé koefitsentide seos Youngi mooduli ja Poisson'i teguriga	93
3.3	Sobivustingimused ehk pidevustingimused pingetes	96
3.4	Tasand-deformatsioon ja tasandpinge elastostaatikas	98
3.5	Biharmoonilise võrrandi lahendamine analüütiliste analüütiliste funktsioonide abil	101
3.6	Pingete jaotus ja siirdeväljad tasand-deformatsiooni puhul	104
3.7	Pingete kontsentratsioon ühtlaselt pingestatud plaadis oleva elliptilise augu ümber	110
3.8	Lainelevi elastses keskkonnas	115
3.8.1	Põhivõrrandid	115
3.8.2	Tasapinnalised harmoonilised lained	118
3.8.3	Rayleigh' lained	122
4	Valik klassikalisi inseneriprobleeme	126
4.1	Sissejuhatus	126
4.2	Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides	132
4.3	Saint-Venant'i printsiip	137
4.4	Konsooli paine	138
4.5	Ühtlaselt koormatud tala paine	143
4.6	Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool . .	148
4.7	Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides . . .	149
4.7.1	Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon	149

4.7.2	Kõvera tala paine	151
4.7.3	Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides	152
4.7.4	Pöörlev ketas	153
4.8	Ruumilised ülesanded	155
4.8.1	Varda tõmme omakaalu mõjul	155
4.8.2	Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne .	157
4.8.3	Prismaatiliste varraste puhas paine	159
4.8.4	Paadi puhas paine	161
4.9	Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades	163
4.9.1	Üldvõrrandid	163
4.9.2	Ümarplaadi paine	167
4.10	Vääne	170
4.10.1	Sirgete varraste vääne	170
4.10.2	Elliptiline ristlõige	174
4.10.3	Membraananaloogia	177
4.10.4	Kitsa ristküliku kujulise ristlõikega varda vääne	180
4.10.5	Ristkülikulise ristlõikega varraste vääne . . .	183
4.10.6	Valtsmetallist talade vääne	187

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	3
1.1 Kirjandus	4
1.2 Ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhimõistetest, -hüpoteesidest ja -võrrandeist.	6
1.2.1 Põhieeldused ja -hüpoteesid	6
1.2.2 Skalaar, vektor, tensor	9
1.2.3 Baasivektorid ja meetrilised tensorid	11
1.2.4 Liikumise kirjeldamine	12
1.2.5 Deformatsioon ja siire	13
1.2.6 Kiirus ja kiirendus	23
1.2.7 Mass	26
1.2.8 Jõud	27
1.2.9 Liikumishulk	29
1.2.10 Kineetiline moment	30
1.2.11 Pinge	31
1.2.12 Pingetensor	33

1.2.13	Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused — Cauchy liikumisseadused	35
1.2.14	Liikumisvõrrandid Lagrange'i koordinaatides	36
1.2.15	Energia ja entroopia	38
1.2.16	Pidevustingimused ehk sobivustingimused .	44
1.2.17	Olekuvõrrandid	45
1.3	Elastusteooria põhivõrrandite süsteem	48
2	Valik teemasid mittelineaarsest elastsusteooriast	51
2.1	Homogeenne ehk ühtlane deformatsioon	51
2.1.1	Põhiseosed	51
2.1.2	Puhas homogeenne deformatsioon	53
2.1.3	Tõmme	55
2.1.4	Hüdrostaatiline surve	56
2.1.5	Nihe	56
2.2	Ringsilindri vääne	60
2.3	Ploki paine	65
2.4	Lõplik tasapinnaline deformatsioon	71
2.5	Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine .	78
2.5.1	Sissejuhatus	78
2.5.2	Puhas homogeenne deformatsioon (kokkusurumatu lehe ühtlane laienemine) . .	80
2.5.3	Puhas nihe	83
2.5.4	Tõmme	84
2.5.5	Ühtlane kahedimensionaalne tõmme	85

3	Valik teemasid lineaarsest elastsusteooriast	88
3.1	Põhivõrrandid	88
3.2	Lamé koefitsentide seos Youngi mooduli ja Poisson'i teguriga	93
3.3	Sobivustingimused pingetes	96
3.4	Tasand-deformatsioon ja tasandpinge elastostaatikas	98
3.5	Biharmoonilise võrrandi lahendamine analüütiliste . . .	101
3.6	Pingete jaotus ja siirdeväljad tasand-deformatsiooni puhul	104
3.7	Pingete kontsentratsioon . . . elliptilise augu ümber .	110
3.8	Lainelevi elastses keskkonnas	115
3.8.1	Põhivõrrandid	115
3.8.2	Tasapinnalised harmoonilised lained	118
3.8.3	Rayleigh' lained	122
4	Valik klassikalisi inseneriprobleeme	126
4.1	Sissejuhatus	126
4.2	Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides	132
4.3	Saint-Venant'i printsiip	137
4.4	Konsooli paine	138
4.5	Ühtlaselt koormatud tala paine	143
4.6	Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool . .	147
4.7	Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides . . .	148
4.7.1	Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon	148
4.7.2	Kõvera tala paine	150

4.7.3	Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides	151
4.7.4	Pöörlev ketas	152
4.8	Ruumilised ülesanded	154
4.8.1	Varda tõmme omakaalu mõjul	154
4.8.2	Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne .	156
4.8.3	Prismaatiliste varraste puhas paine	158
4.8.4	Paadi puhas paine	160
4.9	Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades	162
4.9.1	Üldvõrrandid	162
4.9.2	Ümarplaadi paine	166
4.10	Vääne	169
4.10.1	Sirgete varraste vääne	169
4.10.2	Elliptiline ristlõige	173
4.10.3	Membraananaloogia	176
4.10.4	Kitsa ristküliku kujulise ristlõikega varda vääne	179
4.10.5	Ristkülikulise ristlõikega varraste vääne . . .	182
4.10.6	Valtsmetallist talade vääne	186