Tallinna Tehnikaülikool
Mehaanikainstituut
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

Elastsusõpetus

(Lineaarne elastsusteooria)

Loengukonspekt

Tallinn 2015

Eessõna

Käesolev loengukonspekt on eeskätt mõeldud kasutamiseks Tallinna Tehnikaülikooli ehitusteaduskonna üliõpilastele elastsusõpetuse kursuse (EMD0020) õppimisel. 2009. aastal õpetati sama koodiga ainet lineaarse elastsusteooria nime all. Elastsusõpetuse programm (vt. `www.ioc.ee/~salupere/loko`), kujutab endast antud loengukonspekti lahutamatut lisa. Seal on esitatud õppeaine eesmärgid, maht, eeldusained ja soovitatav kirjandus ning kirjeldatud antud aine õppimisel kehtivat töökorraldust.

Märkused:

1. Loengukonspekt on internetis aadressil `www.ioc.ee/~salupere/loko`.
2. Loengukonspekt pole mõeldud kasutamiseks iseseisva õpikuna. Seetõttu on õpitavast ainest tervikliku ülevaate saamiseks loengute külastamine ja vajalikus ulatuses konspekteerimine hädavajalik.

3. Teksti paremas servas olevad märgid ($\surd, \bullet, \star$ jne.) tähistavad kohti, kus loengus esitatakse olulisi selgitavaid märkusi.

4. Loengukonspekti pisut ebaharilik väljanägemine (kaks A5 lehekülge on paigutatud ühele A4 lehele) on tingitud praktilistest kaalutlustest. Loengutel näidatakse materjali A5 lehekülgede kaupa.

5. Vabandan juba ette tekstis esineda võivate trükivigade pärast. Vastavasisulised märkused on teretulnud nii loengutes kui e-kirjade kujul aadressil `salupere@ioc.ee`.

Andrus Salupere

Peatükk 1

Sissejuhatus

1.1 Elastsusteooria ehk elastsusõpetus

Katsed on näidanud, välismõjude (pindkoormused, massjõud, soojendamine, jahutamine) toimel võivad tahked kehad deformeeruda. Kui deformatsioonid ei ületa teatud piiri, siis välismõjude kõrvaldamisel keha taastab oma esialgse kuju. Sellist tahke keha omadust nimetatakse *elastsuseks*.

Elastsusteooria ehk elastsusõpetus uurib elastsete kehade deformatsioone ja liikumist. Sõltuvalt välismõjude kõrvaldamise kiirusest võivad siin kaasneda teatud võnkumised. Kui deformatsioonid aga ületavad teatava piiri, siis keha algne kuju ei taastu täielikult — osa deformatsioone säilib. Neid jäävaid deformatsioone nimetatakse *plastseteks deformatsioonideks*.

Elastsusteooria ülesandeks on määrata ja hinnata

- geomeetrilisi suurusi, mis iseloomustavad keha deformatsiooni: läbipainded, siirded jne.;
- sisejõude ja pingeid, mis ilmnevad deformatsiooniprotsessis.

Selleks rakendatakse matemaatilisi meetodeid (matemaatiline analüüs, diferentsiaalvõrrandite teooria jne.).

Elastsusteooria põhineb pideva keskkonna mehaanikal[1]. Seega on vaja sisse tuua või määrata:

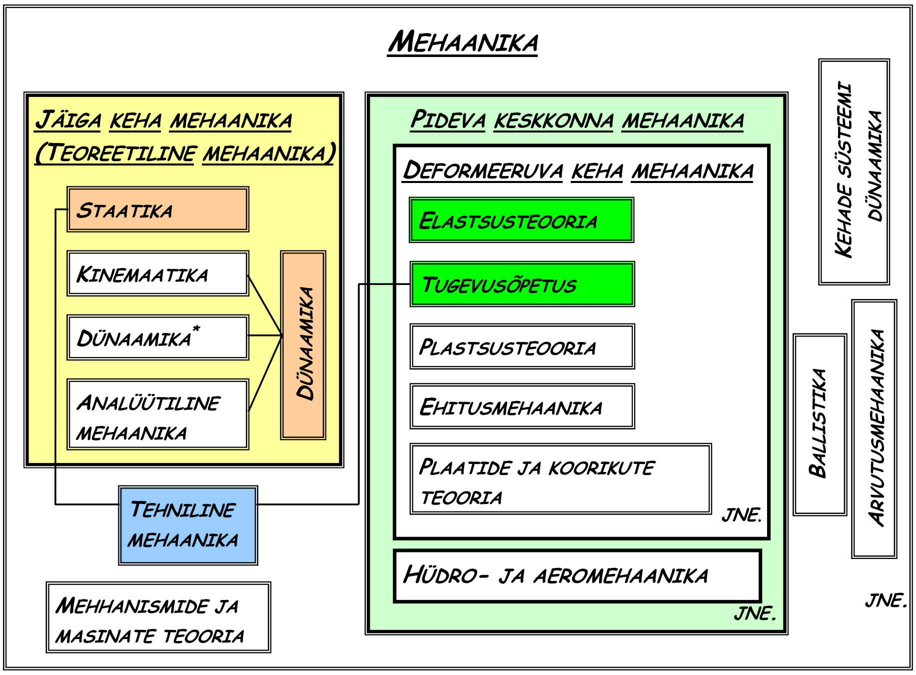
- Pideva keskkonna mõiste.
- Sisejõudude ja deformatsioonide vahelised seosed ehk olekuvõrrandid (viimased määratakse eksperimentidest).
- Geomeetrilised suurused, mis kirjeldavad keha deformatsioone.
- Sisejõud ja nende seos välismõjudega.

Käesoleva kursuse raames käsitletakse lineaarset elastsusteooriat.

[1]Pideva keskkonna mehaanika uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimel.

1.2 Mehaanika harud

Mehaanika on teadus, mis uurib tahkete kehade, vedelike ja gaaside liikumist, selle liikumise põhjusi ja tagajärgi.



Joonis 1.1: Mehaanika harud

1.2.1 Jäiga keha mehaanika

Teoreetiline mehaanika ehk absoluutselt jäiga keha mehaanika uurib absoluutselt jäikade kehade liikumist ja paigalseisu neile rakendatud jõudude toimel.

Absoluutselt jäiga keha mistahes kahe punkti vaheline kaugus on konstantne.

Laias laastus võib teoreetilise mehaanika jagada *staatikaks*, *kinemaatikaks* ja *dünaamikaks*.

- *Staatika* uurib:
  1. kehade tasakaalu (täpsemalt öeldes kehadele rakendatud jõusüsteemide tasakaalu) ja
  2. jõusüsteemide lihtsustamist ehk taandamist.
- *Kinemaatika* uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
- *Klassikaline dünaamika* uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimel.

Liikumisena ehk mehaanikalise liikumisena mõistetakse vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes. Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega jäigalt koordinaatsüsteem. Tulemust nimetatakse *taustsüsteemiks*.

Punktmassiks nimetatakse materiaalset keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.

Aeg loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.

1.2.2 Pideva keskkonna mehaanika

Pideva keskkonna mehaanika (PKM) uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimel.

JÄIGA KEHA MEHAANIKA	PIDEVA KESKKONNA MEHAANIKA
UURIB PUNKTMASSIDE JA ABSOLUUTSELT JÄIKADE KEHADE LIIKUMIST (JA PAIGALSEISU) NEILE MÕJUVATE JÕUDUDE TOIMEL.	UURIB TAHKISTE, VEDELIKE JA GAASIDE LIIKUMIST VÄLISMÕJUDE TOIMEL.
ABSOLUUTSELT JÄIK KEHA	DEFORMEERUV KESKKOND (KEHA)
LIIKUMINE	LIIKUMINE
JÕUD	VÄLISMÕJUD
NEWTONI SEADUSED	NEWTONI SEADUSED

Joonis 1.2: Jäiga keha ja pideva keskkonna mehaanika võrdlus

Palju harusid

- tahkise (deformeeruva keha) mehaanika
  - tugevusõpetus
  - elastsusteooria
  - plastsusteooria
  - jne.
- hüdro- ja aeromehaanika
  - hüdrostaatika
  - hüdrodünaamika
  - jne.

1.2.3 Tehniline mehaanika

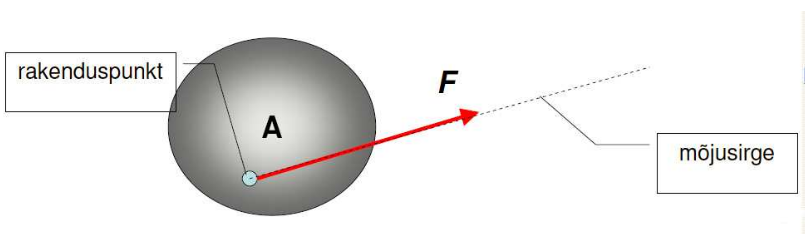
Tehniline mehaanika = staatika + tugevusõpetus.

Tugevusõpetus on mehaanika haru, mis uurib konstruktsioonielementide piisava tugevuse, jäikuse ja stabiilsuse saavutamist võimalikult ökonoomsel moel.

1.3 Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

Täpsema ülevaate saamiseks on soovitatav lugeda professor Aleksander Klausoni loengukonspekte.

1.3.1 Staatika



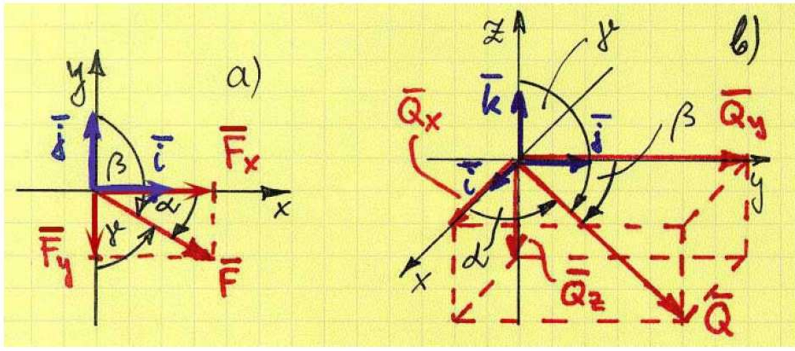
Joonis 1.3: Jõud ja jõu mõjusirge
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Jõud on kehade vastastikuse mõju mõõt. *Jõud on vektoriaalne suurus.* Jäiga keha mehaanikas (k.a. staatikas) on *jõud libisev vektor*. Teisisõnu, jäiga keha mehaanikas võib lugeda jõudu rakendatuks oma mõjusirge mistahes punkti.

Jõusüsteem on kehale mõjuvate jõudude kogum.

Jõu projektsioon on skalaar: kui $\mathbf{i}$ on x telje suunaline ühikvektor, siis projektsioon $F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = F \cos \alpha$.

Jõu komponent on vektor: $\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i}$.



Joonis 1.4: Jõu projektsioonid ja jõu komponenedid.

Vabaks kehaks nimetatakse keha, mille liikumist ei piira mitte ükski tingimus. Vaba keha saab antud asendist üle viia mistahes uude asendisse.

Side on keha liikumist kitsendav tingimus. Tavaliselt moodustab sideme mingi teine keha.

Sidemereaktsioon ehk reaktsioonjõud on jõud, millega sidet moodustav keha mõjub vaadeldavale kehale.

Inseneriülesannete puhul nimetatakse sidemeid tihti ka *tugedeks* ja vastavaid reaktsioonjõudusid *toereaktsioonideks*.

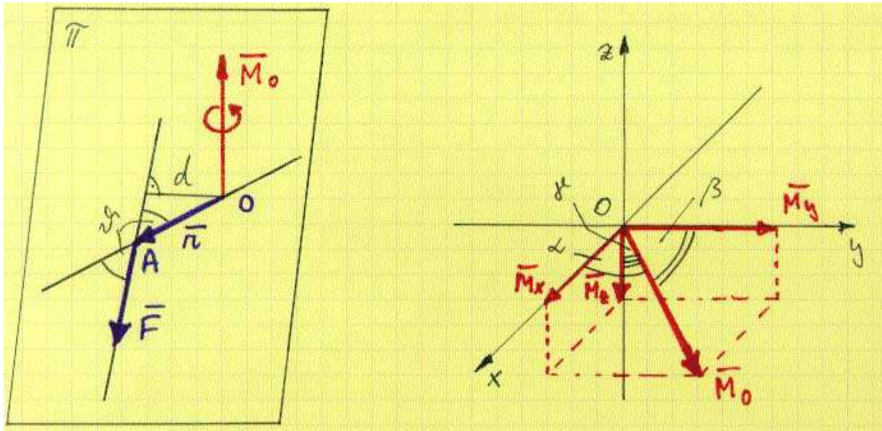
Sidemetest vabastatavuse printsiip: Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega.

Sidemete tüübid: sile pind, kare pind, liikumatu liigend(tugi), liikuv liigend(tugi), kerge varras, painduv ühendus jne.

Jõu momendiks punkti suhtes nimetatakse vektorit, mis võrdub jõu rakenduspunkti A kohavektori $\mathbf{r}$ ja jõuvektori $\mathbf{F}$ vektorkorrutisega.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M_O \equiv |\mathbf{M}_O| = Fr\sin\vartheta = Fd. \tag{1.1}$$

Jõu moment iseloomustab jõu pööravat toimet.



Joonis 1.5: Jõu moment punkti suhtes.

Momentvektori $\mathbf{M}_O$ suurus (ehk moodul) ja suund sõltub punkti O valikust kuid ei sõltu punkti A valikust jõu mõjusirgel.

Momentvektori $\mathbf{M}_O$ mõjusirge määrab telje, mille ümber jõud $\mathbf{F}$ püüab tekitada pöörlemist.

Pöörde suund määratakse *kruvireegliga* — kui (parema käe) kruvi teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga, siis keha pöörlemise suund ühtib kruvi pöörlemise suunaga. Ja vastupidi, kui kruvi pöörata keha pöörlemise suunas, siis tema teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga.

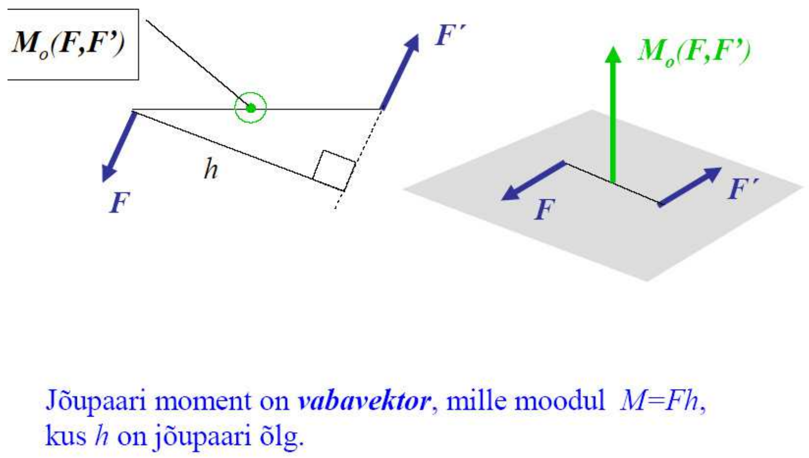
Jõu moment telje suhtes võrdub selle telje mistahes punkti suhtes leitud momentvektori projektsiooniga vaadeldaval teljel.

- See on eestikeelses kirjanduses levinud määratlus ja selle põhjal on tegu skalaariga. Tegelikult on ka jõu momenti telje suhtes mõistlik käsitleda vektorina.
- Praktikas leitakse moment valemist $M = \pm Fd$, s.t. jõud korda jõu õlg, ning märk määratakse kruvireegliga.

√

Jõupaari moodustavad kaks võrdvastupidist jõudu **F** ja −**F** millel on erinev mõjusirge.

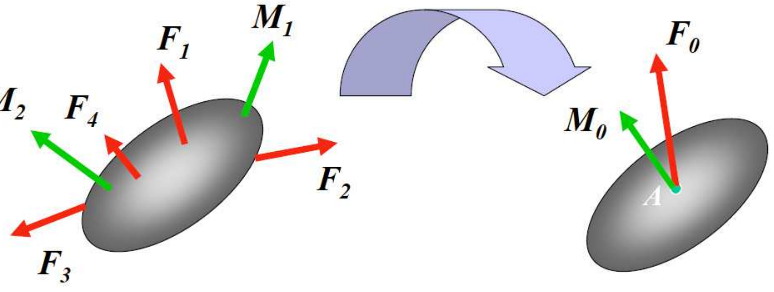
Jõupaari moment võrdub ühe jõupaari moodustava jõu momendiga teise rakenduspunkti suhtes. Jõupaari moment on *vabavektor*.



Joonis 1.6: Jõupaar ja jõupaari moment
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Lemma jõu paraleellükkest. Jäiga keha mistahes punktis A rakendatud jõu võib paralleelselt tema mõjusirgega üle kanda uude rakenduspunkti B kui lisada punktis A rakendatud jõu moment punkti B suhtes.

Staatika põhiteoreem (Poinsot' teoreem): Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab asendada taandamistsentrisse rakendatud jõusüsteemi peavektoriga ja jõusüsteemi peamomendiga taandamistsentri suhtes.



Joonis 1.7: Jõusüsteemi peavektor ja peamoment.
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Jõusüsteemi peavektor: $\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$

Jõusüsteemi peamoment: $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$, kus punkti O nimetatakse *taandamistsentriks*. (Joonisel on kahjuks O asemel A.)

Jõusüsteem on tasakaalus parajasti siis kui peavektor $\mathbf{F}_O$ ja mingi punkti O suhtes leitud peamoment $\mathbf{M}_O$ on võrdsed nulliga:

$$\mathbf{F}_O = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \tag{1.2}$$

Skalaarsed tasakaalu tingimused:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Tasapinnaline jõusüsteem

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{Oz}(\mathbf{F}_i) = 0. \tag{1.4}$$

Alternatiivsed võrrandid

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0 \tag{1.5}$$

või

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0 \tag{1.6}$$

või

$$\sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Cz}(\mathbf{F}_i) = 0, \tag{1.7}$$

kus punktid A, B ja C ei asetse samal sirgel.

Staatiliselt määratud ja staatiliselt määramata ülesanded:

Kui on võimalik koostada nii sama palju tasakaaluvõrrandeid kui palju on tundmatuid toereaktsioone, siis on tegu *staatiliselt määratud ülesandega*. Vastupidisel juhul on tegu *staatiliselt määramata ülesandega*.

Mitmetes õpikutes kasutatakse antud kontekstis ka termineid *staatikaga määratud ülesanded* ja *staatikaga määramata ülesanded*.

Raskuskese

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int_V \mathbf{r} dV}{V}. \tag{1.8}$$

Skalaarkujul

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \tag{1.9}$$

Masskese: sarnased valemid, kuid $V \to m$

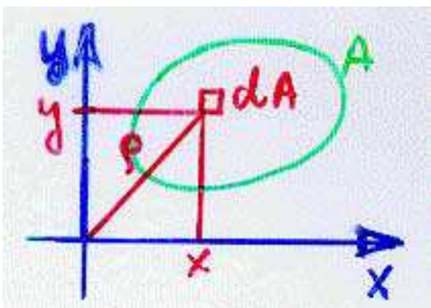
Pinnakese: sarnased valemid, kuid $V \to A$

Pinnamomendid.

$n + m$ astme pinnamoment

$$\int_A x^m y^n dA \tag{1.10}$$

Nullastme pinnamoment — pindala:

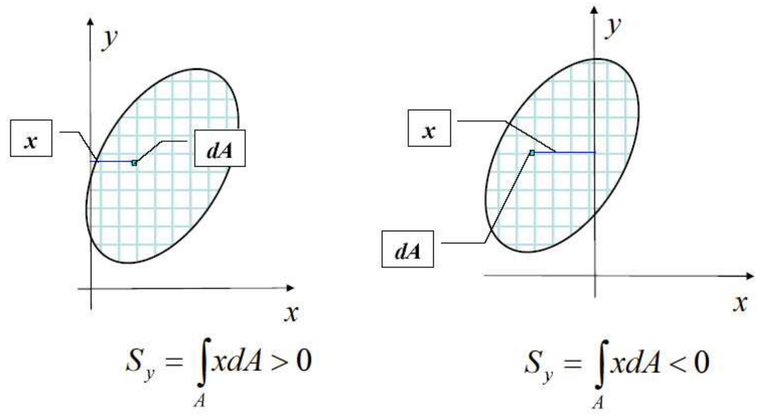


Joonis 1.8: Tasapinnalise kujundi pinnamomendid.

$$A = \int_A dA. \tag{1.11}$$

Esimese astme pinnamomendid — staatilised momendid:

$$S_x = \int_A y dA \qquad S_y = \int_A x dA. \tag{1.12}$$



Joonis 1.9: Staatiline moment.
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Teise astme pinnamomendid — inertsimomendid:

telginertsimomendid

$$I_x = \int_A y^2 dA, \qquad I_y = \int_A x^2 dA; \tag{1.13}$$

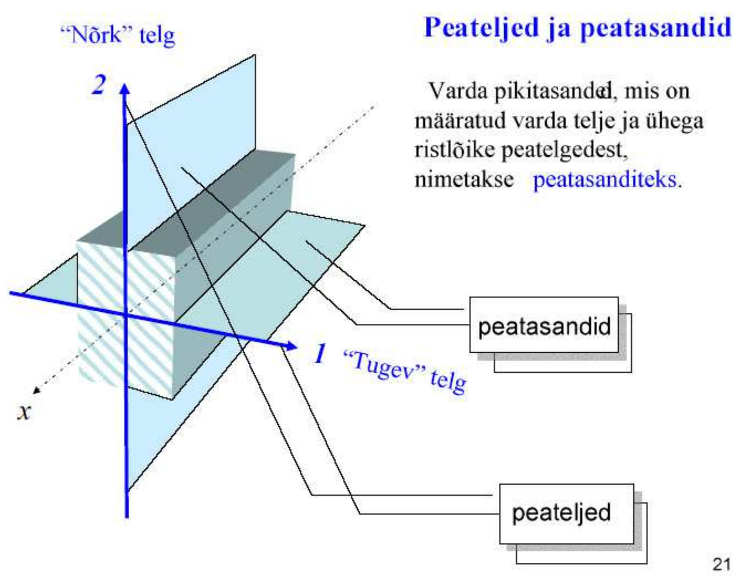
polaarinertsimoment

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA; \tag{1.14}$$

tsentrifugaalinertsimoment

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \tag{1.15}$$

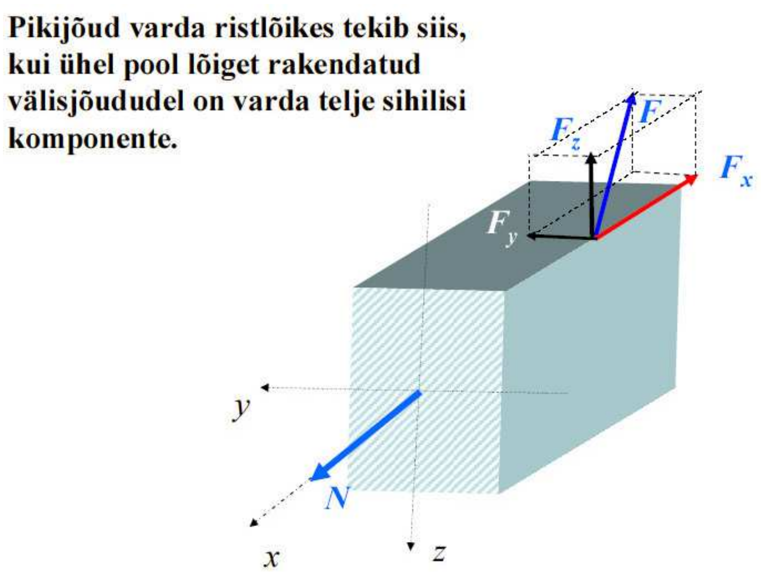
Ristlõike keskteljed ja peateljed. Peainertsimomendid. Peatasandid.



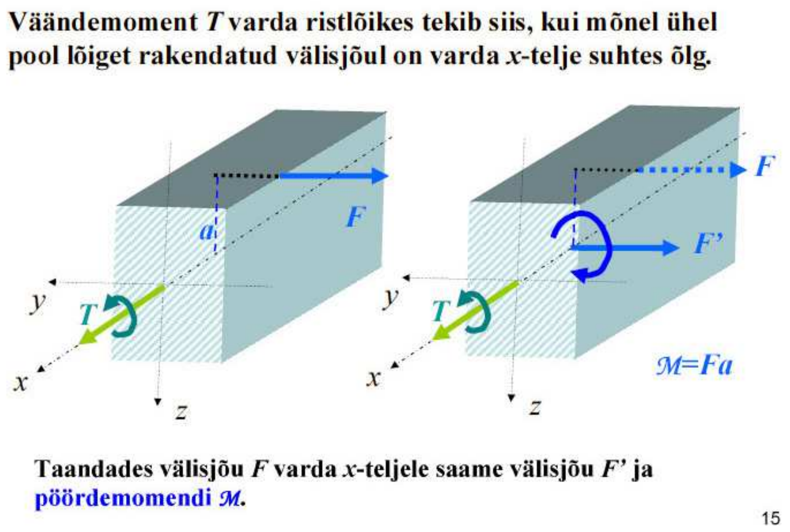
Joonis 1.10: Ristlõige.
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

1.3.2 Tugevusõpetus

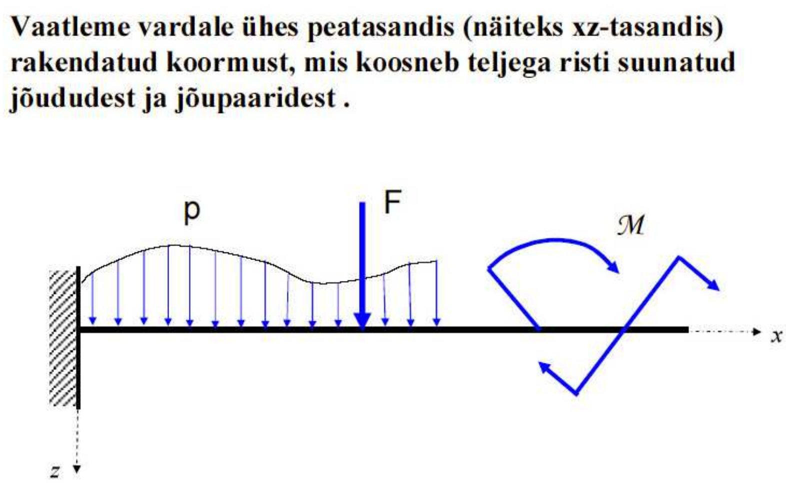
Sisejõud: pikijõud, väändemoment, põikjõud, paindemoment.



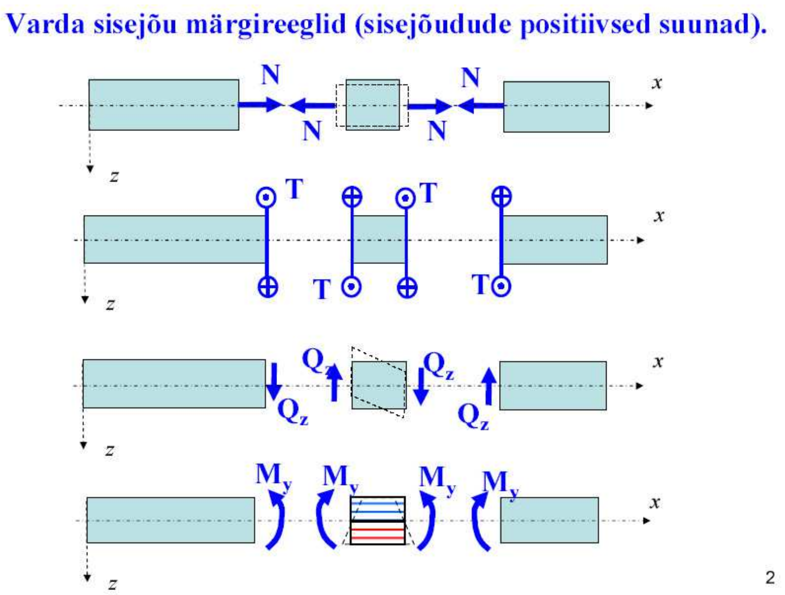
Joonis 1.11: Pikijõud
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)



Joonis 1.12: Väändemoment
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

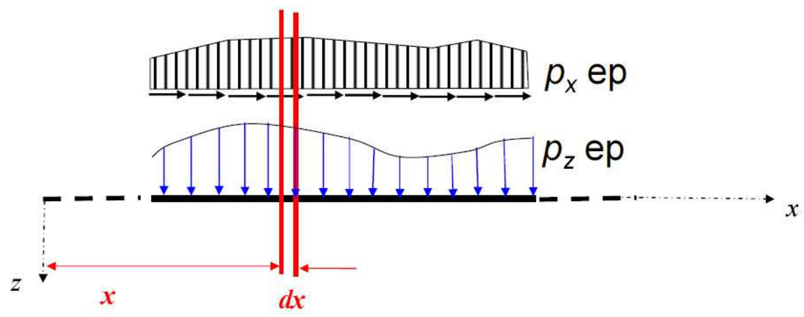


Joonis 1.13: Põikjõud ja paindemoment
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)



Joonis 1.14: Sisejõudude märgireeglid.
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

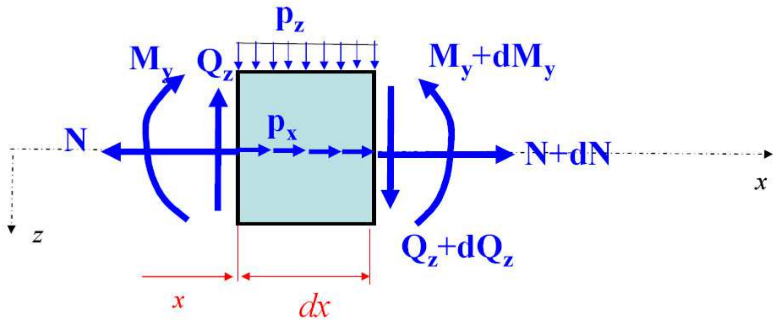


Joonis 1.15: Diferentsiaal- ja integraalseosed — lauskoormuse intensiivsus
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

$$\frac{dN}{dx} = N' = -p_x, \qquad N(x) = N(a) - \int_a^x p_x(x)dx, \tag{1.16}$$

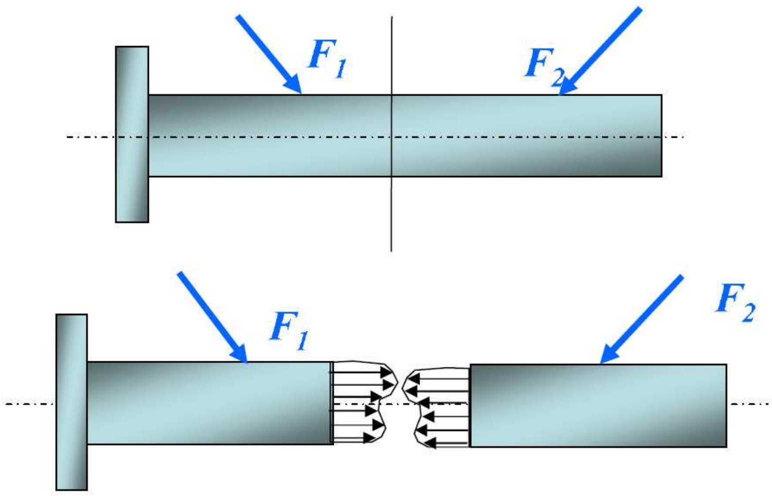
$$\frac{dQ_z}{dx} = Q_z' = -p_z, \qquad Q_z(x) = Q_z(a) - \int_a^x p_z(x)dx, \tag{1.17}$$

$$\frac{dM_y}{dx} = M_y' = Q_z, \qquad M_y(x) = M_y(a) - \int_a^x Q_z(x)dx. \tag{1.18}$$



Joonis 1.16: Diferentsiaal- ja integraalseosed — sisejõud
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

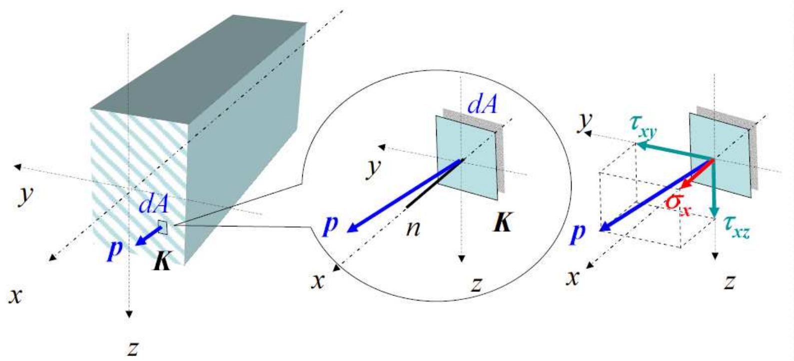
Lõikemeetod, pinged varda ristlõikes



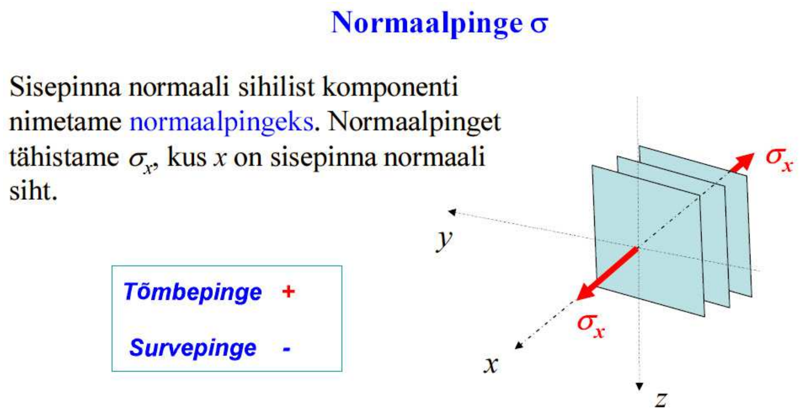
Joonis 1.17: Lõikemeetod ja pinged varda ristlõikes
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Pinged varda punktis. Vaatleme varda punkti K, mida läbib pind normaaliga $\mathbf{n}$. Seal mõjub pingevektor $\mathbf{p}$. Viimane omab normalkomponenti $\boldsymbol{\sigma}_x$ ja tangentsiaalkomponente $\boldsymbol{\tau}_{xy}$ ja $\boldsymbol{\tau}_{xz}$.

- $\boldsymbol{\sigma}_x$ — normaalpinge — märgireegel analoogne pikijõuga
- $\boldsymbol{\tau}_{xy}$ ja $\boldsymbol{\tau}_{xz}$ — nihkepinge ehk tangentsiaalpinge — märgireegel analoogne põikjõuga



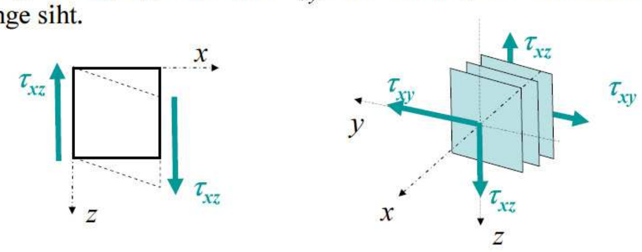
Joonis 1.18: Pinge varda punktis
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)



Joonis 1.19: Normaalpinge
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Tangentsiaalpinge τ

Sisepinna puutuja sihilisi komponente nimetame tangentsiaalpingeteks. Tangentsiaalpinget tähistame τ_{xy}, kus x on sisepinna normaali siht ja y – pinge siht.

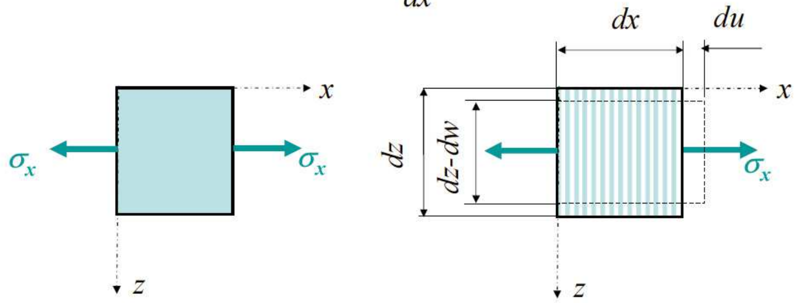


Tangentsiaalpinge (nihkepinge) iseloomustab jõudude intensiivsust, mis püüavad sisepinnaga paralleelseid materjalikihte omavahel nihutada. Positiivne nihkepinge mõjub positiivsel sisepinnal telgede positiivses suunas. Joonisel on toodud positiivsed nihkepinged.

Joonis 1.20: Nihkepinge ehk tangentsiaalpinge
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Normaaldeformatsioon (normaalmoone)

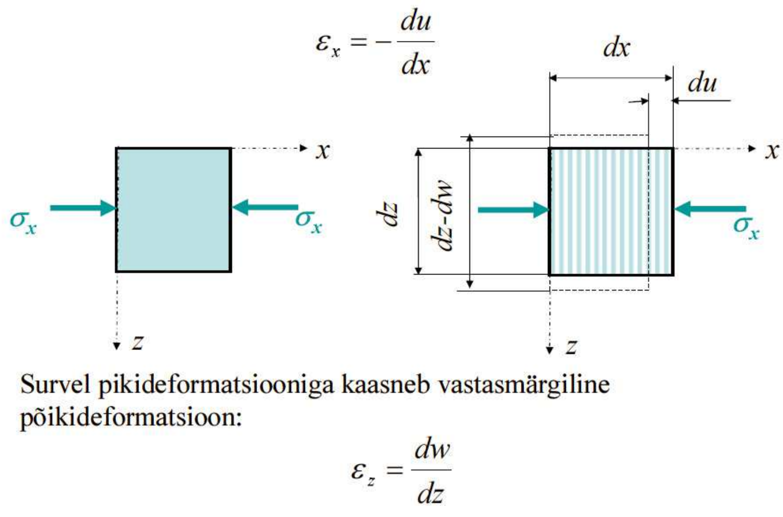
$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$



Tõmbel kaasneb pikideformatsiooniga vastasmärgiline põikideformatsioon:

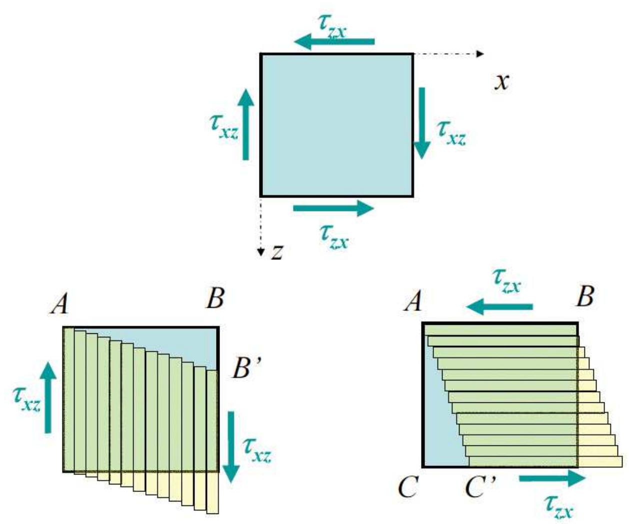
$$\varepsilon_z = -\frac{dw}{dz}$$

Joonis 1.21: Normaaldeformatsioon: $\sigma > 0$
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)



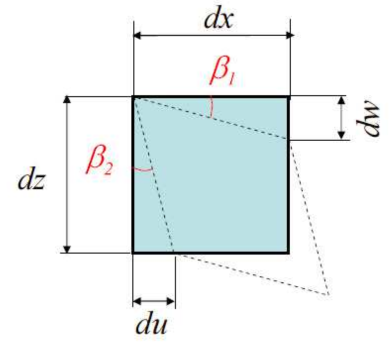
Joonis 1.22: Normaaldeformatsioon: $\sigma < 0$
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Nihkedeformatsioon ehk nihe ehk nihkemoone



Joonis 1.23: Nihkedeformatsioon
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Kuna tangentsiaalpinged τ_{xz} ja τ_{zx} mõjuvad ainult koos, siis kirjeldatakse elementaarristtahuka kogu deformatsiooni osanihete summana:



$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz} = \omega_{xz} + \omega_{zx} = \tan\beta_1 + \tan\beta_2 = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \approx \beta_1 + \beta_2$$

See summa on suhteline nihkedeformatsioon ehk nihkemoone.

Joonis 1.24: Nihkedeformatsioon
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Elastsuskonstandid:

- E — Youngi moodul ehk (normaal)elastsusmoodul;
- G — nihkeelastsusmoodul;
- ν — Poissoni tegur;
- $$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.19)$$

Pingete ja deformatsioonide (moonete) vahelised seosed:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \ldots, \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \quad (1.20)$$

Deformatsioonienergia

Vaatleme vedru, mille elastsusjõu moodul $F = kx$.

- Elastsusjõu elementaartöö $dW = Fdx = kxdx$
- Elastsusjõu töö lõplikul deformatsioonil ongi võrdne vedru deformatsioonil «tekkinud» potentsiaalse energiaga

$$U = W = \int_0^{x_1} dW = \int_0^{x_1} kxdx = \frac{kx_1^2}{2}. \tag{1.21}$$

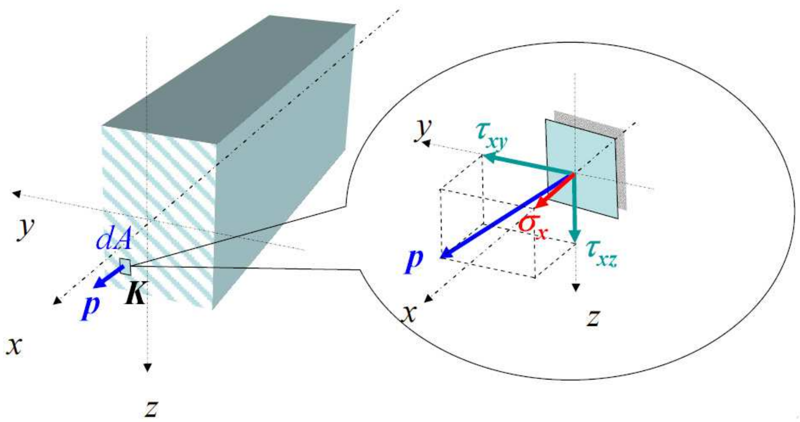
Analoogiliselt vedruga leitakse elastsel deformatsioonil akumuleeruvat energiat. Viimane esitatakse tavaliselt energia tihedusena. Näiteks

$$u_\sigma = \frac{dU}{dV} = E\frac{\varepsilon_x^2}{2} = \frac{\varepsilon_x\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2E}, \qquad u_\tau = \frac{dU}{dV} = G\frac{\gamma_{xy}^2}{2} = \frac{\gamma_{xy}\tau_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \tag{1.22}$$

ja summaarne deformatsioonienergia tihedus

$$u = u_\sigma + u_\tau. \tag{1.23}$$

Seos pingete ja sisejõudude vahel



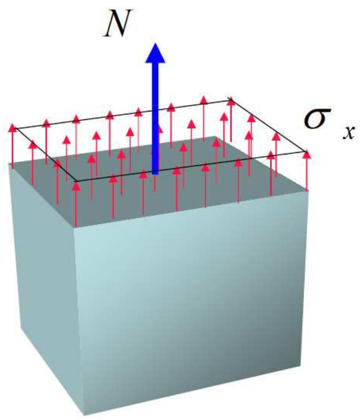
Joonis 1.25: Pinged varda ristlõike elementaarpinnal dA.
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

$$N = \int_A \sigma_x dA; \qquad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA; \qquad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA; \tag{1.24}$$

$$M_y = \int_A z\sigma_x dA; \qquad M_z = \int_A y\sigma_x dA; \qquad T = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy})dA. \tag{1.25}$$

Pikkepinge

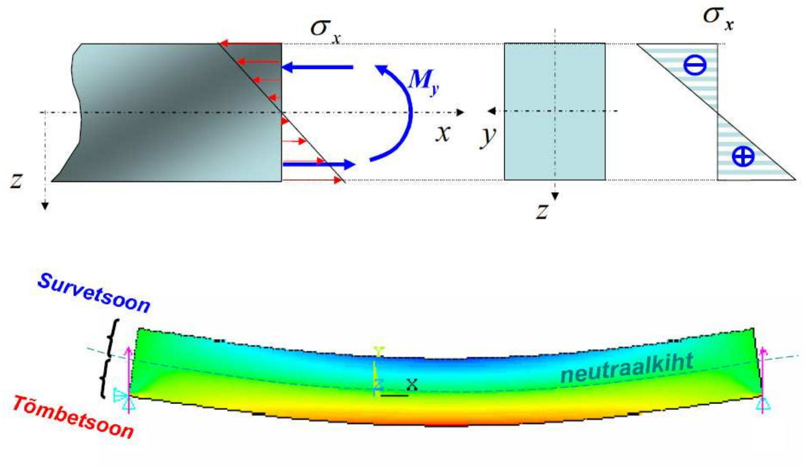
$$\sigma_x = \frac{N}{A} \tag{1.26}$$



Joonis 1.26: Pikkepinge
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Paindepinge

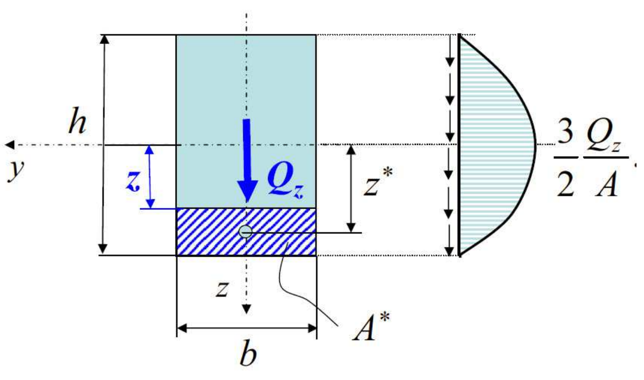
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \tag{1.27}$$



Joonis 1.27: Paindepinge
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

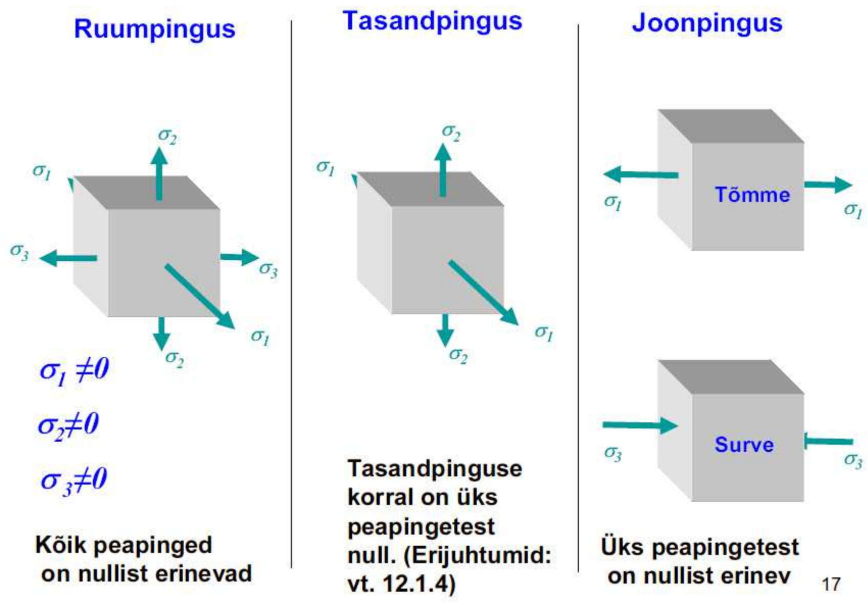
Nihkepinge ehk lõikepinge

$$\max \tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{A} \tag{1.28}$$



Joonis 1.28: Lõikepinge
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

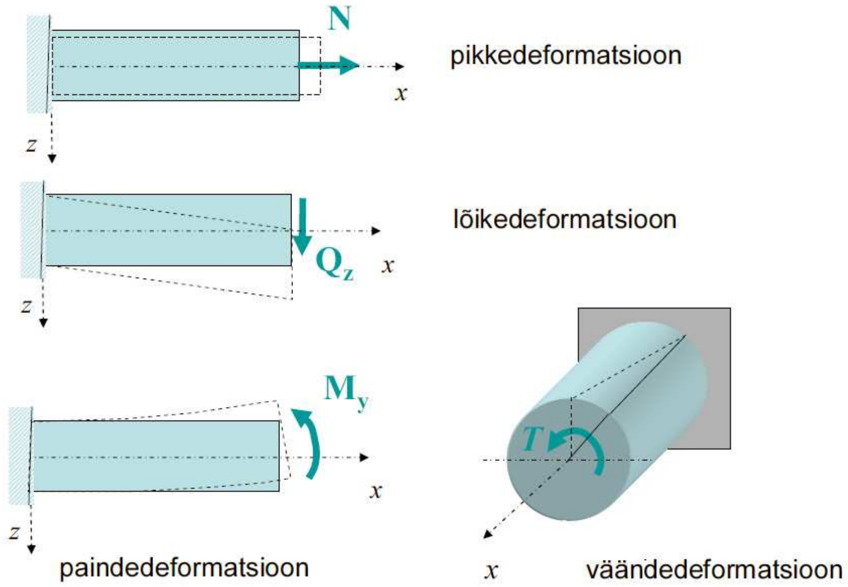
Pinguste liigid



Joonis 1.29: Pinguste liigid
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

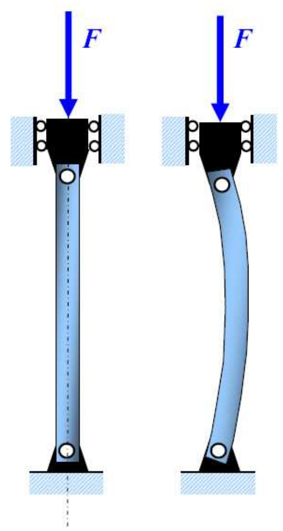
Varda põhideformatsioonid.

Erinevad sisejõud põhjustavad vardas erinevaid deformatsioone, siirdeid ja pöördeid.

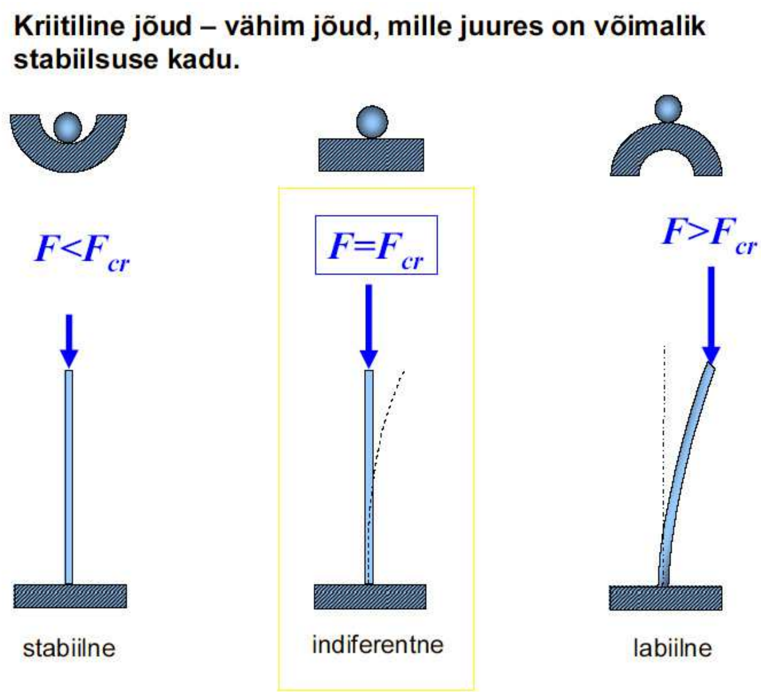


Joonis 1.30: Varda põhideformatsioonid
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Surutud sirge saleda varda stabiilsus.

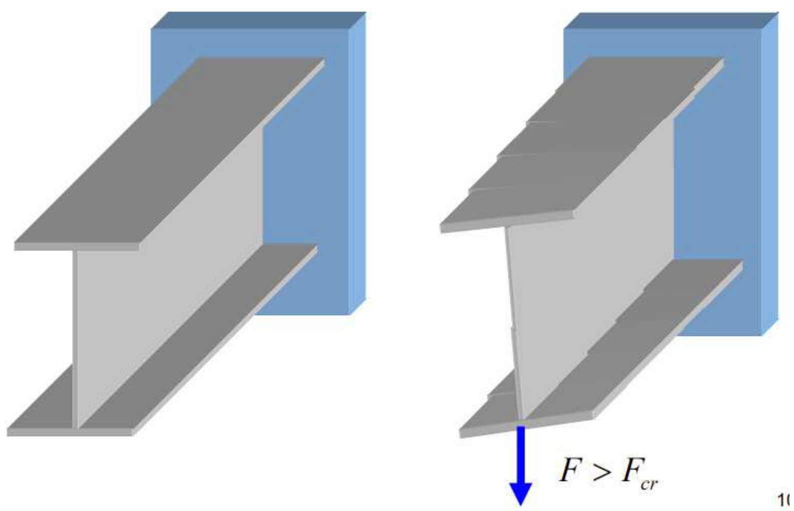


Joonis 1.31: Varda nõtke ja stabiilsuse kadu
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)



Joonis 1.32: Kriitiline jõud ja stabiilsuse kadu
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Stabiilsuse kadu paindel ja kiive



Joonis 1.33: Kiive
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Dünaamiline koormus

- Inertsjõud, D'Alembert'i printsiip, kvaasistaatilised ülesanded
- Võnkumine
- Löök

Alajaotuse 1.3 kokkuvõte

- Kuna tugevusõpetus põhineb lineaarsel elastsusteoorial, siis on neil kahel ainel väga palju ühist — materjalid on lineaarselt elastsed, homogeensed, isotroopsed; kehtib Saint Venant'i printsiip[2], jne.
- Teisest küljest on tugevusõpetuse puhul tegu maksimaalselt lihtsustatud teooriaga — seega leiavad paljud probleemid lineaarses elastsusteoorias käsitlemist vähem lihtsustatud kujul. Näiteks talade paine.
- Mõned järgnevates peatükkides uuritavad probleemid pole aga üldse tugevusõpetuse uurimisobjektiks, näiteks plaadid.

[2]Koormuse rakenduskohast piisavalt kaugel ei sõltu pinge koormuse iseloomust (rakendusviisist).

1.4 Elastsusteooria ülesanded

Elastsusteooria põhiülesandeks on elastses kehas välismõjude toimel tekkivate pingete ja deformatsioonide määramine.

- Elastsusteooria meetodid
  - võimaldavad lahendada ülesandeid, mida pole tugevusõpetuse meetoditega võimalik lahendada;
  - võimaldavad hinnata tugevusõpetuses saadud lahendite täpsust.
- Käesolevas kursuses vaadeldakse
  - välismõjudena vaid välisjõudusid;
  - lineaarset ehk klassikalist elastsusteooriat.
    - pingete ja deformatsioonide vahelised seosed on lineaarsed $\surd$
    - siirded (ehk paigutised) on väikesed võrreldes kehade joonmõõtmetega ning deformatsioonid (suhtelised pikenemised ja nihkenurgad) on väikesed võrreldes ühega.

1.5 Klassikalise elastsusteooria põhieeldused ja põhihüpoteesid

Uurimisobjekt: ideaalselt (täielikult) elastne keha.

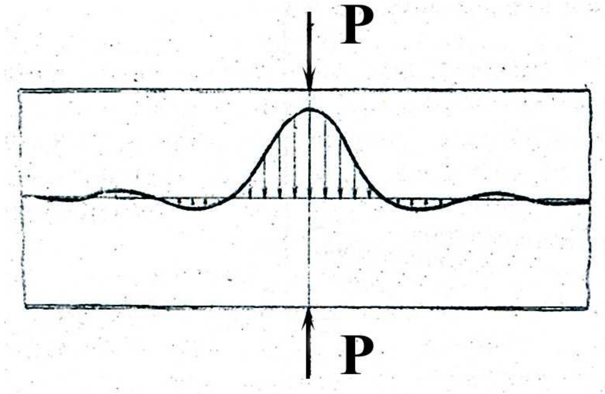
- *Ideaalselt elastne keha* taastab täielikult oma algse kuju ja mahu pärast välisjõudude mõju kõrvaldamist.
  - Defineeritakse nn. *algolek*: välisjõudude puudumisel puuduvad kehas pinged ja deformatsioonid.

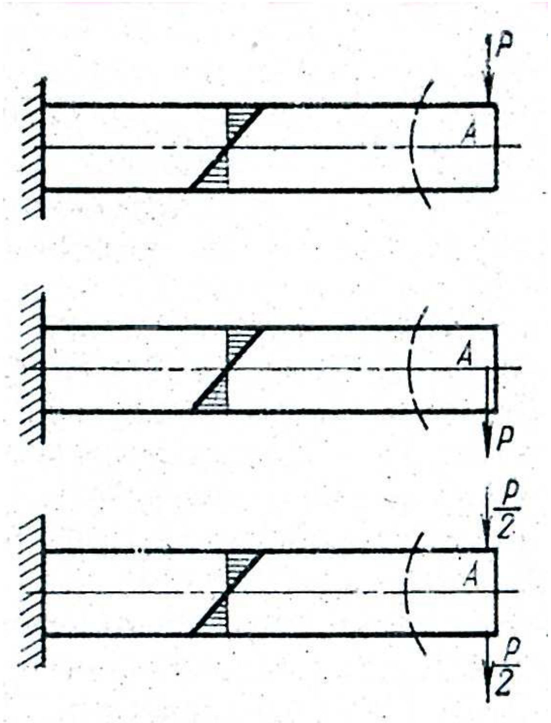
Hüpoteesid ja eeldused

- *Pidevuse hüpotees:* eeldame, et uuritavad tahked kehad koosnevad ainest, mis täidab ruumi pidevalt
  - Keha mistahes mahus puuduvad tühimikud või katkevused.
- Eeldatakse, et ideaalselt elastne keha on *homogeenne*.
  - Pinge – deformatsiooni seosed on kõigis keha punktides samad.

- Eeldatakse, et ideaalselt elastne keha on *isotroopne*.
  - Keha elastsed omadused on samad kõigis suundades.
- *Superpositsiooni printsiip* ehk *jõudude mõju sõltumatuse printsiip.*
  - Lineaarne teooria: lineaarsed seosed ja väikesed deformatsioonid
    - Selle asemel, et uurida jõusüsteemi tervikmõju kehale võib uurida iga üksikjõu mõju eraldi ja tulemused liita. Teisisõnu, lineaarses elastsusteoorias loetakse erinevate lahendite summa alati lahendiks.
- *Saint Venant'i printsiip.* Kaks sõnastust:
  1. Tasakaalus olevate jõudude rakendamine mingil väikesel keha osal kutsub esile vaid lokaalseid pingeid rakenduskoha lähiümbruses (Joon. 1.34).
  2. Koormuse rakenduspunktist piisavalt kaugel ei sõltu pinged oluliselt koormuse rakendusviisist, st. jaotusest keha pinnal .

a) b)





Joonis 1.34: Saint Venant'i printsiip: a) kahe taskaalus oleva jõu poolt põhjustatud normaalpingete epüür; b) kolm erineval jaotunud koormust, millel on sama peavektor.