

Tallinna Tehnikaülikool  
Mehaanikainstituut  
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

# Elastsusõpetus

(Lineaarne elastsusteooria)

Loengukonsept

Tallinn 2016

## Essõna

Käesolev loengukonsept on eeskätt mõeldud kasutamiseks Tallinna Tehnikaülikooli ehitusteaduskonna üliõpilastele elastsusõpetuse kursuse (EMD0020) õppimisel. 2009. aastal õpetati sama koodiga ainet lineaarse elastsusteooria nime all. Elastsusõpetuse programm (vt. [www.ioc.ee/~salupere/loko](http://www.ioc.ee/~salupere/loko)), kujutab endast antud loengukonsepti lahutamatu lisa. Seal on esitatud õppeaine eesmärgid, maht, eeldusained ja soovitatav kirjandus ning kirjeldatud antud aine õppimisel kehitud töökorraldust.

### *Märksused:*

1. Loengukonsept on internetis aadressil [www.ioc.ee/~salupere/loko](http://www.ioc.ee/~salupere/loko).
2. Loengukonsept pole mõeldud kasutamiseks iseseisva õpikuna. Seetõttu on õpitavast ainest tervikliku ülevaate saamiseks loengute külastamine ja vajalikus ulatuses konsepteerimine hädavajalik.

3. Teksti paremas servas olevad märgid (✓, ●, ✱ jne.) tähistavad kohti, kus loengus esitatakse olulisi selgitavaid märkusi.
4. Loengukonspetsi piset ebariitlik väljanägemine (kaks A5 lehekülge on paigutatud ühele A4 lehele) on tingitud praktilistest kaalutlustest. Loengutel näidatakse materjali A5 lehekülgede kaupa.
5. Vabandan juba ette tekstis esineda võivate trükkivigade pärast. Vastavasiselised märkused on terehlnud nii loengutes kui e-kiijade kujul aadressil [salupere@ioc.ee](mailto:salupere@ioc.ee).

Andrus Salupere

# Peatükk 1

## Sissejuhatus

## 1.1 Elastusteooria ehk elastsusõpetus

Katsed on näidanud, välismõjude (pindkoormused, massjõud, soojendamise, jahutamise) toimel võivad tahked kehad deformeeruda. Kui deformatsioonid ei üleata teatud piiri, siis välismõjude kõrvaldamisel keha taastab oma esialgse kuju. Sellist tahke keha omadust nimetatakse *elastsus*eks.

*Elastusteooria ehk elastsusõpetus* uurib elastsete kehade deformatsioone ja liikumist. Sõltuvalt välismõjude kõrvaldamise kiirusest võivad siin kaasneda teatud võnkumised. Kui deformatsioonid aga ületavad teatava piiri, siis keha algne kuju ei taastu täielikult — osa deformatsioone säilib. Neid jäävaid deformatsioone nimetatakse *plastseteks deformatsioonideks*.

*Elastusteooria* ülesandeks on määrata ja hinnata

- geomeetrilisi suurusi, mis iseloomustavad keha deformatsiooni: läbipaanded, siirded jne.;
- sisejõude ja pingeid, mis ilmnevad deformatsiooniprotsessis.

Selleks rakendatakse matemaatilisi meetodeid (matemaatiline analüüs, differentsiaalvõrrandite teooria jne.).

---

### 1.1. *Elastusteooria ehk elastsusõpetus*

Elastusteooria põhineb pideva keskkonna mehaanikal<sup>1</sup>. Seega on vaja sisse tuua või määrata:

- Pideva keskkonna mõiste.
- Sisejõudude ja deformatsioonide vahelised seosed ehk olekuvõrrandid (viimased määratakse eksperimentidest).
- Geomeetriselised suurused, mis kirjeldavad keha deformatsioone.
- Sisejõud ja nende seos välismõjudega.

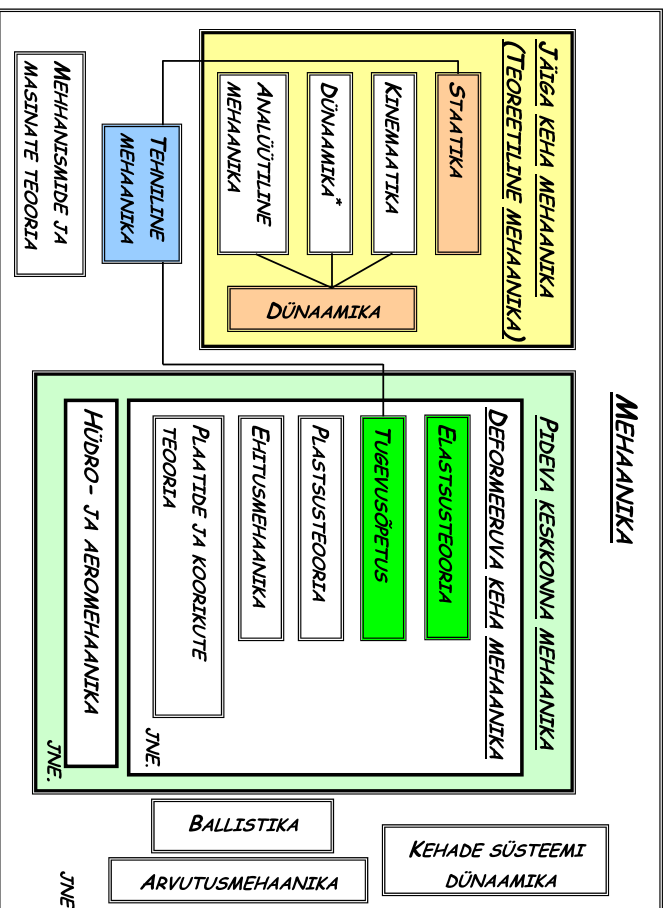
Käesoleva kursuse raames käsitletakse lineaarset elastusteooriat.

---

<sup>1</sup>Pideva keskkonna mehaanika uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimel.

## 1.2 Mehaanika harud

*Mehaanika* on teadus, mis uurib tahkete kehade, vedelike ja gaaside liikumist, selle liikumise põhjusi ja tagajärgi.



Joonis 1.1: Mehaanika harud

### 1.2.1 Jäiga keha mehaanika

*Teoreetiline mehaanika* ehk absoluutselt jäiga keha mehaanika uurib absoluutselt jäikade kehade liikumist ja paigalseisu neile rakendatud jõudude toimel.

*Absoluutselt jäiga* keha mistahes kahe punkti vaheline kaugus on konstantne.

Laias laastus võib teoreetilise mehaanika jagada *staatikaks*, *kinemaatikaks* ja *dünaamikaks*.

- *Staatika* uurib:

1. kehade tasakaalu (täpsemalt öeldes kehadele rakendatud jõusüsteemide tasakaalu) ja

2. jõusüsteemide lihtsustamist ehk taandamist.

- *Kinemaatika* uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
- *Klassikaline dünaamika* uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimel.

*Liikumisena* ehk mehaanikalise liikumisena mõistetakse vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes. Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega järgalt koordinaatsüsteem. Tulenust nimetatakse *taustsüsteemiks*.

*Punktmassiks* nimetatakse materiaalselt keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.

*Aeg* loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.

## 1.2. Mehaanika harud

## 1 - 7

### 1.2.2 Pideva keskkonna mehaanika

*Pideva keskkonna mehaanika* (PKM) uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimel.

**JÄIGA KEHA MEHAANIKA**  
**UURIB PUNKTMASSIDE JA**  
**ABSOLUUTSELT JÄIKADE KEHADE**  
**LIIKUMIST (JA PAIGALSEISU)**  
**NEILE MÕJUVATE JÕUDUDE**  
**TOIMEL.**  
**ABSOLUUTSELT JÄIK KEHA**  
**LIIKUMINE**  
**JÕUD**  
**NEWTONI SEADUSED**

**PIDEVA KESKKONNA MEHAANIKA**  
**UURIB TAHKISTE,**  
**VEDELIKE JA GAASIDE LIIKUMIST**  
**VÄLISMÕJUDE TOIMEL.**  
**DEFORMEERUV KESKKOND (KEHA)**  
**LIIKUMINE**  
**VÄLISMÕJUD**  
**NEWTONI SEADUSED**

Joonis 1.2: Jäiga keha ja pideva keskkonna mehaanika võrdlus

Palju harusid

- tahkise (deformeeruva keha) mehaanika
  - tugevusõpetus
  - elastsusteooria
  - plastusteooria
  - jne.
- hüdro- ja aeromehaanika
  - hüdrostaatika
  - hüdrodinaamika
  - jne.

### 1.2.3 Tehniline mehaanika

Tehniline mehaanika = staatika + tugevusõpetus.

*Tugevusõpetus* on mehaanika haru, mis uurib konstruktsioonelementide piisava tugevuse, jäikuse ja stabiilsuse saavutamist võimalikult ökonoomsel moel.

---

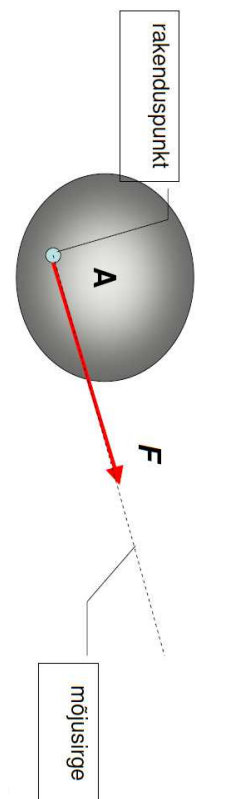
#### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

1 - 9

## 1.3 Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

Täpsema ülevaate saamiseks on soovitatav lugeda professor Aleksander Klausoni loengukonspekte.

### 1.3.1 Staatika



Joonis 1.3: Jõud ja jõu mõjusirge

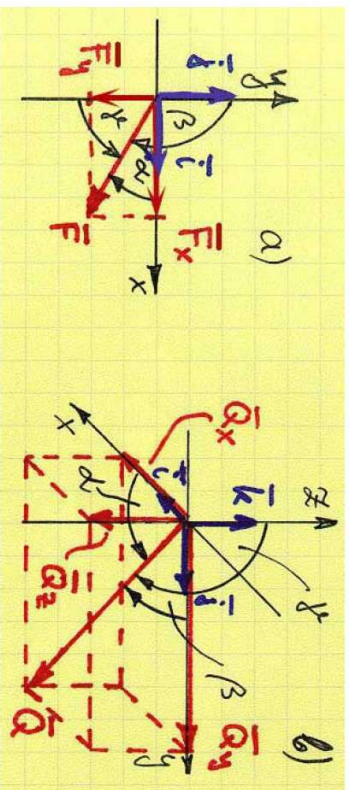
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

*Jõud* on kehade vastastikuse mõju mõõt. *Jõud on vektorialne suurus*. Jäiga keha mehaanikas (k.a. staatikas) on *jõud libisev vektor*. Teisisõnu, jäiga keha mehaanikas võib lugeda jõudu rakendatruks oma mõjusirge mistahes punkti.

*Jõusüsteem* on kehale mõjuvate jõudude kogum.

*Jõu projektsioon* on skalaar: kui  $\mathbf{i}$  on  $x$  telje suunaline ühikvektor, siis projektsioon  $F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = F \cos \alpha$ .

*Jõu komponent* on vektor:  $\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i}$ .



Joonis 1.4: Jõu projektsioonid ja jõu komponendid.

*Vabaks kehaks* nimetatakse keha, mille liikumist ei piira mitte ükski tingimus. Vaba keha saab artnud asendist üle viia mistahes uude asendisse.

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrrandidest

*Side* on keha liikumist kitsendav tingimus. Tavaliselt moodustab sideme mingi teine keha.

*Sidemereaktsioon ehk reaktsioonjõud* on jõud, millega sidet moodustav keha mõjub vaadeldavale kehale.

Inseneriülesannete puhul nimetatakse sidemeid tihti ka *tugedeks* ja vastavaid reaktsioonjõudusid *toereaktsioonideks*.

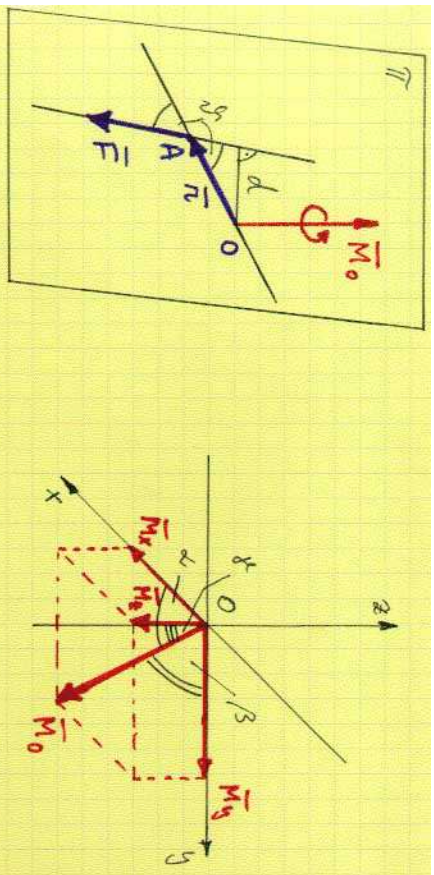
*Sidemetest vabastatawuse printsiip*: Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega.

*Sidemete tüübid*: sile pind, kare pind, liikumatu liigend(tugi), liikuv liigend(tugi), kerge varras, painduv ühendus jne.

*Jõu momentideks punkti suhtes* nimetatakse vektorit, mis võrdub jõu rakenduspunkti  $A$  kohavektori  $\mathbf{r}$  ja jõuvektori  $\mathbf{F}$  vektorikorrutisega.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M_O \equiv |\mathbf{M}_O| = Fr \sin \vartheta = Fd. \quad (1.1)$$

*Jõu moment iseloomustab jõu pööravat toimet.*



Joonis 1.5: Jõu moment punkti suhtes.

Momentvektori  $\mathbf{M}_O$  suurus (ehk moodul) ja suund sõltub punkti  $O$  valikust kuid ei sõltu punkti  $A$  valikust jõu mõjusirgel.

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest

Momentvektori  $\mathbf{M}_O$  mõjusirge määrab telje, mille ümber jõud  $\mathbf{F}$  püüab tekitada pöörlemist.

Pöörde suund määratakse *kruuvireeglga* — kui (parema käe) kruvi teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga, siis keha pöörlemise suund ühtib kruvi pöörlemise suunaga. Ja vastupidi, kui kruvi pöörata keha pöörlemise suunas, siis tema teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga.

*Jõu moment telje suhtes* võrdub selle telje mistahes punkti suhtes leitud momentvektori projektsiooniga vaadeldaval teljel.

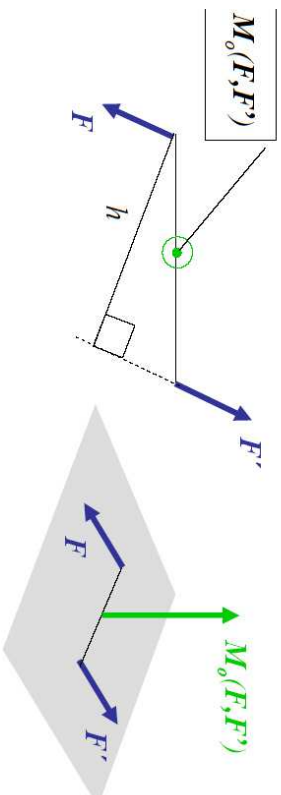
- See on eestikeelses kirjanduses levinud määratlus ja selle põhjal on tegu skalaariga. Tegelikult on ka jõu momenti telje suhtes mõistlik käsitleda vektorina.
- Praktikas leitakse moment valemist  $M = \pm Fd$ , s.t. jõud korda jõu õlg, ning märk määratakse kruvireeglga.

✓



*Jõupaari* moodustavad kaks võrdvastupidist jõudu  $\mathbf{F}$  ja  $-\mathbf{F}$  millel on erinev mõjusirge.

*Jõupaari moment* võrdub ilhe jõupaari moodustava jõu momendiga teise rakenduspunkti suhtes. Jõupaari moment on *vabavektor*.



Jõupaari moment on *vabavektor*, mille moodul  $M=Fh$ , kus  $h$  on jõupaari õlg.

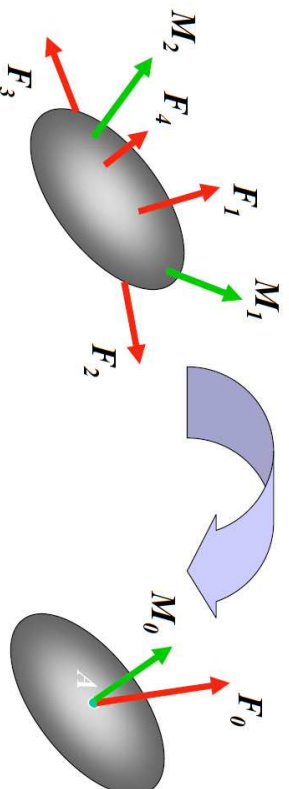
Joonis 1.6: Jõupaar ja jõupaari moment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest

*Lemmas jõu paralleellikkusest*. Jäiga keha mistahes punktis  $A$  rakendatud jõu võib paralleelselt tema mõjusirgega üle kanda uude rakenduspunkti  $B$  kui lisada punktis  $A$  rakendatud jõu moment punkti  $B$  suhtes.

*Staatika põhiteoreem (Poinsoi' teoreem)*: Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab asendada taandamistsentrisse rakendatud jõusüsteemi peavektoriga ja jõusüsteemi peamomendiga taandamistsentri suhtes.



Joonis 1.7: Jõusüsteemi peavektor ja peamoment.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

Jõusüsteemi peavektor:  $\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$

Jõusüsteemi peamoment:  $M_O = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i)$ , kus punkti  $O$  nimetatakse *taandamisentsentriks*. (Joonisel on kahjuks  $O$  asemel  $A$ .)

*Jõusüsteem on tasakaalus* parajasti siis kui peavektor  $\mathbf{F}_O$  ja mingi punkti  $O$  suhtes leitud peamoment  $M_O$  on võrdsed nulliga:

$$\mathbf{F}_O = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad M_O = \sum_i M_O(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (1.2)$$

*Skalaarsed tasakaalu tingimused:*

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & \sum_i F_{iy} = 0, & \sum_i F_{iz} = 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

---

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest

*Tasapinnaline jõusüsteem*

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{Oz}(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (1.4)$$

Alternatiivsed võrrandid

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (1.5)$$

või

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (1.6)$$

või

$$\sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Cz}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad (1.7)$$

kus punktid  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ei asetse samal sirgel.

**Staatiliselt määratud ja staatiliselt määramata ülesanded:**

Kui on võimalik koostada nii sama palju tasakaaluvõrrandeid kui palju on tundmatuid toereaktsioone, siis on tegu *staatiliselt määratud ülesandega*. Vastupidisel juhul on tegu *staatiliselt määramata ülesandega*.

Mitmetes õpikutes kasutatakse antud kontekstis ka termineid *staatikaga määratud ülesanded* ja *staatikaga määramata ülesanded*.

**Raskuskese**

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int_V \mathbf{r} dV}{V}. \quad (1.8)$$

Skalaarkujul

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \quad (1.9)$$

**Masskese:** sarnased valemid, kuid  $V \rightarrow m$

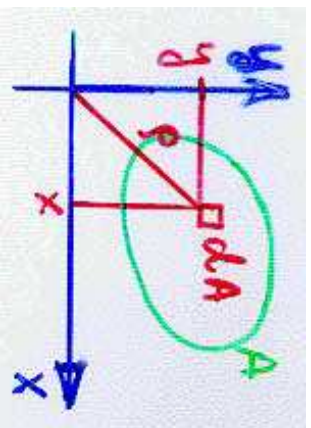
**Pinnakese:** sarnased valemid, kuid  $V \rightarrow A$

**1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest****Pinnamomendid.**

$n + m$  astme pinnamoment

$$\int_A x^m y^n dA \quad (1.10)$$

Nullastme pinnamoment — pindala:

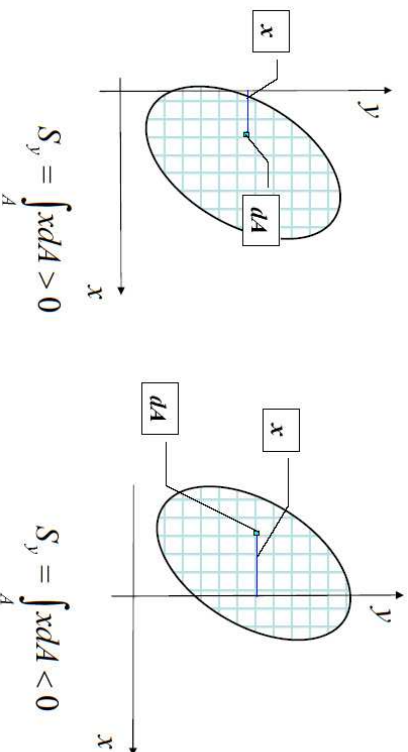


Joonis 1.8: Tasapinnalise kujundi pinnamomendid.

$$A = \int_A dA. \quad (1.11)$$

*Esimese astme pinnamomendid — staatilised momendid:*

$$S_x = \int_A y dA \quad S_y = \int_A x dA. \quad (1.12)$$



Joonis 1.9: Staatile moment.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest

*Teise astme pinnamomendid — inertsimomendid:*

*telginertsimomendid*

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad (1.13)$$

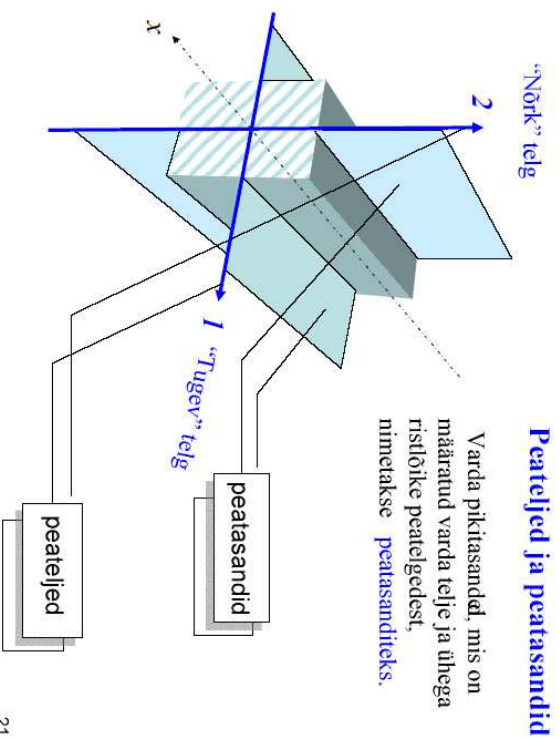
*polaarinertsimoment*

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA; \quad (1.14)$$

*tsentrifugaalinertsimoment*

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (1.15)$$

### Ristlõike keskteljed ja peatteljed. Peaimertsimomendid. Peatasandid.



21

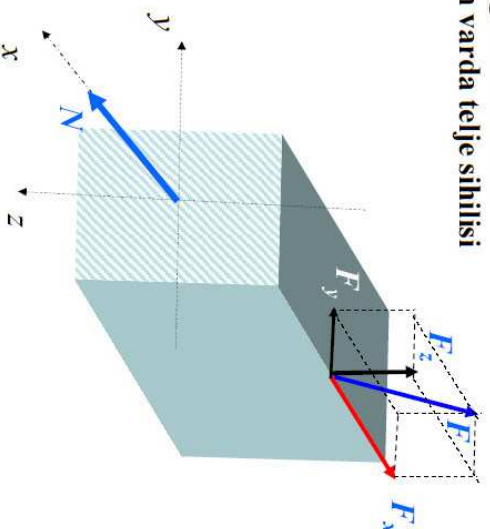
Joonis 1.10: Ristlõige.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

### 1.3.2 Tugevusõpetus

*Sisejõud:* pikijõud, väändemoment, põikjõud, paindemoment.

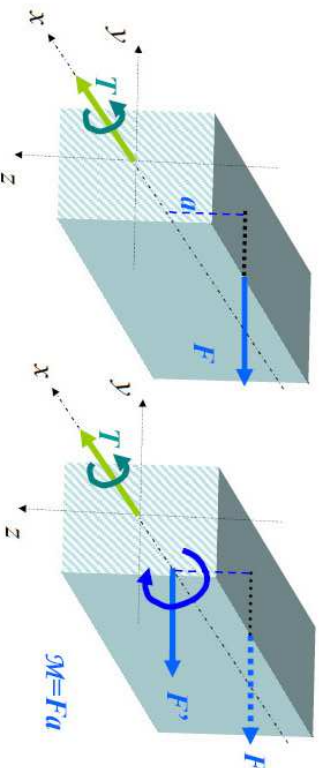
Pikijõud varda ristlõikes tekib siis, kui ühel pool lõiget rakendatud välisjõududel on varda telje sihilisi komponente.



Joonis 1.11: Pikijõud

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

Väändmoment  $T$  varda risttõikes tekib siis, kui mõnel tihel pool lõiget rakendatud välisjõul on varda  $x$ -telje suhtes õig.



Taandades välisjõu  $F$  varda  $x$ -teljele saame välisjõu  $F'$  ja pöördemomendi  $M$ .

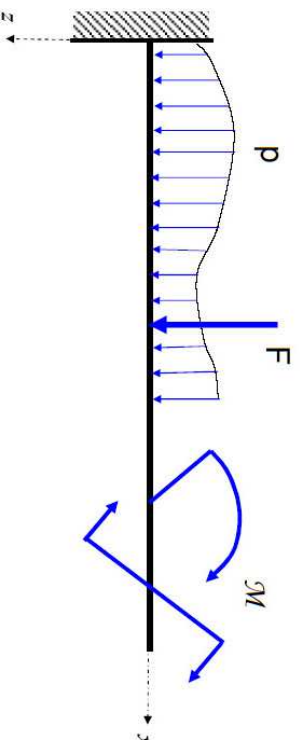
15

Joonis 1.12: Väändmoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrrandidest

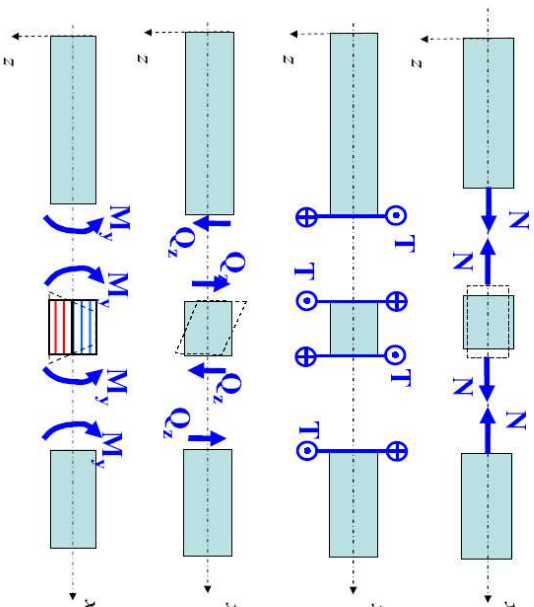
Vaatleme vardale ühes peatasandis (näiteks  $xz$ -tasandis) rakendatud koormust, mis koosneb teljega risti suunatud jõududest ja jõupaaridest.



Joonis 1.13: Põlkiõud ja paindemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

Varda sisejõu märgireeglid (sisejõudude positiivsed suunad).



2

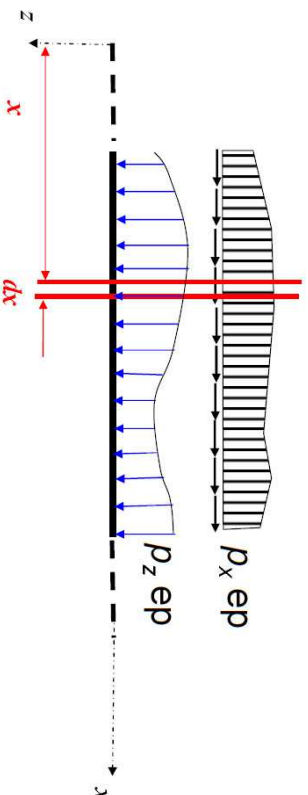
Joonis 1.14: Sisejõudude märgireeglid.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest

1 - 27

*Diferentsiaal- ja integraalsesed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel*



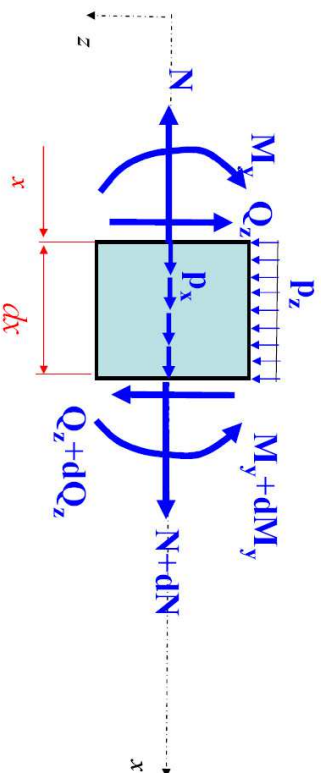
Joonis 1.15: Diferentsiaal- ja integraalsesed — lauskoormuse intensiivsus

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

$$\frac{dN}{dx} = N' = -p_x, \quad N(x) = N(a) - \int_a^x p_x(x) dx, \quad (1.16)$$

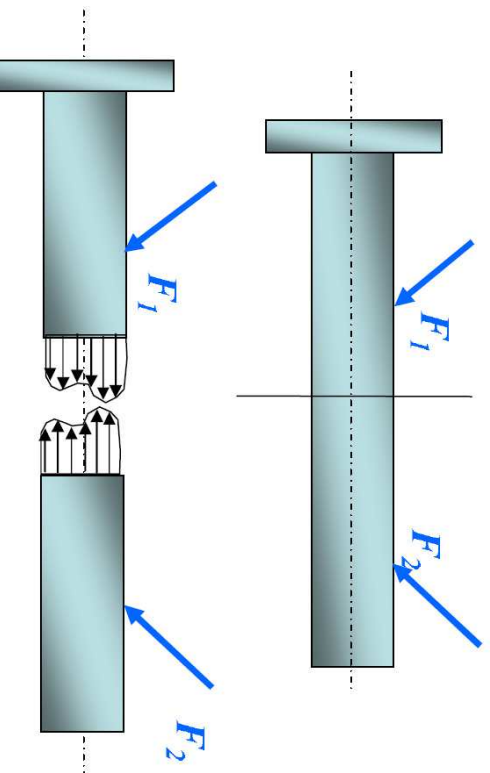
$$\frac{dQ_z}{dx} = Q'_z = -p_z, \quad Q_z(x) = Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx, \quad (1.17)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = M'_y = Q_z, \quad M_y(x) = M_y(a) - \int_a^x Q_z(x) dx. \quad (1.18)$$



Joonis 1.16: Diferentsiaal- ja integraalseosed — sisejõud  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### Lõikemetod, pinged varda ristlõikes

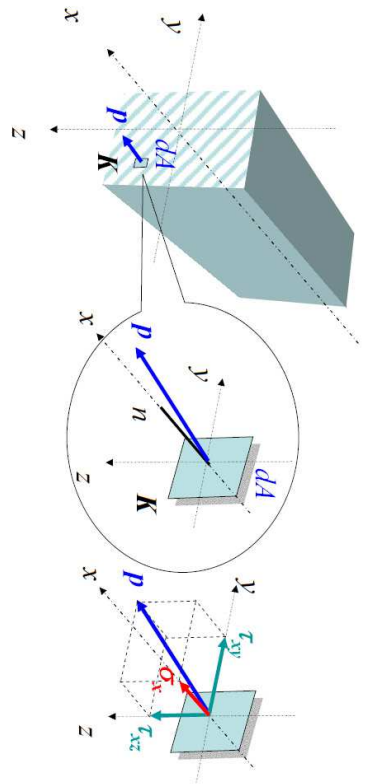


Joonis 1.17: Lõikemetod ja pinged varda ristlõikes  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)



*Pinged varda punktis.* Vaatleme varda punkti  $K$ , mida läbib pind normaaliga  $\mathbf{n}$ . Seal mõjub pingevektor  $\mathbf{p}$ . Viimane omab normaalkomponenti  $\sigma_x$  ja tangentsiaalkomponente  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$ .

- $\sigma_x$  — normaalpinge — märgireegel analoogne pikijõuga
- $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  — nihkepinge ehk tangentsiaalpinge — märgireegel analoogne pöikjõuga



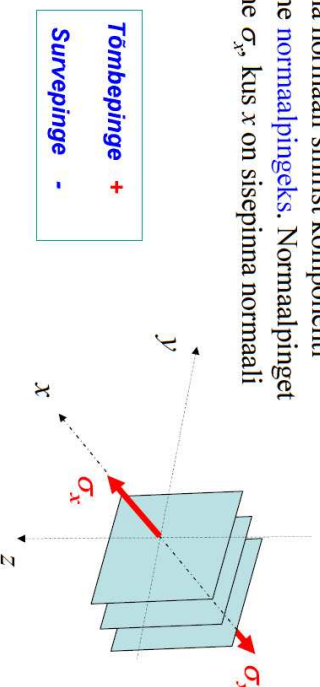
Joonis 1.18: Pinge varda punktis

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest

#### Normaalpinge $\sigma$

Sisepinna normaali sihilist komponenti nimetame **normaalpingeks**. Normaalpinget tähistame  $\sigma_x$ , kus  $x$  on sisepinna normaali siht.

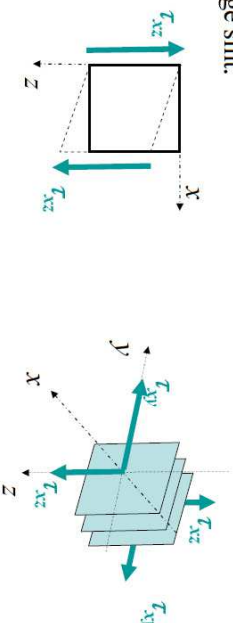


Joonis 1.19: Normaalpinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

### Tangentsiaalpinge $\tau$

Sisepinna puutuja sihtisi komponente nimetame tangentsiaalpingeteks. Tangentsiaalpinget tähistame  $\tau_{xy}$ , kus  $x$  on sisepinna normaali siht ja  $y$  – pinge siht.



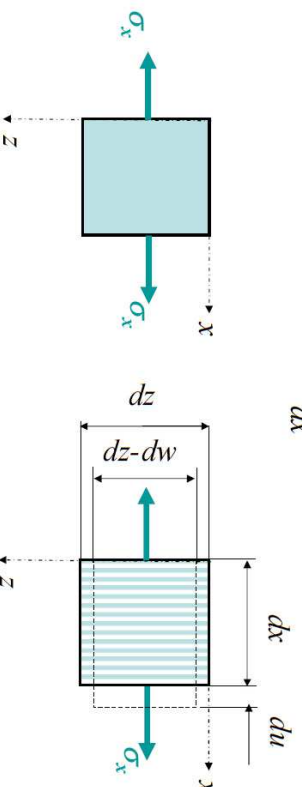
Tangentsiaalpinge (nihkepinge) iseloomustab jõudude intensiivsus, mis püütavad sisepinnaga paralleelseid materjalikihte omavahel nihutada. Positiivne nihkepinge mõjub positiivsel sisepinnal telgede positiivses suunas. Joonisel on toodud positiivsed nihkepinged.

Joonis 1.20: Nihkepinge ehk tangentsiaalpinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

### Normaaldeformatsioon (normaalmoone)

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$



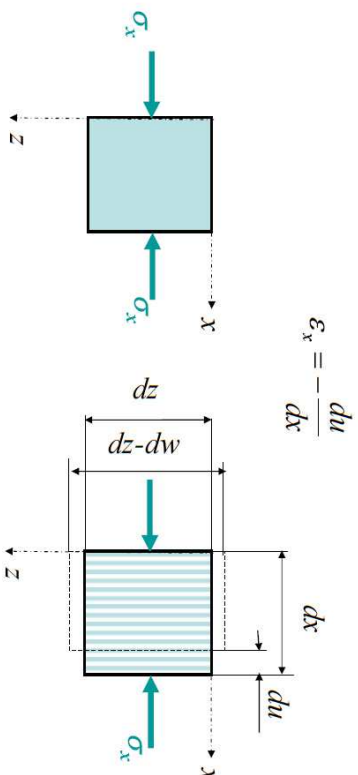
Tõmbel kaasneb pikideformatsiooniga vastasmärgiline põikideformatsioon:

$$\varepsilon_z = -\frac{dw}{dz}$$

~

Joonis 1.21: Normaaldeformatsioon:  $\sigma > 0$

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)



Survel pikideformatsiooniga kaasneb vastasmärgiline põikideformatsioon:

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}$$

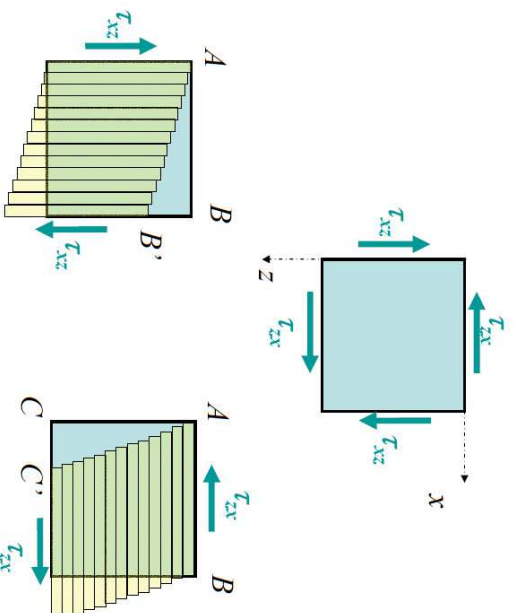
Joonis 1.22: Normaaldeformatsioon:  $\sigma < 0$

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest

1 - 35

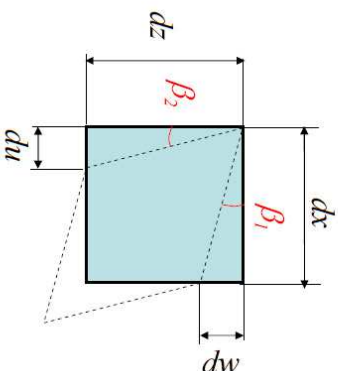
### Nihkedeformatsioon ehk nihe ehk nihkemoone



Joonis 1.23: Nihkedeformatsioon

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

Kuna tangentsiaalpinged  $\tau_{xz}$  ja  $\tau_{zx}$  mõjuvad ainult koos, siis kirjeldatakse elementaarriistahuka kogu deformatsiooni osaniliete summamana:



$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \omega_{xz} + \omega_{zx} = \tan \beta_1 + \tan \beta_2 = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \approx \beta_1 + \beta_2$$

See summa on suhteline nihkedeformatsioon ehk nihkemoone.

Joonis 1.24: Nihkedeformatsioon

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest

#### Elastsuskonstandid:

- $E$  — Youngi moodul ehk (normaal)elastsusmoodul;
- $G$  — nihkeelastsusmoodul;
- $\nu$  — Poissoni tegur;
- 

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.19)$$

#### Pingete ja deformatsioonide (moonete) vahelised seosed:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \dots, \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x \quad (1.20)$$

### Deformatsioonenergia

Vaatleme vedru, mille elastsusjõu moodul  $F = kx$ .

- Elastsusjõu elementaartöö  $dW = F dx = kx dx$
- Elastsusjõu töö lõplikul deformatsioonil ongi võrdne vedru deformatsioonil «tekkimud» potentsiaalse energiaga

$$U = W = \int_0^{x_1} dW = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{kx_1^2}{2}. \quad (1.21)$$

Analoogiliselt vedruga leitakse elastsel deformatsioonil akumuleeruvat energiat. Viimane esitatakse tavaliselt energia tihedusena. Näiteks

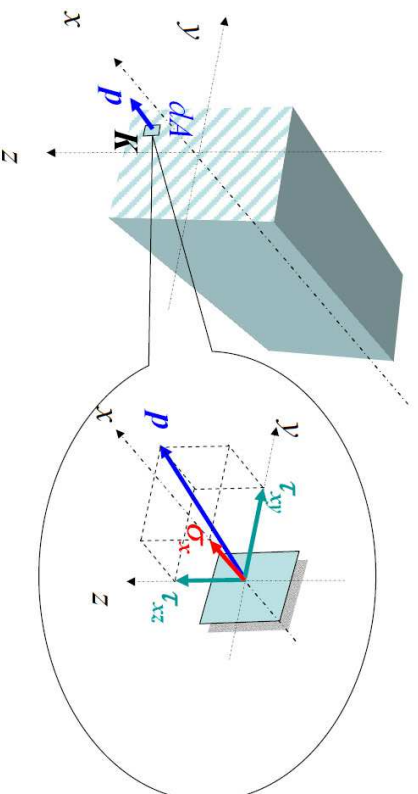
$$u_\sigma = \frac{dU}{dV} = E \frac{\varepsilon_x^2}{2} = \frac{\varepsilon_x \sigma_x}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2E}, \quad u_\tau = \frac{dU}{dV} = G \frac{\gamma_{xy}^2}{2} = \frac{\gamma_{xy} \tau_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \quad (1.22)$$

ja summaarne deformatsioonenergia tihedus

$$u = u_\sigma + u_\tau. \quad (1.23)$$

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrrandidest

### Seos pingete ja sisejõudude vahel



Joonis 1.25: Pinged yarda ristlõike elementaarpinnal  $dA$ .  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

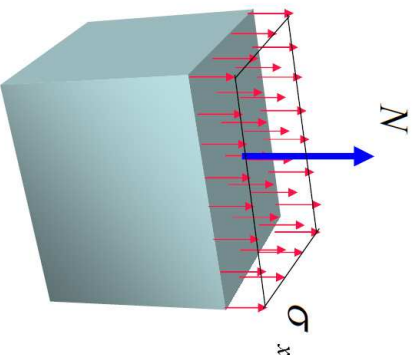
$$N = \int_A \sigma_x dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA; \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA; \quad (1.24)$$

$$M_y = \int_A z \sigma_x dA; \quad M_z = \int_A y \sigma_x dA; \quad T = \int_A (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA. \quad (1.25)$$

### Pikkeping

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

(1.26)



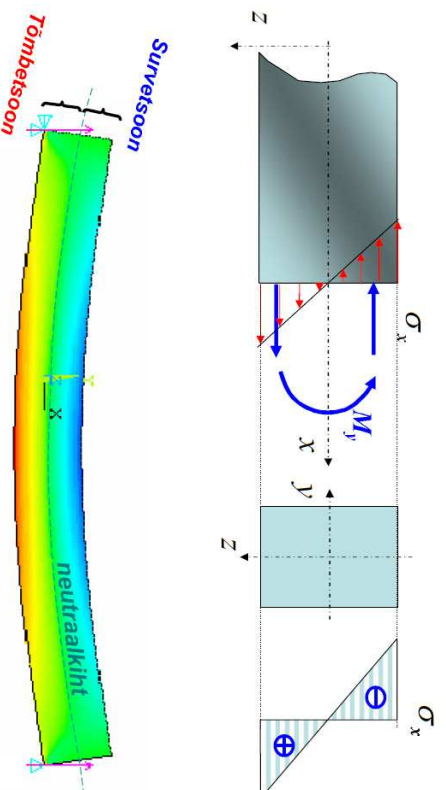
Joonis 1.26: Pikkeping

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### Paindepinge

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}$$

(1.27)



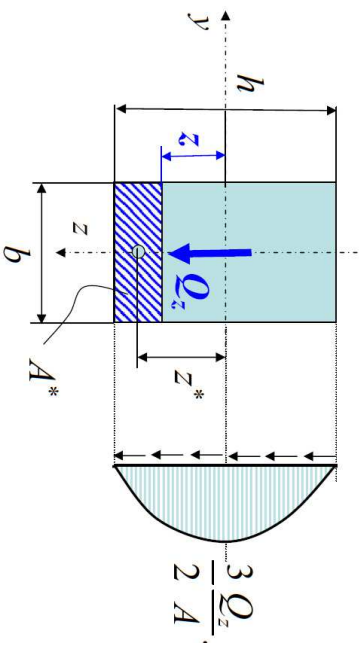
Joonis 1.27: Paindepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### Nihkepinge ehk lõikepinge

$$\max \tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A}$$

(1.28)

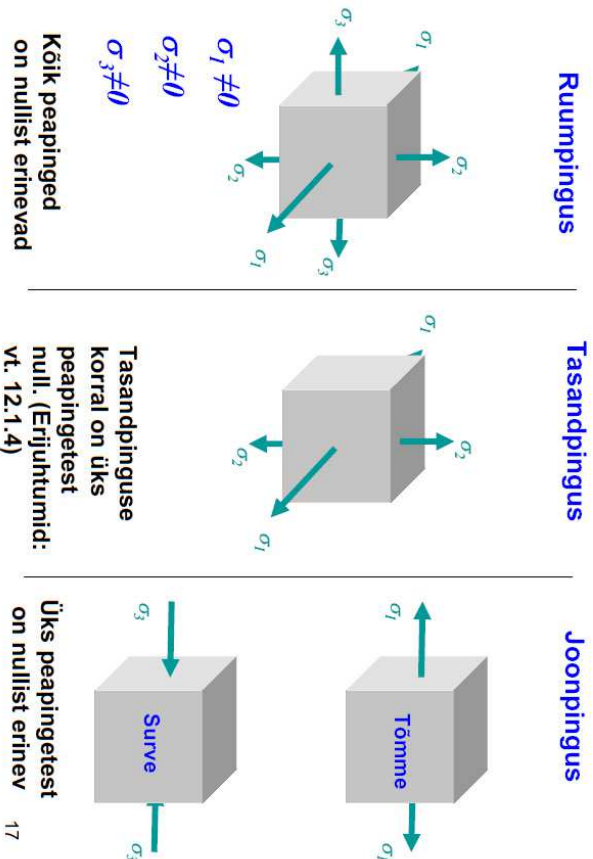


Joonis 1.28: Lõikepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest

### Pinguste liigid

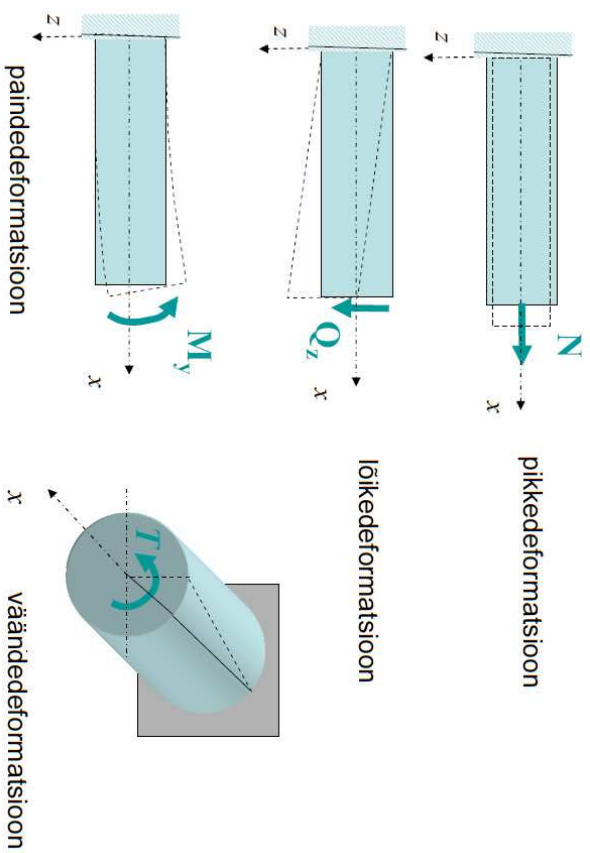


Joonis 1.29: Pinguste liigid

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

### Varda põhideformatsioonid.

Erinevad sisejõud põhjustavad vardas erinevaid deformatsioone, siirdeid ja pööreid.

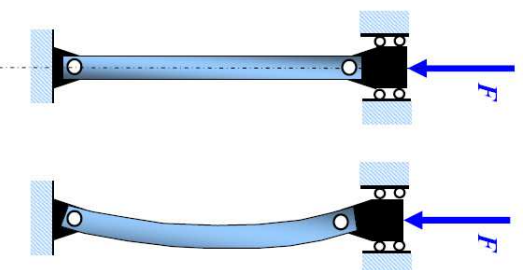


Joonis 1.30: Varda põhideformatsioonid

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

### 1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrranditest

### Surutud sirge saleda varda stabiilsus.

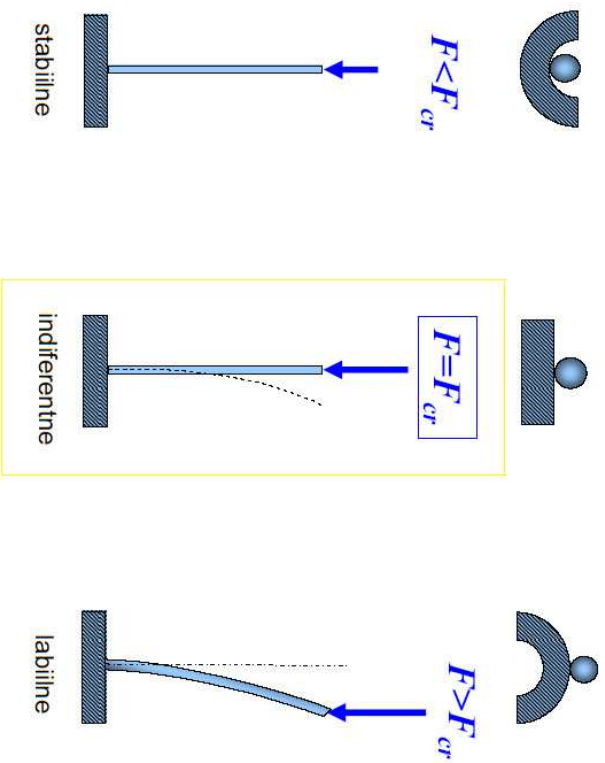


Joonis 1.31: Varda nõtkke ja stabiilsuse kadu

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)



**Kriitiline jõud – vähim jõud, mille juures on võimalik stabiilsuse kadu.**

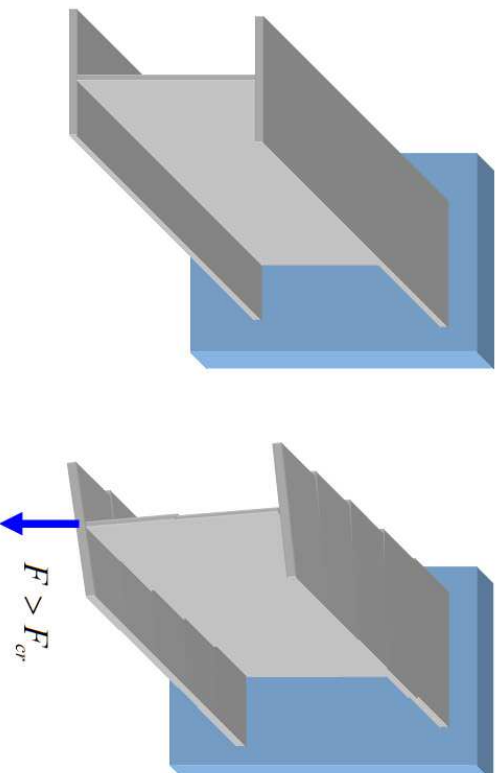


Joonis 1.32: Kriitiline jõud ja stabiilsuse kadu

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

1.3. Ülevaade tehnilise mehaanika põhimõtetest, hüpoteesidest ja võrrandidest

*Stabiilsuse kadu paindel ja kiive*



Joonis 1.33: Kiive

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

## Dünaamiline koormus

- Inertsjõud, D'Alembert'i printsiip, kvaasistaatilised ülesanded
- Võnkumine
- Löök

## Alajaotuse 1.3 kokkuvõte

- Kuna tugevusõpetus põhineb lineaarsel elastsusteoorial, siis on neil kahel ainel väga palju ühist — materjalid on lineaarselt elastsed, homogensed, isotroopsed; kehtib Saint Venant'i printsiip<sup>2</sup>, jne.
- Teisest küljest on tugevusõpetuse puhul tegu maksimaalselt lihtsustatud teooriaga — seega leiavad paljud probleemid lineaarses elastsusteoorias käsitlemist vähem lihtsustatud kujul. Näiteks talade paine.
- Mõned järgnevatel peatükkides uuritavad probleemid pole aga üldse tugevusõpetuse uurimisobjektiks, näiteks plaadid.

---

<sup>2</sup>Koormuse rakenduskoolest piisavalt kaugel ei sõltnu pinge koormuse iseloomust (rakendusviisist).

## 1.4. Elastsusteooria ülesanded

1 - 49

### 1.4 Elastsusteooria ülesanded

*Elastsusteooria põhivõttes* on elastses kehas välismõjude toimel tekkivate pingete ja deformatsioonide määramine.

- Elastsusteooria meetodid
  - võimaldavad lahendada ülesandeid, mida pole tugevusõpetuse meetoditega võimalik lahendada;
  - võimaldavad hinnata tugevusõpetuses saadud lahendite täpsust.
- Käesolevas kursuses vaadeldakse
  - välismõjudega vaid välisjõudusid;
  - lineaarset ehk klassikalist elastsusteooriat.
    - \* pingete ja deformatsioonide vahelised seosed on lineaarsed
    - \* siirded (ehk paigutised) on väikesed võrreldes kehade joonmõõtmetega ning deformatsioonid (suhtelised pikenedused ja nihkenurgad) on väikesed võrreldes ühega.

✓

## 1.5 Klassikalise elastsusteooria põhieeldused ja põhihüpoteesid

*Uurimisobjekt:* ideaalselt (täielikult) elastne keha.

- *Ideaalselt elastne keha* taastab täielikult oma algse kuju ja mahu pärast välisjõudude mõju kõrvaldamist.
  - Defneeritakse nn. *algolek:* välisjõudude puudumisel puuduvad kehas pinged ja deformatsioonid.

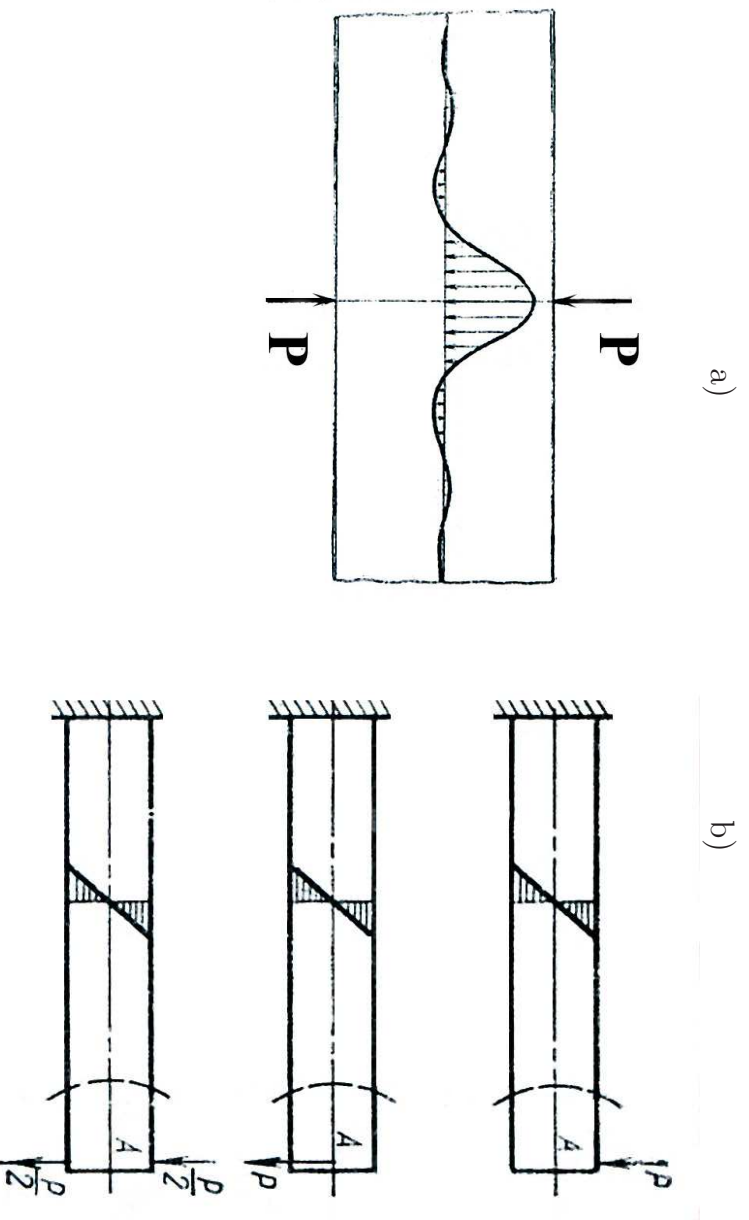
### *Hüpoteesid ja eeldused*

- *Pidevuse hüpotees:* eeldame, et uuritavad tahked kehad koosnevad aimest, mis täidab ruumi pidevalt
  - Keha mistahes mahus puuduvad tühimikud või katkevused.
- Eeldatakse, et ideaalselt elastne keha on *homogeenne*.
  - Pinge – deformatsiooni seosed on kõigis keha punktides samad.

---

### 1.5. Klassikalise elastsusteooria põhieeldused ja põhihüpoteesid

- Eeldatakse, et ideaalselt elastne keha on *isotroopne*.
  - Keha elastsed omadused on samad kõigis suundades.
- *Superpositsiooni printsiip* ehk *jõudude mõju sõltumatuse printsiip*.
  - Lineaarne teooria: lineaarsed seosed ja väikesed deformatsioonid
    - \* Selle asemel, et uurida jõusüsteemi tervikmõju kehale võib uurida iga üksikjõu mõju eraldi ja tulemused liita. Teisisõnu, lineaarses elastsusteoorias loetakse erinevate lahendite summa alati lahendiks.
- *Saint Venant'i printsiip*. Kaks sõnastust:
  1. Tasakaalus olevate jõudude rakendamise mingil väikesel keha osal kutsu sub esile vaid lokaalseid pingeid rakenduskoha lähiumbruses (Joon. 1.34).
  2. Koormuse rakenduspunktit piisavalt kaugel ei sõltu pinged oluliselt koormuse rakendusviisist, st. jaotusest keha pinnal .



Joonis 1.34: Saint Venant'i printsiip: a) kahe taskaalus oleva jõu poolt põhjustatud normaalpingete epiüür; b) kolm erinevat jaotunud koormust, millel on sama peavektor.