

Peatükk 2

Skalaar, vektor, tensor

2.1. Sissejuhatus

2 - 2

2.1 Sissejuhatus

Skalaar

- Üks arv, mille väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi (baasi) valikust
- Tüüpiline näide — temperatuur

Vektor

- Füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuse on tähtis ka suund.
- Tüüpilised näited — jõud, kiirus, kiirendus.
- 3D juhul esitatav arvukolmikuna — 3×1 või 1×3 maatriksina.
 - Arvud arvukolmikus sõltuvad baasi valikust.
 - Vektori moodul ja suund on baasist sõltumatu.

Tensor

- Teist järku tensor on füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuste on tähtsad kaks suunda.
- Tüüpilised näited — pingetensor, deformatsioonitensor.
- 3D juhul esitatav 9 arvu abil — 3×3 maatriksina.
 - Arvud maatriksis sõltuvad baasi valikust.
 - Tensor ise on baasist sõltumatu.
- Teisest küljest (“matemaatiliselt”) on teist järku tensor \mathbf{T} defineeritud kui lineaarteisendus, mis kujutab vektori \mathbf{u} vektoriks \mathbf{v} , i.e.

$$\mathbf{T} : \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{T}[\mathbf{u}] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v},$$
 kus punkt \cdot tähistab tensori \mathbf{T} sisekorrutist¹ vektoriga \mathbf{u} .
- Vektor — esimest järku tensor; skalaar — null-järku tensor

¹Punktkorrutis, skalaarkorrutis. I. k. *inner product*, *dot product*, *scalar product*.

2.2. Vektoralgebra

2 - 4

2.2 Vektoralgebra

- *Tähistus:*
trükitud tekstides tavaliselt rasvases püstkirjas, näiteks \mathbf{a} , \mathbf{A} ; käsitsi kirjutades nool või kriips tähe kohal või all.

- *Vektori pikkus ehk arväärtus ehk moodul*² $a = |\mathbf{a}|$
- Vektori \mathbf{A} suunaline *ühikvektor* \mathbf{e}_A

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A}; \quad \mathbf{A} = A\mathbf{e}_A \quad (2.1)$$

- *Nullvektor* $\mathbf{0}$ (tavaliselt kirjutatakse lihtsalt 0).
- *Liitmise ja skalaariga korrutamise omadused:* kommutatiivsus, assotsiatiivsus ja distributiivsus.
- *Lineaarset sõltuvad vektorid:*
Vektoreid $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ nimetatakse lineaarselt sõltuvateks kui saab leida arvud β_1, \dots, β_n nii, et $\beta_1\mathbf{A}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{A}_n = 0$. Vastasel juhul on tegu lineaarselt sõltumatute vektoritega.

²I. k. *magnitude*

- Kui 2 vektorit on lineaarselt sõltuvad, siis on nad kollineaarsed.
- Kui 3 vektorit on lineaarselt sõltuvad, siis on nad koplanaarsed.
- 3D ruumis on 4 või enam vektorit alati lineaarselt sõltuvad.

2.2.1 Korrutised

Skalaarkorrutis ehk sisekorrutis³

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = AB \cos \theta$,
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A \cdot A = A^2$.
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}$ on vektori \mathbf{A} ortogonaalne projektsioon ühikvektori \mathbf{e} sihile.
- Ühikvektorite skalaarkorrutis võrdub nende vahelise nurga koosinusega: $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2})$

³I. k. *scalar product, inner product, dot product*

Vektorkorrutis⁴

- Vektorkorrutis $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ on vektor, mille orientatsioon on määratud parema käe reegluga ja mille moodul võrdub vektoritele \mathbf{A} ja \mathbf{B} ehitatud rööpküliliku pindalaga. **Joonis loengus!**
- Näited
 - jõu moment punkti suhtes $\mathcal{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$,
 - pöörleva keha punkti kiirus $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$
- Omadused:
 - antikommutatiivsus: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
 - distributiivsus: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ jne. **Tegurite järjekord!**
 - $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$

⁴I. k. *cross product, vector product, skew product, outer product*, neist 2 viimast on harvemini kasutatavad

Kolmekordsed korrutised⁵

Vaatleme kolme tüüpi korrutisi: $A(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$, $A \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ja $A \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

- $A(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ korral on tulemuseks skalaariga $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ korrutatud vektor A
- *Segakorrutis*⁶ $A \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv A \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ on skalaar, mis võrdub vektoritele A , \mathbf{B} ja \mathbf{C} ehitatud rööpküliliku ruumalaga. **NBI! $A \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ tehete järjekord!**
 - *Segakorrutise omadused:*
 - ja \times järjekorda võib vahetada, st. $A \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = A \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = [\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}]$; tsükliline permutatsioon: $A \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = C \cdot A \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times A$, kuid $A \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = -A \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \cdot A \times \mathbf{C} = -C \cdot \mathbf{B} \times A$;
 - kui $A \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0$, siis on A , \mathbf{B} ja \mathbf{C} komplanäärsed.

⁵I. k. *Triple products*

⁶I. k. *scalar triple product* (ilmsetl on veel i.k. vasteid)

2.2. Vektoralgebra

- *Kolmekordne vektorikorrutis*⁷ $A \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ on vektor, mis on risti vektoritega A ja $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ning asub järelikult vektoritega \mathbf{B} ja \mathbf{C} määratud tasandil.

– Saab näidata, et

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (2.2)$$

– Sulge ei saa ära jätta ja järjekorda vahetada:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

2.2.2 Tasapind kui vektor

Vektori $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ moodul on võrdne vektorite A ja B poolt moodustatud rööpküliliku pindalaga. Lisaks on vektor \mathbf{C} selle rööpküliliku normaaliks ja seega ka A ja B poolt määratud tasandi normaaliks. Enamgi veel, \mathbf{C} määrab vaadeldava tasapinna orientatsiooni — parema käe kolmik, kruvireegel jne.

⁷I. k. *vector triple product*

Toodud mõttekäik on tildistatav suvalise kujuga tasapinnalisele kujundile.

- Ühiknormaal \mathbf{n} määrab pinna orientatsiooni läbi kruvireegli
- Pind on esitatav vektorina $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$, kus S on vtl. pinna pindala.

Näited. (Lahendatakse loengus)

- Silindri põhja pindala on S_0 ja põhja normaal \mathbf{n}_0 . Määrata silindri lõikamisel tasandiga, mille normaal on \mathbf{n} tekkinud kujundi pindala S .
- Vaatleme koordinaattasandite (DKR) lõikamisel kaldpinnaga tekkinud tetraeedrit. Tekkinud kaldpinna pindala on S ja normaal \mathbf{n} . Määrata tetraeedri ülejäänud 3 tahu pinalad läbi kaldpinna pindala.

2.2.3 Vektori komponendid

- Valime baasivektoriteks kolm meelevaldset lineaarselt sõltumatut vektorit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, mis moodustavad parema käe kolmiku.
- Nüüd saame avaldada suvalise vektori $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$. *joonis loengus*
- $A_1\mathbf{e}_1, A_2\mathbf{e}_2, A_3\mathbf{e}_3$ vektori \mathbf{A} *vektorkomponendid*.
- A_1, A_2, A_3 vektori \mathbf{A} *skalaarkomponendid*.
- Kui PKM-s räägitakse vektori komponentidest, siis peetakse tavaliselt silmas just skalaarkomponente.

2.2.4 Summeerimiskokkulepe

Summeerimiskokkuleppe põhjal kirjutatakse avaldis

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$$

kujul

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i. \quad (2.3)$$

- Indeksit i nimetatakse *summeerimisindeksiks*⁸.
- Summeerimiskokkulepe kujul (2.3) kehrib vaid Descartes'i ristkoordinaatide (DRK)⁹ korral. Muude koordinaatide korral on olukord „pisut” keerulisem, sest üks indeks on ülal ja teine all — näiteks: $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i$.
- Summeerimisindeksina võib kasutada suvalist sümbolit, mis pole vtl. avaldises veel kasutusel:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i = a_m \mathbf{e}_m = a_r \mathbf{e}_r = \dots$$

⁸I. k. *dummy index*

⁹I. k. *Cartesian coordinates*

2.2. Vektoralgebra

- Summeerimisindeks tohib korduda tihes avaldises ainult 2 korda — $a_i b_i c_i$ pole lubatud ega oma seega mõtet.

- *Vaba indeks* esineb avaldises kummalgi pool võrdusmärgi vaid tihes korra.

$$a_i = b_j c_j d_i$$

i on vaba indeks, mille asemel võib kasutada suvalisi teisi „vabu” tähti.

- 3D juhul eeldatakse, et indeksid omavad väärtusi 1, 2 ja 3 ning 2D juhul väärtusi 1 ja 2.

2.2.5 Kroneckeri delta ja permutatsiooni sümbol

Kroneckeri delta on defineeritud läbi DRK baasivektorite:

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases} \quad (2.4)$$

Näited:

- $a_i \delta_{ij} = a_j$
- $a_i b_j \delta_{ij} = \dots$
- $\delta_{ij} \delta_{ik} = \dots$
- δ_{ij} võib nimetada ühikmaatriksi analoogiks

Permutatsiooni sümbol on defineeritud järgmiselt:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i, j, k \text{ on arvujada } 1, 2, 3 \text{ paaris permutatsioon} \\ -1, & \text{kui } i, j, k \text{ on arvujada } 1, 2, 3 \text{ paaritu permutatsioon} \\ 0, & \text{kui } i, j, k \text{ on korduvad} \end{cases} \quad (2.5)$$

- $e_{123} = e_{312} = e_{231} = 1$
- $e_{321} = e_{132} = e_{213} = -1$
- muul juhul $e_{ijk} = 0$
- $e_{ijk} = e_{kij} = e_{jki}$

2.2. Vektoralgebra

2 - 14

- Vektorkorutus: **NB! DRKI!**

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = e_{ijk} \mathbf{e}_k = e_{kij} \mathbf{e}_k = e_{jki} \mathbf{e}_k \quad (2.6)$$

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}_j) = \dots$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \times (b_j \mathbf{e}_j) = \dots$
- nn. $e - \delta$ *samasus*

$$e_{ijk} e_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (2.7)$$

NÄITED LOENGUS ...

2.2.6 Koordinaateisendused

Vaatleme kahte komplekti DRK e x_1, x_2, x_3 ja X_1, X_2, X_3 , millele vastavad baasivektorid \mathbf{i}_i ja \mathbf{I}_i . Tähistame vektori \mathbf{A} vastavaid komponente (projektsioone) \mathbf{a}_i ja \mathbf{A}_i :

$$\mathbf{A} = \begin{cases} a_i \mathbf{i}_i = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_i) \mathbf{i}_i, \\ A_j \mathbf{I}_j = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_j) \mathbf{I}_j. \end{cases} \quad (2.8)$$

Siit saame

$$A_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_j = (a_i \mathbf{i}_i) \cdot \mathbf{I}_j = a_i (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{I}_j) = q_{ji} a_i, \quad (2.9)$$

kus

$$q_{ij} = \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{i}_j = \cos(\widehat{\mathbf{I}_i, \mathbf{i}_j}). \quad (2.10)$$

On selge, et q_{ij} pole sümmeetriline.

•

2.3. Maatriksite teooria

2.3 Maatriksite teooria

- Liitmine ja skalaariga korrutamine ning nende tehete omadused ...
- Transponeerimine ...
 - sümmeetriline maatriks: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
 - anti- ehk kaldsümmeetriline maatriks¹⁰ $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$
- Korrutamise ja selle omadused
 - Üldjuhul $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
 - Normaalmatriks¹¹: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$
 - Ortogonaalmatriks¹²: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, st. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$
 - $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$
 - ...
- Maatriksi \mathbf{A} determinant $\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}|$

¹⁰I. k. skevu sümmeetriline maatriks

¹¹I. k. normaal maatriks

¹²I. k. ortogonaal maatriks

– Indekskirjaviisis

$$|\mathbf{A}| = e_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} \quad \checkmark \quad (2.11)$$

või

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{6}e_{ijk}e_{lmn}A_{il}A_{jm}A_{kn} \quad (2.12)$$

• Matriksi \mathbf{A} elemendi A_{ij} *minor* $M_{ij}(\mathbf{A})$ on determinant, mis on saadud matriksist \mathbf{A} , kui sealt kõrvaldada i -s rida ja j -s veerg.

• Matriksi \mathbf{A} elemendi A_{ij} *algebraline täiend*¹³

$$\text{cofactor}(A_{ij}) = (-1)^{i+j}M_{ij}(\mathbf{A}) \quad (2.13)$$

• *Pöördmatriks*

$$A_{ij}^{-1} = \frac{\text{cofactor}A_{ji}}{|\mathbf{A}|} \quad (2.14)$$

NB! transponeerimine: cofactor A_{ji}

• *Singulaarne matriks*: $\det \mathbf{A} = 0$

¹³I. k. *cofactor*

• Determinantide omadused

$$- |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

$$- |\mathbf{A}^{-T}| = |\mathbf{A}|$$

$$- |\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}|$$

– ...

2.4 Tensor vrs. maatriks

Vektorit ja 3×1 maatriksit ning tensorit ja 3×3 maatriksit ei tohi segi ajada.

- Kui fikseerida koordinaatsüsteem, siis saab iga vektori esitada 3×1 maatriksina ja iga teist järku tensori 3×3 maatriksina. Kuid erinevates koordinaatsüsteemides vastavad samale vektorile või tensorile erinevad maatriksid.
- *Iga tensor on seega esitatav maatriksina, kuid iga maatriks ei esita tensorit.*
Millal 3×3 maatriks komponentidega A^i_j esitab tensorit?
 - Olgu meil ühes koordinaatsüsteemis kaks 3×1 maatriksit komponentidega a^i ja b^i ning 3×3 maatriks komponentidega A^i_j ning $b^i = A^i_j a^j$.
 - Teisendamisel mingisse teise koordinaatsüsteemi saame uued maatriksid komponentidega \hat{a}^i , \hat{b}^i ja \hat{A}^i_j .
 - Kui $\hat{b}^i = \hat{A}^i_j \hat{a}^j$, siis esitab 3×3 maatriks komponentidega A^i_j tensorit.

2.5. Vektor- ja tensoranalüüs

2 - 20

2.5 Vektor- ja tensoranalüüs¹⁴

Valmimisel ...

¹⁴I. k. Vector - and tensor calculus

Sisukord

2	Skalaar, vektor, tensor	1
2.1	Sissejuhatus	2
2.2	Vektoralgebra	4
2.2.1	Korrutised	5
2.2.2	Tasapind kui vektor	8
2.2.3	Vektori komponendid	10
2.2.4	Summeerimiskokkulepe	11
2.2.5	Kroneckeri delta ja permutatsiooni sümbol	12

2.2.6	Koordinaateisendused	15
2.3	Maatriksite teooria	16
2.4	Tensor vrs. maatriks	19
2.5	Vektor- ja tensoranalüüs	20