

Peatükk 3

Deformeeruva keskkonna kinemaatika

3.1. Euleri ja Lagrange'i koordinaadid

3 - 2

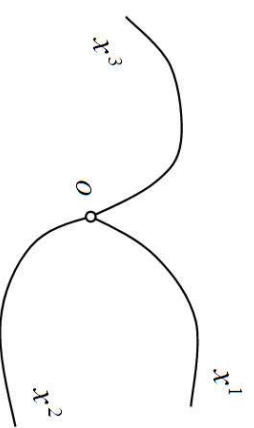
3.1 Euleri ja Lagrange'i koordinaadid

Pideva keskkonna mehaanikas on liikumise kirjeldamisel kasutusel kahte liiki koordinaadid: *Euleri – ja Lagrange'i koordinaadid*. Esmalt defineerime nad üldiste kõverjooneliste koordinaatidena.

Euleri koordinaadid

Toome sisse ajas muutumatu kõverjoonelise koordinaatsüsteemi x^1, x^2, x^3 , mille suhtes vaadeldakse keskkonna materiaalseid punktide liikumist. Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Euleri koordinaatsüsteemiks ehk ruumilis-seks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate x^1, x^2, x^3 — *Euleri koordinaatideks (EK) ehk ruumilisteks koordinaatideks*. Ühe punktmassi liikumist Euleri koordinaatsüsteemis kirjeldavad kolm võrrandit

$$x^i = f^i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$



Joonis 3.1: Euleri koordinaadid

Lagrange'i koordinaate tähistame DRK korral X_1, X_2, X_3 ning vastavaid baasivektoreid $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ ja \mathbf{I}_3 .

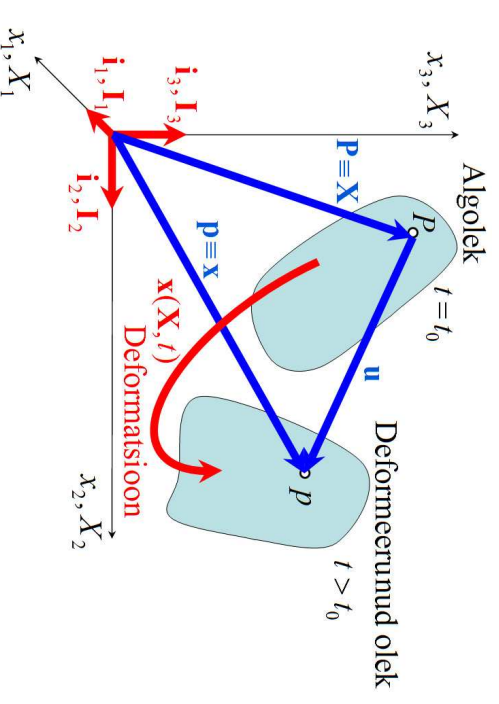
Mõned näited tähistustest:

- materiaalne punkt: P ; tema kohavektor: $\mathbf{P} \equiv \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$
- punkti kiirus EKs: $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{P}} \equiv \dot{\mathbf{X}} = (V_1, V_2, V_3)$
- punkti kiirendus EKs: $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{P}} \equiv \ddot{\mathbf{X}} = (A_1, A_2, A_3)$
- pingetensori komponendid: T_{IJ} ; Lagrange'i deformatsioonitensori komponendid: E_{IJ}
- $X_I, V_I, A_I, F_I, C_{IJ} \dots$
- Kõiki suurusi, mis on esitatud LKs tähistame suurte tähtedega

3.2. Liikumise kirjeldamine

3 - 6

Üldjuhul eeldatakse, et keha (keskkond) on alghetkel $t = t_0$ deformeerumata olekus², nn. *algolekus*. Välismõjude toimel hakkab keha deformeeruma ja kui vaadelda mingit hetke $t > t_0$ siis on keha *deformeerunud olekus*³ (joon. 3.3). Tihti öeldakse, et alghetkel hõlvab keha (materiaalne maht⁴ \mathcal{V} , mida imbritseb materiaalne pind⁵ \mathcal{S}) ruumipiirkonna B . Deformeerunud olekus hõlmab vaadeldav keha ruumi-
piirkonna b ((ruumi)mahtu v , mida imbritseb (ruumi)pind s).



Joonis 3.3: Deformatsioon, algolek ja deformeerunud olek.

²I. k. *reference configuration*

³I. k. *deformed configuration, actual configuration*

⁴I. k. *material volume*

⁵I. k. *material surface*

Materiaalse punkti P kohavektor

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{X} = X_K \mathbf{I}_K, \quad (3.2)$$

ruumipunkti kohavektor

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = x_k \mathbf{i}_k \quad (3.3)$$

ja siirdevektor

$$\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k = U_K \mathbf{I}_K. \quad (3.4)$$

Liikumisseaduseks nimetatakse üheparameetrilist koordinaatide teisendust

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{ehk} \quad x_k = x_k(X_1, X_2, X_3, t) \quad (3.5)$$

või tema pöördteisendust

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \text{ehk} \quad X_K = X_K(x_1, x_2, x_3, t), \quad (3.6)$$

mis siirdab materiaalse punkti P ruumipunkti p . Parameetrik on siin aeg t . Alghetkel $t = t_0$ kujutavad teisendused (3.5) ja (3.6) (parameetrist sõltumatuid) koordinaat teisendusi.

3.2. Liikumise kirjeldamine

Tihti on kasulik kui $t = t_0$ puhul teljestikud x_k ja X_K ühtiksid, st., hetkel $t = t_0$ $x_k = X_K$ kui $k = K$. Sel juhul on materiaalse punkti asukoht alghetkel $t = t_0$ automaatselt teada ning asukoha muutus algasendi suhtes on hetkel $t > t_0$ lihtsalt leitav (vt. joon. 3.3).

Märkused:

- On ilmne, et kuna LK liiguvad (deformeeruvad) koos kehaga, siis on nad DRK vaid alghetkel.
- Väga sageli esitatakse liikumisseadus (3.5) kujul $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})$.

Teisendused (3.5) ja (3.6) peavad olema teineteise ühesed pöördteisendused. Eel-
 *
 dame, et nii funktsioon (3.5) kui (3.6) kuuluvad klass C^r , $r \geq 1$. Vastavalt matemaatilisest analüüsist tuntud teoreemile ilmutamata funktsioonist on see tingimus täidetud ruumipunkti p ümbruses δ parajasti siis, kui jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right| \neq 0 \quad |x_k - x_k^0| < \delta. \quad (3.7)$$

Siin x_k^0 , $k = 1, 2, 3$ on ruumipunkti p koordinaadid ja

$$\left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right| = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial X_1 & \partial x_1 / \partial X_2 & \partial x_1 / \partial X_3 \\ \partial x_2 / \partial X_1 & \partial x_2 / \partial X_2 & \partial x_2 / \partial X_3 \\ \partial x_3 / \partial X_1 & \partial x_3 / \partial X_2 & \partial x_3 / \partial X_3 \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Jakobiaan (3.7) väljendab tegelikult pidevuse aksioomi, mille põhjal positiivne † lõplik aine maht ei saa deformeeruda nullmahuks ega lõpmata suureks mahuks⁶ ning ükski ainehulk ei tungi teise ainehulga sisse⁷. Teisisõnu, joon deformeerub alati jooneks, pind pinnaks ja maht mahuks.

Kui keskkonnas esineb katkevusi (näit. kihiline materjal või praod), pole eeltoodu otseselt kasutatav ja tuleb sisse tuua lisatingimusi. Samuti tuleb erilist tähelepanu pöörata võimalikele singulaarsetele punktidele, joontele või/ja pindadele, kus tingimus (3.7) pole täidetud.

Funkttsioonide (3.5) ja (3.6), st., liikumisseaduste leidmine ongi üks pideva keskkonna mehaanika põhiülesandeid.

⁶ik. *indestructibility of matter*
⁷ik. *impenetrability of matter*

Kui liikumine on kirjeldatud avaldistega (3.5), siis öeldakse, et on antud *liikumise Lagrange'i kirjeldus* — antud juhul saame teada, millises ruumipunktis x_k asub materiaalne punkt X_K hetkel t . Kui $t = t_0$ puhul EK ja LK ühtisid, siis saame liikumisseadusest (3.5) teada, millises ruumipunktis asub hetkel t see materiaalne punkt, mis alghetkel oli ruumipunktis $x_k = X_K$ ($k = K$). Lagrange'i kirjeldust on otstarbekas kasutada deformeeruva tahke keha ülesannete puhul, sest siin keha peaasjalikult vaid deformeerub välisjõudude toimel ning tema materiaalsed punktid ei paigutu ruumis oluliselt ümber. Kui fikseerime materiaalse punkti X_K , siis avaldistest (3.5) saame tema liikumisseaduse kujul

$$x_k = f_k(t), \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Avaldised (3.6) esitavad *liikumise Euleri kirjelduse* — nende põhjal saab määrata materiaalse punkti X_K , mis hetkel t asub ruumipunktis x_k . Seda moodust on mõistlik kasutada näiteks hüdrodinaamika ülesannete puhul, sest vedeliku “osakesed” (materiaalsed punktid) paigutuvad ruumis oluliselt ümber. Kui fikseerime ruumipunkti x_k , siis saab liikumisseadus (3.6) kuju

$$X_K = F_K(t), \quad K = 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

ja esitab materiaalseid punkte, mis liiguvad läbi selle fikseeritud ruumipunkti.

Näide 3.2.1. Liikumise Lagrange'i kirjeldus

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2(e^t - 1), \\ x_2 = X_1(e^{-t} - 1) + X_2, \\ x_3 = X_3. \end{cases}$$

Liikumise Euleri kirjeldus

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ X_2 = \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ X_3 = x_3. \end{cases}$$

Alghetkel LK ja EK ühtivad. Kas liikumine on üheselt määratud?

Jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \right| = \dots$$

...

3.3. Siirdeväli ja deformatsioonigradient

3 - 12

3.3 Siirdeväli ja deformatsioonigradient

3.3.1 Siire

Vastavalt joonisele 3.3 on *punkti P siire*

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (3.11)$$

Siirdevektor on liikumisseaduste (3.5) ja (3.6) abil avaldatav nii LKs kui EKs:

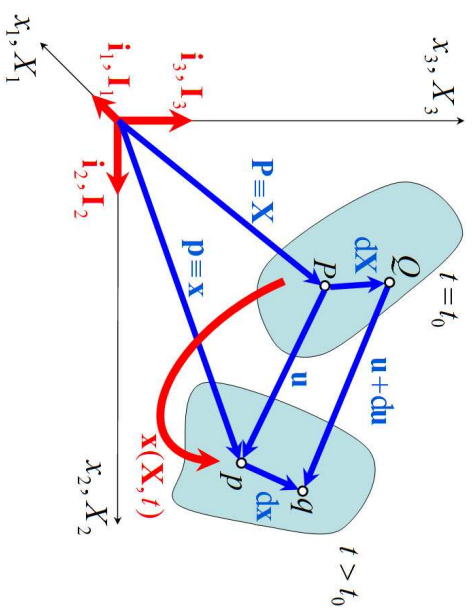
$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = U_K \mathbf{I}_K, \quad U_K = x_k(X_1, X_2, X_3, t) - X_K, \quad \text{kus } k = K \quad (3.12)$$

ja

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = u_k \mathbf{i}_k, \quad u_k = x_k - X_K(x_1, x_2, x_3, t), \quad \text{kus } k = K. \quad (3.13)$$

Valem (3.12) esitab siiret, mille on hetkeks t saanud materiaalne punkt \mathbf{X} ja valem (3.13) määrab siirde, mille on saanud materiaalne punkt, mis hetkel t asub ruumipunktis \mathbf{x} .

Vaatleme joonist 3.4. Materiaalse punkti P kohavektori \mathbf{X} diferentsiaal $d\mathbf{X}$ viib materiaalsest punktist P punkti Q . Ruumipunkti p kohavektori \mathbf{x} diferentsiaal $d\mathbf{x}$ viib ruumipunktist p punkti q . Deformatsiooni käigus siirduv materiaalne punkt P ruumipunkti p , materiaalne punkt Q ruumipunkti q ja vektor $d\mathbf{X}$ deformeerub vektoriks $d\mathbf{x}$. Punktist P viib punkti p vektor \mathbf{u} ja punktist Q punkti q vektor $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$.



Joonis 3.4:

Diferentsiaalid $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ on vaadeldavad kui lõpmata väikese pikkusega joonelemendid, mille pikkuste ruudud

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_K dX_K \quad (3.14)$$

ja

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_k dx_k \quad (3.15)$$

mängivad edaspidi tähtsat rolli.

3.3. Siirdeväli ja deformatsioonigradient

3 - 14

3.3.2 Deformatsioonigradient

Järgnevalt toome sisse deformatsioonigradiendi mõiste ja defineerime viimase abil deformatsioonitensorid. Diferentsiaalid $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ on omavahel seotud järgmiselt:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (3.16)$$

kuus tensorit

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \nabla_0 \mathbf{x} \quad (3.17)$$

nimetatakse *deformatsioonigradiendiks* ja ∇_0 on gradientoperaator \mathbf{X} suhtes. Seose (3.16) pöördteisendus avaldub kujul

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.18)$$

kuus

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \equiv \nabla \mathbf{X}, \quad (3.19)$$

ja ∇ on gradientoperaator \mathbf{x} suhtes.

Deformatsioonigradiendid \mathbf{F} ja \mathbf{F}^{-1} kujutavad endast nn. *kahepunktilisi tensorväli*, st. nad teisenevad kui tensorid nii \mathbf{x} kui \mathbf{X} suhtes.

Indekskirjavisiis saame tensorid \mathbf{F} ja \mathbf{F}^{-1} esitada kujul

$$F_{kK} = x_{k,K} \equiv \frac{\partial x_k(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial X_K} \quad \text{ja} \quad F_{Kk}^{-1} = X_{K,k} \equiv \frac{\partial X_K(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}, \quad (3.20)$$

kus *indeksis esimene koma tähistab osatuletise võtmist vastavalt avaldisele (3.20)*.

Indekskujul saavad avaldised (3.16) ja (3.18) kujul

$$dx_k = x_{k,K} dX_K \quad \text{ja} \quad dX_K = X_{K,k} dx_k. \quad (3.21)$$

Valemite (3.7) ja (3.8) põhjal saame öelda, et jakobiaan $j = |\mathbf{F}|$.

Maatrikskujul

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}] = [x_{k,K}] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} & \quad [\mathbf{F}^{-1}] = [X_{K,k}] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ (3.22) \end{aligned}$$

3.3. Siirdeväli ja deformatsioonigradient

3 - 16

Osatuletise leidmise ahelreegli põhjal:

$$x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl} \quad \text{ja} \quad X_{K,k} x_{k,L} = \delta_{KL}. \quad (3.23)$$

Seega, $x_{k,K}$ ja $X_{K,k}$ on teineteise pöördtensorid ja analoogiliselt pöördmaatriksi leidmise eeskirjale

$$X_{K,k} = \frac{\text{cofactor } x_{k,K}}{j} = \frac{1}{2j} e_{KLM} e_{klm} x_{l,L} x_{m,M} \quad (3.24)$$

ning

$$x_{k,K} = \frac{\text{cofactor } X_{K,k}}{j} = \frac{1}{2j} e_{klm} e_{KLM} X_{L,l} X_{M,m}, \quad (3.25)$$

kus jakobiaan

$$j = |x_{k,K}| = \frac{1}{6} e_{KLM} e_{klm} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M}. \quad (3.26)$$

Viimast diferentseerides saadakse *Jacobi samasus*

$$\frac{\partial j}{\partial x_{k,K}} = \text{cofactor } x_{k,K} = j X_{K,k}. \quad (3.27)$$

3.4 Deformatsioonitensordid

3.4.1 Cauchy ja Greeni deformatsioonitensordid

DRK korral on kohavektorite \mathbf{X} ja \mathbf{x} diferentsiaalid avaldatavad kujul

$$d\mathbf{X} = dX_K \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = dx_k \mathbf{i}_k \quad (3.28)$$

Valemite (3.21) põhjal saame anda viimastele kujul

$$d\mathbf{X} = dx_k \mathbf{c}_k \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = dX_K \mathbf{C}_K, \quad (3.29)$$

kus vektorid

$$\mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} X_{K,k} \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} x_{k,K} \mathbf{i}_k \quad (3.30)$$

on käsitletavad kui „uued baasivektorid“. Valemite (3.28)–(3.30) põhjal on selge, et

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_K &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_K} & \text{ja} & \quad \mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} \\ \mathbf{C}_K &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_K} & \text{ja} & \quad \mathbf{c}_k = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.4. Deformatsioonitensordid

Definitsioonidest (3.30) saame omakorda avaldada DRK baasivektorid

$$\mathbf{I}_K = x_{k,K} \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) \quad \text{ja} \quad \mathbf{i}_k = X_{K,k} \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t). \quad (3.32)$$

Pärast uute baasivektorite \mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K sissetoomist saame kohavektorite $\mathbf{X} \equiv \mathbf{P}$ ja $\mathbf{x} \equiv \mathbf{p}$ diferentsiaalid avaldada neljal (2+2) erineval moel:

$$d\mathbf{X} = \underbrace{\mathbf{I}_K dX_K}_i = \underbrace{\mathbf{c}_k dx_k}_{\text{ii}} \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{i}_k dx_k}_{\text{iii}} = \underbrace{\mathbf{C}_K dX_K}_{\text{iv}}; \quad (3.33)$$

i määrab muutuva suuruse $d\mathbf{X}$ alghetkel (kui $t = t_0$),

ii määrab $d\mathbf{X}$ muutumise seadus EK-s (muutumatud koordinaadid),

iii määrab $d\mathbf{x}$ igal ajahetkel, sest EK on (ajas) muutumatud koordinaadid ja \mathbf{x} on ruumipunkti kohavektor,

iv määrab muutumatu suuruse $d\mathbf{x}$ muutuvates koordinaatides X_K suvalisel hetkel $t \geq t_0$.

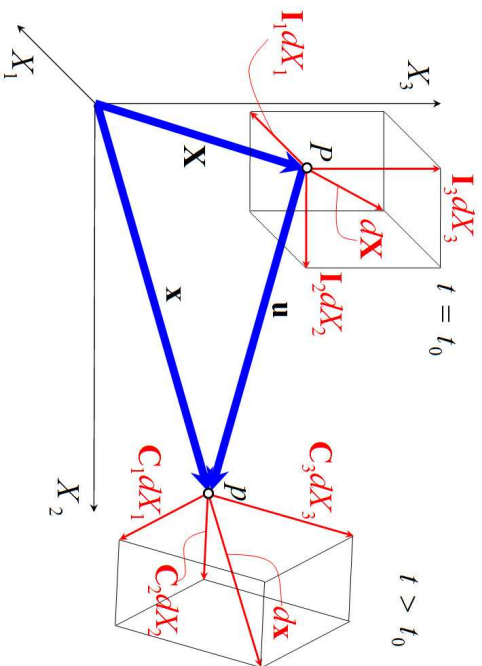
Märkus:

Näiv vastuolu valemis (3.33) (ning ka eelnevates ja järgnevates valemites) EK ja LK vahel kõrvaldatakse liikumisseaduste (3.5) ja (3.6) abil.

Valemid (3.30) ja (3.32) annavad deformatsioonigradiendile järgmise tõlgenduse:

- deformatsioonigradiend $F_{k,K}^{-1} \equiv x_{k,K}$ teisendab baasivektori \mathbf{i}_k uueks baasivektoriks \mathbf{C}_K ja uue baasivektori \mathbf{c}_k tagasi DRK baasivektoriks \mathbf{I}_K
- deformatsioonigradiend $F_{K,k}^{-1} \equiv X_{K,k}$ teisendab baasivektori \mathbf{I}_K uueks baasivektoriks \mathbf{c}_k ja uue baasivektori \mathbf{C}_K tagasi DRK baasivektoriks \mathbf{i}_k

Deformatsiooni käigus muutub vektor $d\mathbf{X}$ vektoriks $d\mathbf{x}$. Lagrange'i kirjelduse (st. LK) korral võib seda protsessi näitlikustada joonisel 3.5 kujutatud moel: algse risttahuka servavektorid \mathbf{I}_1dX_1 , \mathbf{I}_2dX_2 ja \mathbf{I}_3dX_3 on viidud (kõverjoonelise) rööptahuka servavektoriteks \mathbf{C}_1dX_1 , \mathbf{C}_2dX_2 ja \mathbf{C}_3dX_3 .



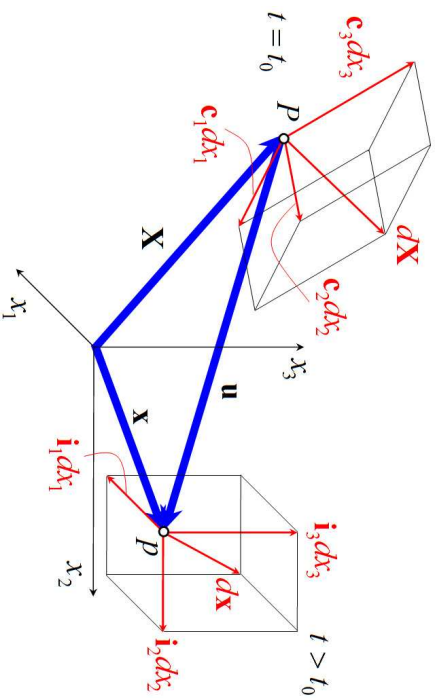
Joonis 3.5: Algse risttahuka deformeerumine rööptahukaks (Lagrange'i kirjeldus)

Joonis 3.5: Algse risttahuka deformeerumine rööptahukaks (Lagrange'i kirjeldus)

3.4. Deformatsioonitensordid

3 - 20

Euleri kirjelduse (st. EK) korral saame vektori $d\mathbf{X}$ deformatsiooni vektoriks $d\mathbf{x}$ visualiseerida joonisel 3.6 kujutatud moel: algse rööptahuka servavektorid \mathbf{c}_1dx_1 , \mathbf{c}_2dx_2 ja \mathbf{c}_3dx_3 muutuvad deformatsiooni käigus risttahuka servavektoriteks \mathbf{i}_1dx_1 , \mathbf{i}_2dx_2 ja \mathbf{i}_3dx_3 .



Joonis 3.6: Algse rööptahuka deformeerumine risttahukaks (Euleri kirjeldus)

Lähtudes vektorite \mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K definitsioonidest saame avaldada

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \stackrel{(3.29)}{=} c_{kl} dx_k dx_l \quad \text{ja} \quad ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \stackrel{(3.29)}{=} C_{KL} dX_K dX_L, \quad (3.34)$$

kus

$$c_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l \stackrel{(3.30)}{=} \delta_{KL} X_{K,k} X_{L,l} = X_{K,k} X_{K,l} \quad (3.35)$$

ja

$$C_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L \stackrel{(3.30)}{=} \delta_{kl} x_{k,K} x_{l,L} = x_{k,K} x_{k,L}. \quad (3.36)$$

Tensorit c_{kl} nimetatakse *Cauchy deformatsioonitensoriks*⁸ ja C_{KL} *Greeni deformatsioonitensoriks*.⁹ Mõlemad nad on sümmeetrilised ja positiivselt määratud.¹⁰

⁸I. k. *Cauchy's deformation tensor*
⁹I. k. *Green's deformation tensor*
¹⁰ $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} > 0$

3.4. Deformatsioonitensordid

3.4.2 Fingeri ja Piola deformatsioonitensordid

Toome nüüd sisse vektorite \mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K pöördvektorid¹¹

$$\mathbf{c}_k^{-1}(\mathbf{x}, t) = x_{k,K} \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}_K^{-1}(\mathbf{X}, t) = X_{K,k} \mathbf{i}_k, \quad (3.37)$$

mille korral

$$\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l^{-1} = \dots = \delta_{kl} \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L^{-1} = \dots = \delta_{KL}. \quad (3.38)$$

Vektorite \mathbf{c}_k^{-1} ja \mathbf{C}_K^{-1} abil defineeritakse *Fingeri ja Piola deformatsioonitensordid*:

$$c_{kl}^{-1} = \mathbf{c}_k^{-1} \cdot \mathbf{c}_l^{-1} = \delta_{KL} x_{k,K} x_{l,L} = x_{k,K} x_{l,K} \quad (3.39)$$

ja

$$C_{KL}^{-1} = \mathbf{C}_K^{-1} \cdot \mathbf{C}_L^{-1} = \delta_{kl} X_{K,k} X_{L,l} = X_{K,k} X_{L,k}. \quad (3.40)$$

Fingeri ja Cauchy deformatsioonitensordid ning Piola ja Greeni deformatsioonitensordid on teineteiste pöördtensordid, st.

$$c_{km}^{-1} c_{ml} = \delta_{kl} \quad \text{ja} \quad C_{KM}^{-1} C_{ML} = \delta_{KL}. \quad (3.41)$$

¹¹I. k. *reciprocal vectors*

3.4.3 Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensordid

Arvestades kohavektorite diferentsiaalide avaldisi (3.28) ja (3.29) ning Cauchy ja Greeni deformatsioonitensorite defnitsioone (3.35) ja (3.36) saame avaldada suurused dS^2 ja ds^2 kahel erineval moel:

$$dS^2 = \delta_{KL} dX_K dX_L = c_{kl} dx_k dx_l \quad \text{ja} \quad ds^2 = \delta_{kl} dx_k dx_l = C_{KL} dX_K dX_L. \quad (3.42)$$

Nende vahe $ds^2 - dS^2$ iseloomustab kahe materaalse punkti vahelise kauguse muutu deformatsiooni käigus ja seda saab avaldada nii Lagrange kui Euleri koordinaatides:

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{Kl}(\mathbf{X}, t) dX_K dX_L = 2e_{kl}(\mathbf{x}, t) dx_k dx_l, \quad (3.43)$$

kus

$$2E_{Kl} = C_{Kl}(\mathbf{X}, t) - \delta_{KL} \quad \text{ja} \quad 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl}(\mathbf{x}, t) \quad (3.44)$$

nimetatakse vastavalt *Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensoriteks*.¹² Valemite (3.35) ja (3.36) põhjal

$$2E_{Kl} = x_{k,K} x_{k,L} - \delta_{KL} \quad \text{ja} \quad 2e_{kl} = \delta_{kl} - X_{K,k} X_{K,l}. \quad (3.45)$$

¹²l k. *Lagrangian and Eulerian strain tensors. NB! strain tensors!*

3.4. Deformatsioonitensordid

Võrduse (3.43) põhjal näeme¹³, et

$$E_{Kl} = e_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad \text{ja} \quad e_{kl} = E_{Kl} X_{K,k} X_{L,l}. \quad (3.46)$$

Euleri ja Lagrange deformatsioonitensorite esitamine siirete kaudu

Joonise 3.3 (või 3.4) põhjal siire

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = x_i \mathbf{i}_i - X_I \mathbf{I}_I. \quad (3.47)$$

Siirdevektor avaldub oma komponentide kaudu nii LKs kui EKs:

$$\mathbf{u} = U_K \mathbf{I}_K = u_k \mathbf{i}_k. \quad (3.48)$$

Komponentide U_K ja u_k avaldamiseks korrutame avaldist (3.47) baasivektoritega \mathbf{i}_k või \mathbf{I}_K :

$$u_k = x_k - \delta_{Ik} X_I \quad \text{ja} \quad U_K = \delta_{iK} x_i - X_K, \quad (3.49)$$

kus suurus

$$\delta_{Kk} = \delta_{kK} = \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{I}_K \quad (3.50)$$

nimetame *vahetajaks*¹⁴ ja nad on Kroneckeri deltad vaid juhul kui alghetkel $K = k$ † korral $\mathbf{i}_k = \mathbf{I}_K$.

¹³Näidata kodus ja eksamil

¹⁴l k. *shifter*

- Kui asendame avaldise (3.49)₁ liikumisseaduse $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, siis saame siirde, mille on saanud materiaalne punkt, mis hetkel t asub ruumpunktis \mathbf{x} .
- Kui asendame avaldise (3.49)₂ liikumisseaduse $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0)$, siis saame siirde, mille on saanud materiaalne punkt \mathbf{X} . Feldusel, et alghetkel EK ja LK ühtivad, on tegu materiaalse punktiga, mis alghetkel asub ruumpunktis $\mathbf{x} = \mathbf{X}$.

Avaldame vektorid \mathbf{C}_K ja \mathbf{c}_k siirete kaudu:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_K &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_K} \stackrel{(3.47)}{=} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_K} = \mathbf{I}_K + U_{M,K} \mathbf{I}_M, \\ \mathbf{c}_k &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_k} \stackrel{(3.47)}{=} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k - u_{m,k} \mathbf{i}_m. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Suurusi $U_{M,K}$ ja $u_{m,k}$ nimetame *siirdegradientideks*.

Nüüd saamegi avaldada deformatsioonitensordid siiretes:

$$\begin{cases} C_{KL} = \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L = \dots = \delta_{KL} + U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}, \\ c_{kl} = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l = \dots = \delta_{kl} - u_{k,l} - u_{l,k} + u_{m,k} u_{m,l} \end{cases} \quad (3.52)$$

3.4. Deformatsioonitensordid

ja

$$\begin{cases} 2E_{KLM} = C_{KL} - \delta_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k} u_{m,l}. \end{cases} \quad (3.53)$$

Veel mõned valemid kohavektorite diferentsiaalide jaoks:

$$\begin{cases} d\mathbf{x} = \mathbf{C}_K dX_K \stackrel{(3.51)}{=} (\delta_{MK} + U_{M,K}) \mathbf{I}_M dX_K, \\ d\mathbf{X} = \mathbf{c}_k dx_k \stackrel{(3.51)}{=} (\delta_{mk} + u_{m,k}) \mathbf{i}_m dx_k. \end{cases} \quad (3.54)$$

Korrutades viimased vastavalt vektoritega \mathbf{i}_k ja \mathbf{I}_k saame

$$\begin{cases} dx_k = (\delta_{MK} + U_{M,K}) \delta_{Mk} dX_K, \\ dX_K = (\delta_{mk} + u_{m,k}) \delta_{mK} dx_k. \end{cases} \quad (3.55)$$

3.5 Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

3.5.1 Lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid

Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid olid defineeritud avaldistega (3.53) kujul

$$\begin{cases} 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K}U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k}u_{m,l}. \end{cases}$$

Kui siirdegradientid on väikesed võrreldes ühega, siis

$$U_{M,K}U_{M,L} \ll U_{K,L} \ll 1 \quad (3.56)$$

hiljates kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed, saame *lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid*¹⁵

$$\begin{cases} 2\tilde{E}_{KL} = 2\tilde{E}_{LK} = U_{K,L} + U_{L,K}, \\ 2\tilde{e}_{kl} = 2\tilde{e}_{lk} = u_{k,l} + u_{l,k}. \end{cases} \quad (3.57)$$

Selliseid deformatsioonitensoreid kasutatakse lineaarses teoorias, mida on kombeks nimetada klassikaliseks teooriaks.

¹⁵Neid nimetatakse ka lihtsalt väikeste deformatsioonide tensoriteks „unustades“ sõna *lõpmata* lisamata.

3.5. Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

3.5.2 Linearse teooria pöördetensorid ja pöördevektorid

Siirdevektori diferentsiaalid avalduvad läbi siirdegradientide kujul

$$dU_K = U_{K,L}dX_L \quad \text{ja} \quad du_k = u_{k,l}dx_l. \quad (3.58)$$

Siirdegradienti saab lahutada sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks osaks:

$$\begin{cases} U_{K,L} = \frac{1}{2} [(U_{K,L} + U_{L,K}) + (U_{K,L} - U_{L,K})], \\ u_{k,l} = \frac{1}{2} [(u_{k,l} + u_{l,k}) + (u_{k,l} - u_{l,k})]. \end{cases} \quad (3.59)$$

Esimised sulgavaldised kujutavad siin klassikalise lineaarse teooria deformatsioonitensoreid $\tilde{E}_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K}$ ja $\tilde{e}_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k}$, teised aga tähistame

$$\tilde{R}_{KL} = \frac{1}{2}(U_{K,L} - U_{L,K}) = -\tilde{R}_{LK} \quad \text{ja} \quad \tilde{r}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} - u_{l,k}) = -\tilde{r}_{lk} \quad (3.60)$$

Viimased on *klassikalise, st. lineaarse, teooria pöördetensorid*.

Seega kujutavad \tilde{E}_{KL} ja \tilde{e}_{kl} siirdegradientide $U_{K,L}$ ja $u_{k,l}$ sümmeetrilisi osi, \tilde{R}_{KL} ja \tilde{r}_{kl} aga antisümmeetrilisi osi ning

$$U_{K,L} = \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \quad \text{ja} \quad u_{k,l} = \tilde{e}_{kl} + \tilde{r}_{kl}. \quad (3.61)$$

Sagedasti kasutatakse selles kontekstis tähistusi

$$\tilde{E}_{KL} = U_{(K,L)}, \quad \tilde{e}_{kl} = u_{(k,l)}, \quad \tilde{R}_{KL} = U_{[K,L]}, \quad \tilde{r}_{kl} = u_{[k,l]}. \quad (3.62)$$

Igas keha punktis saame defineerida lõpmata väikese pöördvektoreid $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{r}_{ki} \mathbf{i}_k$ ja $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{R}_K \mathbf{I}_K$, kus

$$2\tilde{R}_K = e_{KLM} \tilde{R}_{ML}, \quad \text{ja} \quad 2\tilde{r}_k = e_{klm} \tilde{r}_{ml}. \quad (3.63)$$

Ülesanne 3.5.1. Näidata, et

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_{32}, \quad \tilde{r}_2 = \tilde{r}_{13}, \quad \tilde{r}_3 = \tilde{r}_{21}. \quad (3.64)$$

3.5. Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

Euleri ja Lagrange deformatsioonitensorite ja lõpmata väikese deformatsioonitensorite vahelised seosed.

Asendades siirdegradientid (3.61) deformatsioonitensorite avaldistesse (3.53) saame pärast mõningaid teisendusi

$$\begin{cases} E_{KL} = \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \left(\tilde{E}_{MK} + \tilde{R}_{MK} \right) \left(\tilde{E}_{ML} + \tilde{R}_{ML} \right), \\ e_{kl} = \tilde{e}_{kl} - \frac{1}{2} \left(\tilde{e}_{mk} + \tilde{r}_{mk} \right) \left(\tilde{e}_{ml} + \tilde{r}_{ml} \right). \end{cases} \quad (3.65)$$

Viimaste valemite põhjal on selge, et \tilde{e}_{kl} ei sobi hästi deformatsiooni mööduks, sest $\tilde{e}_{kl} = 0$ puhul ei pruugi e_{kl} olla null. Sama kehtib ka Lagrange'i deformatsioonitensori E_{KL} kohta. Valemite (3.65) põhjal on tuletatud mitmeid ligikaudseid teooriaid, eriti plaatidele ja koorikutele.

- Kui $\tilde{e}_{kl} \ll 1$ (kuid \tilde{r}_{kl} on lõplik), siis hüljatakse vaid liikmed $\tilde{e}_{mk}\tilde{e}_{ml}$.
- Kui nii $\tilde{e}_{kl} \ll 1$ kui $\tilde{r}_{kl} \ll 1$, siis hüljatakse liikmed $\tilde{e}_{mk}\tilde{e}_{ml}$, $\tilde{e}_{mk}\tilde{r}_{ml}$ ja $\tilde{r}_{mk}\tilde{r}_{ml}$.
- Jne. sõltuvalt tensorite elementide suurusjärgust.

Lõpnata väikeste deformatsioonide teoorias eeldatakse, et $E_{KL} = \tilde{E}_{kl}$ ja $e_{kl} = \tilde{e}_{kl}$. Enangi veel, kuna deformatsioonid on lõpnata väikesed, siis tegelikult ei eristatagi sel juhul Lagrange'i ja Euleri koordinaate ja seosed (3.46) saavad kuju

$$\tilde{E}_{KLL} = \tilde{e}_{kl}\delta_{kk}\delta_{ll} \quad \text{ja} \quad \tilde{e}_{kl} = \tilde{E}_{KLL}\delta_{KK}\delta_{LL}. \quad (3.66)$$

3.6 Deformatsioonitensorite füüsikaline sisu¹⁶

Vaatleme lõpnata väikeleid vektoreid $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$, mis on (3.33) avaldatavad järgmiselt:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{I}_K dX_K = \mathbf{c}_k dx_k \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{i}_k dx_k = \mathbf{C}_K dX_K. \quad (3.67)$$

Kuna

$$dS^2 = |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{ja} \quad ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.68)$$

siis $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ sihilised ühikvektorid

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{X}}{|d\mathbf{X}|} = \frac{d\mathbf{X}}{dS} \quad \text{ehk} \quad N_K = \frac{dX_N}{|d\mathbf{X}|} = \frac{dX_N}{dS} \quad (3.69)$$

¹⁶Mõnes õpikus nimetatakse sama asja ka geometriliseks interpretatsiooniks või geometriliseks tähenduseks

3.6. Deformatsioonitensorite füüsikaline sisu

ja

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad \text{ehk} \quad n_k = \frac{dx_n}{|d\mathbf{x}|} = \frac{dx_n}{ds}. \quad (3.70)$$

Suhet ds/dS nimetame *pikennemiskoeffitsientiks*¹⁷ ja see väljendab vektorite $d\mathbf{x}$ ja $d\mathbf{X}$ pikkuste suhet. Seda suhet võib väljendada nii \mathbf{N} kui \mathbf{n} kaudu. Vastavalt sellele, kas viitame \mathbf{N} või \mathbf{n} suunale, tähistame pikennemist kas $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ või $\lambda_{(\mathbf{n})}$. On selge, et arvuliselt $\Lambda_{(\mathbf{N})} = \lambda_{(\mathbf{n})}$, kuid $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ viitab LKle ja $\lambda_{(\mathbf{n})}$ EKle. Seega, $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ leidmiseks avaldame (3.67) abil vektori $d\mathbf{x}$ LKs:

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{\mathbf{C}_K dX_K \mathbf{C}_L dX_L}{dS^2}} = \dots = \sqrt{C_{KL} N_K N_L}. \quad (3.71)$$

$\lambda_{(\mathbf{n})}$ leidmise puhul toimime vastupidi — avaldame vektori $d\mathbf{X}$ EKs:

$$\lambda_{(\mathbf{n})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{\mathbf{c}_k dx_k \mathbf{c}_l dx_l}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{c_k m_k m_l}}. \quad (3.72)$$

¹⁷ehk lihtsalt pikennemiseks; i. k. *stretch*

Kui valime $\mathbf{N} = \mathbf{I}_1$ ja $\mathbf{n} = \mathbf{i}_1$ ning tähistame $\Lambda_{(\mathbf{N})} = \Lambda_{(1)}$ ja $\lambda_{(\mathbf{n})} = \lambda_{(1)}$, siis $N_1 = n_1 = 1$ ja $N_2 = N_3 = n_2 = n_3 = 0$ ning

$$\Lambda_{(1)} = \sqrt{C_{11}} \quad \text{ja} \quad \lambda_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{c_{11}}}. \quad (3.73)$$

Kokkuvõttes

$$C_{\underline{K}\underline{K}} = \Lambda_{(K)}^2 \quad \text{ja} \quad (c_{\underline{k}\underline{k}})^{-1} = \lambda_{(k)}^2, \quad (3.74)$$

s.t. *Cauchy deformatsioonitensori diagonaalelementide pöordväärtused ja Greeni deformatsioonitensori diagonaalelemendid võrduvad baasvektorite sihiliste joon-elementide (vektorite) pikennemiskoeffitsientide ruuduga.*

*Suhteline pikennemine*¹⁸ on defineeritud järgmiselt:

$$E_{(\mathbf{N})} = \epsilon_{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1 = \lambda_{(\mathbf{n})} - 1 \quad (3.75)$$

Kui tähistame suhtelist pikennemist vektori $\mathbf{N} = \mathbf{I}_1$ sihis $E_{(1)}$, siis

$$E_{(1)} = \Lambda_{(1)} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1. \quad (3.76)$$

¹⁸I. k. *extention*

3.6. Deformatsioonitensorite füüsikaline sisu

Viimasest saame

$$2E_{11} = (1 + E_{(1)})^2 - 1 = \Lambda_{(1)}^2 - 1 = \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}. \quad (3.77)$$

Kokkuvõttes:

$$2E_{\underline{K}\underline{K}} = (1 + E_{(K)})^2 - 1 = \Lambda_{(K)}^2 - 1 = \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}. \quad (3.78)$$

Kui $E_{(K)} \ll 1$, siis saame avaldisest (3.77) kõrgemat järku väikeste suuruste hülgamisel

$$E_{\underline{K}\underline{K}} \approx \tilde{E}_{\underline{K}\underline{K}} \approx E_{(K)} = \frac{ds - dS}{dS}. \quad (3.79)$$

Teisisõnu, *lõpmata väikeste deformatsioonide korral on suhteline pikennemine baasvektori \mathbf{I}_K suunas võrdne lõpmata väikeste deformatsioonide tensori diagonaal-elementidega $\tilde{E}_{\underline{K}\underline{K}}$.*

Analoogilised valemid EK jaoks saavad kuju

$$\begin{cases} \epsilon^{(k)} = \lambda^{(k)} - 1 = \frac{1}{\sqrt{c_{kk}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1+2e_{kk}}} - 1, \\ 2e_{\underline{k}\underline{k}} = 1 - (1 + \epsilon^{(k)})^{-2} = 1 - \lambda^{(k)-2} = \frac{ds^2 - dS^2}{ds^2}, \\ e_{\underline{k}\underline{k}} \approx \tilde{e}_{\underline{k}\underline{k}} \approx \epsilon^{(k)}. \end{cases} \quad (3.80)$$

Nihkedeformatsioonidele E_{KL} tähenduse andmiseks vaatleme kahte ristuvat vektorit $\mathbf{I}_1 dX_1$ ja $\mathbf{I}_2 dX_2$, mis deformeeruvad vektoriteks $\mathbf{C}_1 dX_1$ ja $\mathbf{C}_2 dX_2$ (vt. joon. 3.5), mille vaheline nurk on $\vartheta_{(1,2)}$. Seega,

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_{(1,2)} &= \frac{(\mathbf{C}_1 dX_1) \cdot (\mathbf{C}_2 dX_2)}{|\mathbf{C}_1 dX_1| |\mathbf{C}_2 dX_2|} = \frac{(\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2) dX_1 dX_2}{C_{12} |\mathbf{C}_1| |\mathbf{C}_2| |dX_1| |dX_2|} \\ &= \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}} \sqrt{1+E_{22}}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Kasutades avaldist (3.76) saame viimasest

$$2E_{12} = (1 + E_{(1)}) (1 + E_{(2)}) \cos \vartheta_{(1,2)}. \quad (3.82)$$

3.6. Deformatsioonitensorite füüsikaline sisu

Kui suhtelised pikenedised $E_{(K)}$ on väikesed, siis

$$2E_{12} \approx 2\tilde{E}_{12} \approx \cos \vartheta_{(1,2)}. \quad (3.83)$$

Algse täisnurga muutus

$$\Gamma_{(1,2)} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{(1,2)} \quad (3.84)$$

on lõpmata väikeste deformatsioonide korral väike. Järelikult $\sin \Gamma_{(1,2)} = \cos \vartheta_{(1,2)} \approx \Gamma_{(1,2)}$ ja

$$2E_{12} \approx 2\tilde{E}_{12} \approx \Gamma_{(1,2)}. \quad (3.85)$$

Kokkuvõttes: kui $\Gamma_{(K,L)} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{(K,L)}$ on \mathbf{I}_K ja \mathbf{I}_L vahelise algse täisnurga muut, siis

$$\begin{cases} 2E_{KL} = (1 + E_{(K)}) (1 + E_{(L)}) \cos \vartheta_{(K,L)} = (1 + E_{(K)}) (1 + E_{(L)}) \sin \Gamma_{(K,L)}, \\ 2E_{KL} \approx 2\tilde{E}_{KL} \approx \cos \vartheta_{(K,L)} = \sin \Gamma_{(K,L)}, & \text{kui } E_{(K)} \ll 1, E_{(L)} \ll 1, \\ 2E_{KL} \approx 2\tilde{E}_{KL} \approx \Gamma_{(K,L)}, & \text{kui } \Gamma_{(K,L)} \ll 1. \end{cases} \quad (3.86)$$

Analoogilise mõttekäigu rakendamine Euleri deformatsioonitensorile e_{kl} ei annaks nii praktilist tulemust, sest $\vartheta_{(k,l)}$ tähistaks nurka, mis deformatsiooni käigus muutub täisnurgaks, ja $\gamma_{(k,l)}$ vastavat muutust.

Lõpnata väikeste deformatsioonid korral aga teatavasti kaob erinevus LK ja EK vahel ning vastavalt seostele (3.66) võime kirjutada

$$\tilde{2}E_{KL} \approx 2\tilde{e}_{kl} \approx \Gamma_{(K,L)} \approx \gamma_{(k,l)}, \quad \text{kui} \quad K = k, L = l. \quad (3.87)$$

Seega, lõpnata väikeste deformatsioonide tensorite komponentid \tilde{E}_{KL} ja \tilde{e}_{kl} ($K \neq L$ ja $k \neq l$) on (ligikaudu) võrdsed DRK baasvektorite \mathbf{I}_K ja \mathbf{I}_L vahelise täismuruga muuduga $\Gamma_{(K,L)} \approx \gamma_{(k,l)}$.

3.7. 1D deformatsioonimõõdud ja nende seos deformatsioonitensoritega

3 - 38

3.7 1D deformatsioonimõõdud ja nende seos deformatsioonitensoritega

Meenutame tugevusõpetuse kursuses tehtud tõmbekatset, mille korral katsetseha algpikkusega l_0 pikeneb suuruse δ võrra, omades seega lõpul pikkust $l = l_0 + \delta$. Toimunud deformatsiooni iseloomustamiseks võib kasutada erinevaid *deformatsiooni mõõtte*¹⁹:

- *pikenemiskoeffitsient ehk pikenemine*²⁰

$$\lambda = \frac{l}{l_0} \quad (3.88)$$

- *insenerideformatsioon* (ka Cauchy deformatsioon)²¹

$$\varepsilon_e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\delta}{l_0} = \lambda - 1 \quad (3.89)$$

¹⁹I. k. strain measures

²⁰I. k. stretch, stretch ratio,

²¹I. k. engineering strain, Cauchy strain

- *logaritmiline deformatsioon* (ka tegelik deformatsioon või Hencky deformatsioon)²²

$$\varepsilon_{\log} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \dots \approx \frac{\delta}{l_0} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l_0^2} \quad (3.90)$$

- *Lagrange'i deformatsioon* (ka Greeni deformatsioon)²³

$$\varepsilon_L = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \dots = \frac{\delta}{l_0} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l_0^2} \quad \text{ehk} \quad \varepsilon_L = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \quad (3.91)$$

- *Euleri-Almansi deformatsioon*²⁴

$$\varepsilon_{EA} = \frac{l^2 - l_0^2}{2l^2} = \dots = \frac{\delta}{l} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l^2} \quad \text{ehk} \quad \varepsilon_{EA} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (3.92)$$

²²I. k. *logarithmic strain*, also called *natural strain*, *true strain* or *Hencky strain*

²³I. k. *Lagrange strain*, *Green strain*

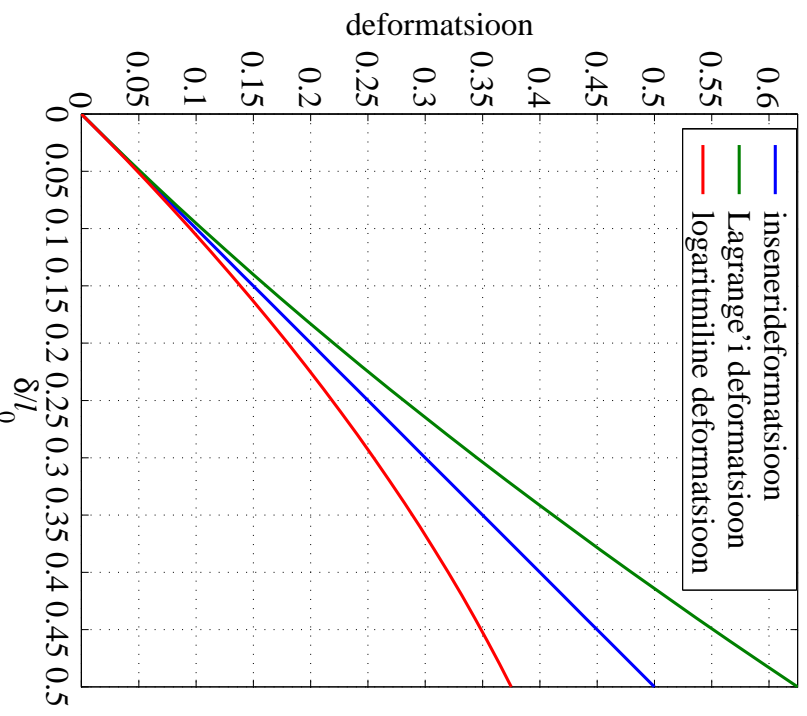
²⁴I. k. *Euler-Almansi strain*

3.7. 1D deformatsioonimõõdud ja nende seos deformatsioonitensoriga

3 - 40

Joonise 3.7 põhjal on selge, et kui $\delta/l_0 < 0, 1$, siis langevad inseneri, Lagrange'i ja logaritmiline deformatsioon praktiliselt kokku. Suurte deformatsioonide korral aga erinevad vaadeldavad kolm deformatsioonimõõtu oluliselt. Kõige sagedamini kasutatakse suurte deformatsioonide kirjeldamiseks Lagrange'i deformatsiooni.

Euleri-Almansi deformatsioonimõõtu võrreldakse pikkuse muutuse δ deformeerunud katsekeha pikkusega l ja seetõttu on selle deformatsiooni mõõdu otsene võrdlemine vaadeldud kolmikuga komplitseeritud.



Joonis 3.7: Erinevate deformatsioonimõõtude võrdlus

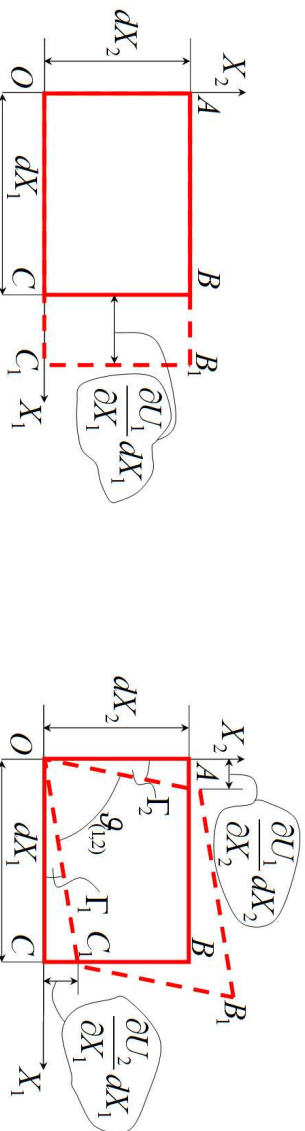
Käesolevas kursuses on l_0 analoogiks dS ja l analoogiks ds . Järelikult vastab

- insenerideformatsioonile lõpmata väikesete deformatsioonide tensor $\tilde{E}_{KL} \approx \tilde{e}_{kl}$ (valemid (3.79) ja (3.89)),
- Lagrange'i deformatsioonile lõpmata väikesete deformatsioonitensor E_{KL} (valemid (3.77) ja (3.91)),
- Euleri-Almansi deformatsioonile aga Euleri deformatsioonitensor e_{kl} (valemid (3.80)₂ ja (3.92)).

Tugevusõpetus versus pideva keskkonna mehaanika. Käesoleva alajaotuse lõpetuseks esitame seosed tugevusõpetuses kasutatud deformatsioonide $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{yz}$ ja lõpmata väikeste deformatsioonide tensori \tilde{E}_{KL} komponentide vahel

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} & \tilde{E}_{13} \\ \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} & \tilde{E}_{23} \\ \tilde{E}_{31} & \tilde{E}_{32} & \tilde{E}_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.93)$$

3.7. 1D deformatsioonimõõdud ja nende seos deformatsioonitensoriga



Joonis 3.8: Normaaldeformatsioon (vasakul) ja nihke ehk nihkedeformatsioon (paremal)

Vastavalt joonisele 3.8 on normaaldeformatsioon²⁵

$$\tilde{E}_{11} = E_{(1)} = \frac{OC_1 - OC}{OC} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \quad (3.94)$$

ja lõpmata väikestele deformatsioonidele vastav nihke ehk nihkedeformatsioon²⁶

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta_{(1,2)} = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} = 2\tilde{E}_{12}. \quad (3.95)$$

²⁵I. k. normal strain

²⁶I. k. shear or shear strain

3.8 Deformatsioonielipsoid

Deformatsiooni iseloomu deformeerumata keha punkti $P(\mathbf{X})$ ümbruses või deformeerunud keha punkti $p(\mathbf{x})$ ümbruses saab illustreerida Cauchy poolt pakutud geomeetrilise meetodi abil. Allpool esitatud tulemused on otseselt rakendatavad suvalisele sümmetrilisele teist järku tensorile.

Vektor $d\mathbf{X}$ LK-s määrab elementaar sfääri

$$\delta_{KL}dX_KdX_L = dS^2 = K^2, \quad (3.96)$$

✓

kus K on sfääri raadius. Deformeerumisel liigub materiaalne punkt X_K ruumipunkti x_k ja materiaalsel punkti X_K ümbritsenud sfääri punktid ruumipunkti x_k ümbritsevaks teist järku pinna punktideks

$$c_{kl}dx_kdx_l = dS^2 = K^2. \quad (3.97)$$

Valemite (3.35) põhjal $c_{kl} = \delta_{KL}X_{K,k}X_{L,l} = X_{K,k}X_{K,l}$. Kuna c_{kl} on positiivselt määratud, siis see teist järku pind on ellipsoid. Ellipsoidi (3.97) nimetatakse *materialseks deformatsioonielipsoidiks*²⁷.

²⁷I. k. *material strain ellipsoid*

3.8. Deformatsioonielipsoid

Analooiliselt — elementaar sfäärile deformeerunud olekus

$$\delta_{kl}dx_kdx_l = ds^2 = k^2 \quad (3.98)$$

vastab ellipsoid algolekus

$$C_{KL}dX_KdX_L = ds^2 = k^2. \quad (3.99)$$

Avaldisega (3.99) määratud ellipsoidi nimetatakse *ruumiliseks deformatsioonielipsoidiks*²⁸ (ruumiline viitab siin endiselt EK-le, mitte aga 3D-le).

Vaatleme kahte vektorit $d\mathbf{X}_1 \perp d\mathbf{X}_2$, st. $d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = 0$. Kuna vektorid $d\mathbf{X}_\alpha$ on avaldatavad nii baasi \mathbf{I}_K kui \mathbf{c}_k kaudu, siis

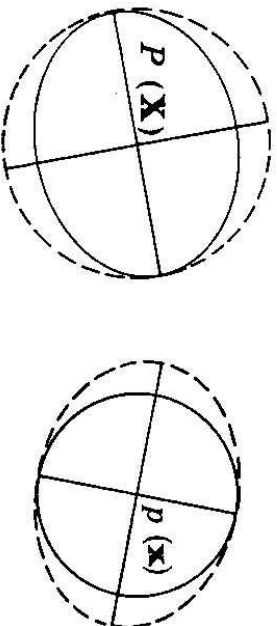
$$d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = \dots\dots\dots = c_{kl}dx_k^1dx_l^2 = 0. \quad (3.100)$$

•

Seega on meil ka peale deformatsiooni kaks ristuvat vektorit — üks komponendidega $c_{kl}dx_k^1$ ja teine komponentidega dx_l^2 (või vastupidi). Teisisõnu, kaks ristuvat vektorit LK-s deformeeruvad kaheks ristuvaks vektoriks EK-s (sealjuures nende vektorite siht ja pikkus võivad muutuda).

²⁸I. k. *spatial strain ellipsoid*

Ellipsoidil on teatavasti 3 ristuvat pooltelge. Eeldame algul, et kõik poolteljed on erineva pikkusega. Seega materiaalse deformatsioonielipsoidi puhul leidub algses sfääris kolm ristuvat raadiust, mis deformeeruvad ellipsoidi pooltelgedeks. Deformatsiooni käigus muutub nende pikkus ja orientatsioon (siht), kuid nad jäävad omavahel risti. Neid telgi nimetatakse *deformatsioonielipsoidi peatelgedeks*.



Joonis 3.9: Ruumiline (—) ja materiaalne (- - -) deformatsioonielipsoid

Kogu toodud mõttekäik kehtib ka ruumilise deformatsioonielipsoidi kohta. Situdes omavahel ruumilise ja materiaalse deformatsioonielipsoidi saab näidata, et *deformatsioon pöörab ruumilise deformatsioonielipsoidi X-s materiaalseks deformatsioonielipsoidiks x-s ja vastupidi*.

3.8. Deformatsioonielipsoid

3 - 46

Deformatsioon viib sfääri diameetri \mathbf{X} -s ellipsoidi diameetriks \mathbf{x} -s. Ellipsoidi ja sfääri diameetrite pikkuste suhe määrab ära *pikenemiskoeffitsendi* $\Lambda = ds/dS$ vastavas sihis. Pikenemiskoeffitsente kolmes deformatsioonielipsoidi peatelje sihis nimetatakse *peapikenemisteks* ja tähistatakse $\Lambda_{(1)} \geq \Lambda_{(2)} \geq \Lambda_{(3)}$, kusjuures $\Lambda_{(1)} = \max \Lambda$ ja $\Lambda_{(3)} = \min \Lambda$.

Eelnev baseerus eeldusel, et ellipsoidi pooltelgede pikkused on erinevad. Vastupidisel juhul saab leida lõpmata palju peatelgi.

✓

- Kaks pooltelge on võrdsed, kolmas erinev ...
- Kõik kolm pooltelge on võrdsed ...

3.9 Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad

Alajaotuses 3.8 näitasime, et punktis $P(\mathbf{X})$ leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat suunda, mis deformatsiooni käigus lähevad deformatsioonielipsoidi kolmeks peateljeks punktis $p(\mathbf{x})$ ja vastupidi. Määrame nüüd peasuunad analüütiliselt, st., leiame kolm ristuvat suunda, millest kahe puhul pikennemiskoeffitsendid omavad ekstremaalseid väärtusi. Valemite (3.72) põhjal

$$\Lambda_{(\mathbf{N})}^2 = C_{KL} N_K N_L, \quad (3.101)$$

kus $N_K = dX_K/dS$. Peasuundade leidmiseks tuleb minimeerida funktsioon (3.101) \mathbf{N} suhtes lisatingimusel, et \mathbf{N} on ühikvektor, st.,

$$\delta_{KL} N_K N_L = 1. \quad (3.102)$$

Saadud lisatingimusega ekstreemumülesande lahendamiseks kasutame Lagrange'i meetodit²⁹ mille põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\frac{\partial}{\partial N_M} [C_{KL} N_K N_L - C(\delta_{KL} N_K N_L - 1)] = 0, \quad (3.103)$$

²⁹Lk. Lagrange's method of multipliers

3.9. Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad

kus tundmatut C nimetatakse Lagrange'i multiplikaatoriks. Viimane omakorda annab meile kolm lineaarset homogenset võrrandit ühikvektori komponentide N_K leidmiseks —

$$(C_{KL} - C\delta_{KL}) N_L = 0 \quad (3.104)$$

Tensori E_{KL} definitsiooni põhjal $C_{KL} = \delta_{KL} + 2E_{KL}$ saab võrrandele (3.104) anda kuju

$$(E_{KL} - E\delta_{KL}) N_L = 0, \quad 2E = C - 1. \quad (3.105)$$

Pole tähtis kumba saadud võrrandisüsteemidest lahendada — kui vaja, saab hiljem minna ühelt lahendilt teisele. Meie lähtume võrrandisüsteemist (3.104). Viimasel eksisteerib mittetriviaalne lahend juhul kui tema *karakteristlik determinant* on null, st.,

$$|C_{KL} - C\delta_{KL}| = 0. \quad (3.106)$$

Selle determinandi arendamise tulemusena saadakse *karakteristlik võrrand* (mis kujutab endast kuupvõrrandit)

$$-C^3 + \text{I}_C C^2 - \text{II}_C C + \text{III}_C = 0 \quad (3.107)$$

tundmatu C määramiseks.

Suurused

$$\left\{ \begin{array}{l} I_C = C_{KK} = \dots \\ II_C = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \\ III_C = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (3.108)$$

on deformatsioonitensori C_{KL} invariandid (koordinaatteisenduste suhtes $\mathbf{X} - s$).

Karakteristlik võrrand (3.107) omab kolme juurt C_α , $\alpha = 1, 2, 3$, mida nimetatakse *omaväärtusteks* ehk *peaväärtusteks*³⁰. Võrrandisüsteemi (3.104) abil saame nüüd igale peaväärtusele C_α seada vastavusse *omavektori* ehk *peavektori* \mathbf{N}_α , mis määrab *peasuuna*. Saab tõestada, et sümmeetrilise tensori peaväärtused on reaalsed ning neile vastavad peasuunad on omavahel risti ja eksisteerivad alati. •

Kui koordinaadid on valitud peasuundades (st., baasivektorite siht ühtib peavektortite sihtidega igas materiaalses punktis), siis peavektori \mathbf{N}_α komponendid ★

$$N_{K\alpha} = \delta_{K\alpha} \quad (3.109)$$

³⁰Ik. eigenvalues or principal values or proper numbers

3.9. Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

ja deformatsioonitensori komponendid

$$C_{\alpha K} = C_\alpha \delta_{\alpha K}. \quad (3.110)$$

Kokkuvõttes võib öelda, et *peaväärtused võrduvad deformatsioonitensori normaalkomponentidega peatelgedes (peadeformatsioonidega). Nihkedeformatsioonid selliste telgedes (koordinaatide) puhul puuduvad.*

Deformatsioonitensori invariandid saavad nüüd tunduvalt lihtsamad kujud —

$$\left\{ \begin{array}{l} I_C = C_1 + C_2 + C_3, \\ II_C = C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2, \\ III_C = C_1 C_2 C_3. \end{array} \right. \quad (3.111)$$

†

Deformatsioonitensori peaväärtuste ja peasuundade ning deformatsioonielipsoidi peatelgede vaheline seos

Peasuunad \mathbf{N}_α määravad ära deformatsioonielipsoidi peateljed LK-s \mathbf{X} , st., ruumilise deformatsioonielipsoidi võrrand saab nüüd kujul

$$ds^2 = k^2 = C_{KL} dX_K dX_L = C_\alpha (dX_\alpha)^2 \equiv \sum_\alpha C_\alpha (dX_\alpha)^2. \quad (3.112)$$

Seega peatelgedes deformatsioonielipsoidi võrrand lihtsustub.

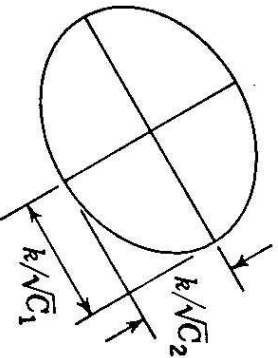
DRK puhul on ellipsoidi poolteljed

$$a_\alpha^s = \frac{ds}{\sqrt{C_\alpha}} \equiv \frac{k}{\sqrt{C_\alpha}} \quad (3.113)$$

ja pikenemiskoeffitsent peatelgedes

$$\Lambda_\alpha = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KL} N_K N_L} = \sqrt{C_\alpha} \stackrel{(3.113)}{=} \frac{ds}{a_\alpha^s} \quad (3.114)$$

ning seega $a_\alpha^s = dS$, s.o. \mathbf{N}_α sihilise joonelemendi pikkus.



Joonis 3.10: Ruumilise deformatsioonielipsoidi poolteljed

EK \mathbf{x} puhul avaldub materiaalne deformatsioonielipsoid kujul

$$dS^2 = K^2 = c_{kl} dx_k dx_l = c_\alpha (dx_\alpha)^2 \equiv \sum_\alpha c_\alpha (dx_\alpha)^2 \quad (3.115)$$

ja poolteljed DRK-s

$$a_\alpha^m = \frac{dS}{\sqrt{c_\alpha}} \equiv \frac{K}{\sqrt{c_\alpha}}. \quad (3.116)$$

Suurus c_α on siin deformatsioonitensori c_{kl} omaväärtus. Pikenemiskoeffitsendid

$$\lambda_\alpha = \frac{ds}{dS} = \frac{1}{\sqrt{c_{kl} n_k n_l}} = \frac{1}{\sqrt{c_\alpha}} = \frac{a_\alpha^m}{dS} \quad (3.117)$$

ja nüüd seega $a_\alpha^m = ds$, s.o. \mathbf{n}_α silhise joonelemendi pikkus. Valemite (3.114) ja (3.117) põhjal

$$C_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} = \lambda_\alpha^2 \equiv \Lambda_\alpha^2. \quad (3.118)$$

Kokkuvõttes:

- Ruumilise deformatsioonielipsoidi pooltelgede pikkused LK-s \mathbf{X} on pöördvõrdelised materiaalse deformatsioonielipsoidi pooltelgede pikkustega EK-s \mathbf{x} .
- Samuti on pöördvõrdelised vastavad omaväärtused C_α ja c_α .
- Peaväärtus C_α on võrdne pikennemiskoeffitsendi ruuduga deformatsioonielipsoidi vastavas peasihis α .
- Peatelgede silhis omab Λ ekstreemaalseid väärtusi.

3.9. Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad

3 - 54

Seosed Greeni ja Cauchy deformatsioonitensori invariantide vahel

Kuna $C_\alpha = \Lambda_\alpha^2 \equiv \lambda_\alpha^2$ ja $\lambda_\alpha = 1 + e_\alpha$, siis

$$\left\{ \begin{array}{l} I_C = I_{-1} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (1 + e_1)^2 + (1 + e_2)^2 + (1 + e_3)^2, \\ II_C = II_{-1} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 = \\ = (1 + e_1)^2 (1 + e_2)^2 + (1 + e_2)^2 (1 + e_3)^2 + (1 + e_3)^2 (1 + e_1)^2, \\ III_C = III_{-1} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = (1 + e_1)^2 (1 + e_2)^2 (1 + e_3)^2, \\ I_c = I_{-1} = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}, \\ II_c = II_{-1} = \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} + \lambda_2^{-2} \lambda_3^{-2} + \lambda_3^{-2} \lambda_1^{-2}, \\ III_c = III_{-1} = \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} \lambda_3^{-2}. \end{array} \right. \quad (3.119)$$

Siin C vastab tensorile C_{KL} ja c tensorile c_{kl} . Samuti on võetud arvesse, et $C_\alpha = c_\alpha^{-1}$ ja vastupidi, $c_\alpha = C_\alpha$. Otsitavad seosed

$$I_c = \frac{II_C}{III_C}, \quad II_c = \frac{I_C}{III_C}, \quad III_c = \frac{1}{III_C} \quad (3.120)$$

saame valemist (3.119).

Kuna $0 < \lambda_\alpha < \infty$ siis ka $0 < I, II, III < \infty$.

Deformatsioonide puudumisel (jäiga keha puhul) $e_\alpha = 0$ ja $\lambda_\alpha = 1$, $\alpha = 1, 2, 3$ ning seega

$$I = II = 3 \text{ ja } III = 1 \quad (3.121)$$

Seosed Lagrange'i ja Greeni deformatsioonitensori invariantide vahel

Lagrange'i deformatsioonitensori invariantid avalduvad läbi peaväärtuste E_α analoogselt Greeni deformatsioonitensori invariantidega (3.111) —

$$\begin{cases} I_E = E_1 + E_2 + E_3, \\ II_E = E_2E_3 + E_1E_3 + E_1E_2, \\ III_E = E_1E_2E_3. \end{cases} \quad (3.122)$$

3.9. Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad

Kasutades nüüd valemid (3.111) ja (3.122) ning arvestades, et valemi (3.105)₂ põhjal $2E_\alpha = C_\alpha - 1$, saame seosed

$$\begin{cases} I_C = 3 + 2I_E, \\ II_C = 3 + 4I_E + 4II_E, \\ III_C = 1 + 2I_E + 4II_E + 8III_E, \\ 2I_E = -3 + I_C, \\ 4II_E = 3 - 2I_C + II_C, \\ 8III_E = -1 + I_C - II_C + III_C. \end{cases} \quad (3.123)$$

Seosed Euleri ja Cauchy deformatsioonitensori invariantide vahel saadakse sidudes tensorite c_{kl} ja e_{kl} invariantid. Tuleneks on duaalsed seosed eelmistele —

$$\begin{cases} I_e = 3 - 2I_e, \\ II_e = 3 - 4I_e + 4III_e, \\ III_e = 1 - 2I_e + 4III_e - 8III_e. \end{cases} \quad (3.124)$$

Invariantide III_C ja III_e geomeetriline tõlgendus

Vaatleme peatelgede sihilisi joonelemente ds_α ja dS_α . Elementaarruumalad $dV = dS_1 dS_2 dS_3$ ja $dv = ds_1 ds_2 ds_3$. Kuna

$$\frac{ds_\alpha}{dS_\alpha} = \Lambda_\alpha = \lambda_\alpha,$$

siis

$$\frac{dv}{dV} = \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{dS_1 dS_2 dS_3} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \stackrel{(3.119)}{=} \sqrt{\text{III}_C} \stackrel{(3.119)}{=} \frac{1}{\sqrt{\text{III}_e}}.$$

Seega

$$dv = \sqrt{\text{III}_C} dV \text{ ja } dV = \sqrt{\text{III}_e} dv. \quad (3.125)$$

Kokkuvõttes —*invariandid III_C ja III_e iseloomustavad ruumala muutust.*

Lisada, et $j^2 = \sqrt{\text{III}_C}$, vt. isohooriline def.

3.9. Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

3.9.1 Pöörde põhiteoreem

Vaatleme peavektorite kolmikuid \mathbf{n}_α ja \mathbf{N}_α (komponentkujul $n_{k\alpha}$ ja $N_{K\alpha}$). Defi-
neerime pöördetensorid \mathbf{R} ja \mathbf{R}^{-1} :

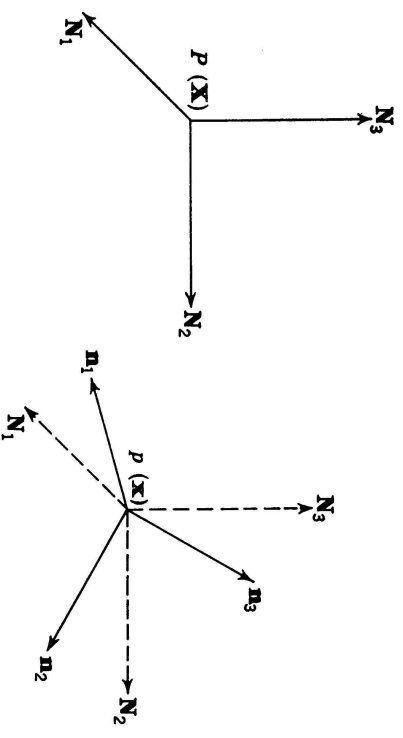
$$n_{k\alpha} = R_{kK} N_{K\alpha}, \quad N_{K\alpha} = R_{Kk}^{-1} n_{k\alpha}. \quad (3.126)$$

Seega pöördetensor R_{kK} pöörab Greeni deformatsioonitensori peavektorid \mathbf{N}_α Cauchy deformatsioonitensori peavektoriteks \mathbf{n}_α ja vastupidi, pöördetensor

R_{Kk}^{-1} pöörab Cauchy deformatsioonitensori peavektorid \mathbf{n}_α Greeni deformatsioonitensori peavektoriteks \mathbf{N}_α . Kuna peavektorid moodustavad ortonormeeritud kolmikku, siis on selge, et

$$n_{k\alpha} n_{\alpha l} = \delta_{kl}, \quad \text{ja} \quad N_{K\alpha} N_{\alpha L} = \delta_{KL}. \quad (3.127)$$

Ülesanne. $\mathbf{N}_1 = [0, 1, 0]$, $\mathbf{N}_2 = [-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]$, $\mathbf{N}_3 = [1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]$. Leida maatrikskujul $[N_{K\alpha}]$, $[N_{\alpha K}]$ ja $[N_{K\alpha} N_{\alpha L}]$.



Joonis 3.11: Peatelgede siire koos pöördega

Korrutame esimese avaldistest (3.126) komponendiga $N_{\alpha K}$ ja teise komponendiga $n_{\alpha k}$ ning saame

$$R_{kK} = n_{k\alpha} N_{\alpha K} \quad \text{ja} \quad R_{Kk}^{-1} = N_{K\alpha} n_{\alpha k}. \quad (3.128)$$

Pöördetensor \mathbf{R} on ortogonaalne, st. $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ning loomulikult kehtivad võrdused $R_{kK}^{-1} R_{Kl} = \delta_{kl}$ ja $R_{kK} R_{Lk} = \delta_{KL}$. Kui peateljed deformatsiooni käigus ei pöördu, siis $\mathbf{R} = \mathbf{I} = \mathbf{R}$, ehk $R_{kK} = \delta_{kK} = R_{Kk}^{-1}$.

Toupin (1956) tõestas, et

1. Greeni ja Cauchy deformatsioonitensorite n -ndad astmed on seotud \surd järgmiselt

$$\begin{cases} C_{KL}^{-n} = R_{Kk}^{-1} {}^n R_{kK} R_{Ll} \\ c_{kl}^{-n} = R_{kK} {}^n C_{KL} R_{Ll}^{-1} \end{cases} \quad (3.129)$$

ning lisaks veel, et

$$C_{KL}^{-n} = \sum_{\alpha} (C_{\alpha})^{-n} N_{\alpha K} N_{\alpha L} \quad \text{ja} \quad c_{kl}^{-n} = \sum_{\alpha} (c_{\alpha})^{-n} n_{\alpha k} n_{\alpha l}. \quad (3.130)$$

3.9. Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad

2. Deformatsioonigradiendid avalduvad kujul

$$\begin{cases} x_{k,K} = R_{kL} {}^{\frac{1}{2}} C_{LK} = R_{lK} {}^{-\frac{1}{2}} c_{kl}, \\ X_{K,k} = R_{Kl} {}^{\frac{1}{2}} c_{lk} = R_{Lk} {}^{-\frac{1}{2}} C_{KL}. \end{cases} \quad (3.131)$$

Viimastest omakorda

$$R_{kK} = x_{k,L} {}^{-\frac{1}{2}} C_{LK} \quad \text{ja} \quad R_{Kk}^{-1} = X_{K,l} {}^{-\frac{1}{2}} c_{lk}. \quad (3.132)$$

Lisaks saab näidata, et siirdgradient

$$U_{L,M} = R_{KL} {}^{\frac{1}{2}} C_{LM} - \delta_{KM} \quad (3.133)$$

ja leida tensorite $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ ja \mathbf{R} vahelised seosed

$$R_{KM} = \left(\delta_{KL} + \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \right) {}^{-\frac{1}{2}} C_{LM}. \quad (3.134)$$

Väikeste deformatsioonigradiendid puhul saame viimasest

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - \delta_{KM}, \quad (3.135)$$

ning arvestades (3.133) analoogi EK jaoks, et

$$\tilde{R}_{KM} \approx \delta_{kK} \delta_{mM} \tilde{r}_{km}. \quad (3.136)$$

mis kinnitab veelkord termini lõpmata väike pöörde õigsust suuruste \tilde{R}_{KM} ja \tilde{r}_{km} jaoks.

Nüüd ongi paras aeg sõnastada **pöörde põhiteoreem** —

Iga joonlemendi deformatsiooni mingis punktis võib vaadelda koosnevana kolmest osast — 1) paralleellükkest, 2) peatelgede jäigast pöördest ja 3) pikkuse muudust peatelgede sihhis.

Vaatleme vektorit dX_K \mathbf{X} -s, mis läheb deformatsiooni käigus vektoriks $dx_k = x_{k,K} dX_K$. Kasutades seoseid (3.131)₁ saame

$$dx_k = \underbrace{\delta_{kL} R_{LM}}_{R_{kM}} \underbrace{C_{MK}}^{\frac{1}{2}} dX_K = \underbrace{c_{kl}^{-\frac{1}{2}} R_{lm}}_{R_{lk}} \delta_{mK} dX_K. \quad (3.137)$$

Avaldisele (3.137) saab anda järgmise tõlgenduse (joonis 3.12).

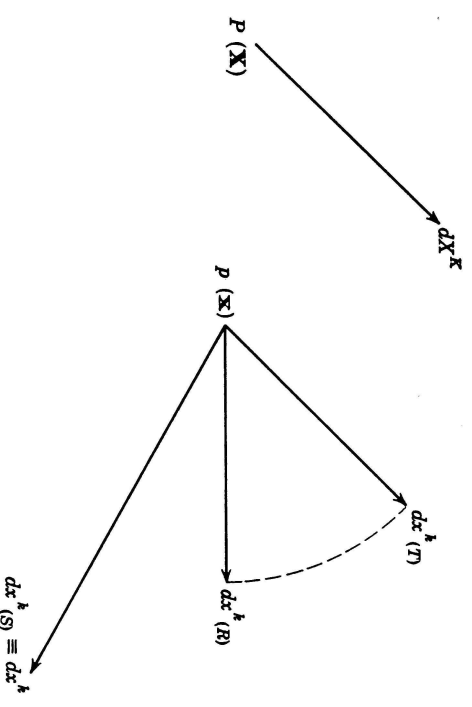
3.9. Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

1. Vektori $d\mathbf{X}$ paralleellükke³¹ (koos peatelgedega) vektoriks $dx^{(T)}$.
2. Vektori $dx^{(T)}$ jäik pööre³² (koos peatelgedega) vektoriks $dx^{(R)}$.
3. Läbi peatelgede pikkuste muutmise³³ muudetakse vektor $dx^{(R)}$ vektoriks $dx^{(S)} = dx$. Täiendavat pöret ei toimu siin siis ja ainult siis, kui $d\mathbf{X}$ on paralleelne tiheda tensori C_{KL} peavektoritest.

Valemities on eelnev esitatav kujul

$$\begin{cases} dx_k^{(T)} = \delta_{kK} dX_K \\ dx_k^{(R)} = R_{kl} dx_l^{(T)} \\ dx_k = c_{kl}^{-\frac{1}{2}} dx_l^{(R)} \end{cases} \quad (3.138) \quad \begin{matrix} \mathbf{p}(\mathbf{x}) & \nearrow & dx^k \\ & & dx^k(S) \\ & \searrow & dx^k(R) \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}) & \nearrow & dx^k \\ & \nearrow & dx^k \end{matrix}$$

Kui asendame (3.138)₁ \rightarrow (3.138)₂ \rightarrow (3.138)₃, siis saame (3.137), mis tõestabki teoreemi.



³¹Ik. translation
³²Ik. rotation
³³Ik. stretch

Joonis 3.12: Joonlemendi deformatsiooni dekompositsioon (indeksid K ja k peaksid olena all).

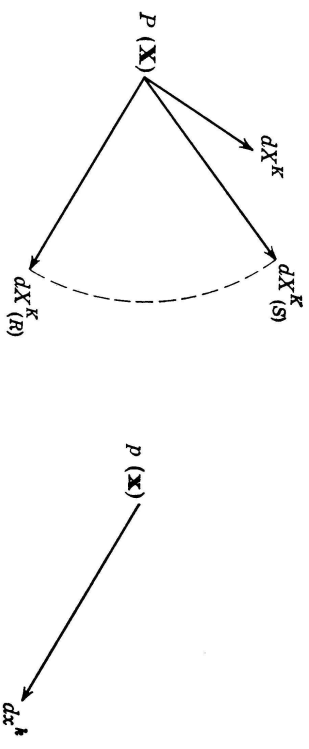
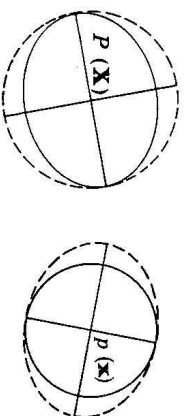
Joonis 3.13 esitab sama protsessi teises järjekorras — pikennemine, pööre, lüke, st.,

$$\begin{cases} dX_M^{(S)} = C_{MK}^{\frac{1}{2}} dX_K, \\ dX_L^{(T)} = R_{LM} dX_M^{(S)}, \\ dx_k = \delta_{kL} dX_L^{(R)}. \end{cases} \quad (3.139)$$

Seega sellise dekompositsiooni puhul pole operatsioonide järjekord tähtis.

Eelnev mõttekäik on esitatav ka deformatsioonilipsoidide kaudu —

1.
2.
3.



Joonis 3.13: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon (indeksid K ja k peaksid olema all).

3.10. Deformatsioonigradiendi polaardekompositsioon

3.10 Deformatsioonigradiendi polaardekompositsioon

Teine väga levinud lähenemisviis eelmises alajaotuses käsitletule on järgmine. Deformatsioonigradiendit esitatakse kahe tensori korrutisena (vt. joonist 3.14):

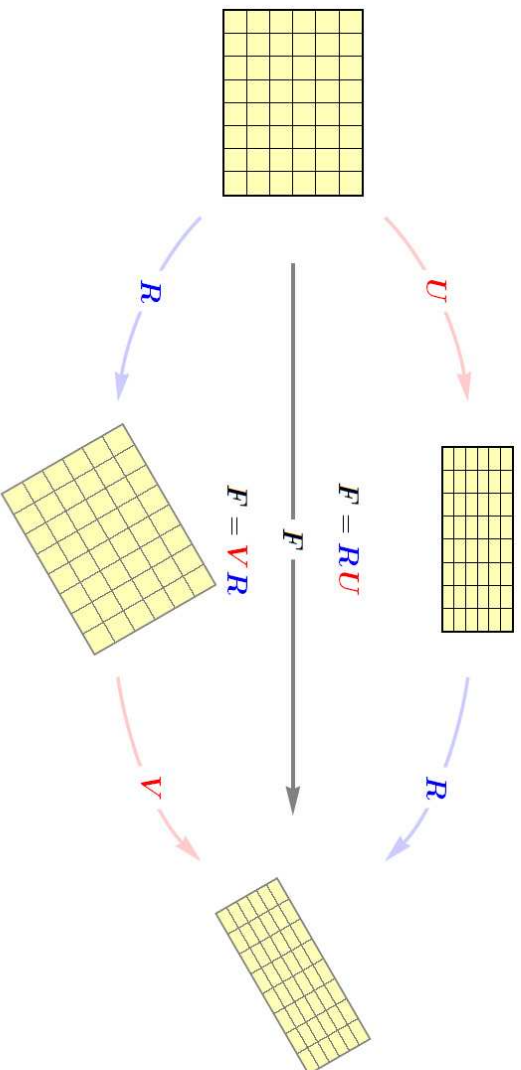
$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \quad (3.140)$$

- \mathbf{R} – pöördetensor (ortogonaalne),
- \mathbf{U} – parempoolne pikennemistensor³⁴,
- \mathbf{V} – vasakpoolne pikennemistensor³⁵,
- \mathbf{U} ja \mathbf{V} on sümmeetrilised ja positiivselt määratud.

³⁴I. k. right stretch tensor

³⁵I. k. left stretch tensor

Polar Decomposition: Graphical Interpretation



Relation between left and right stretch tensors

$$V = R U R^T \quad U = R^T V R$$

Joonis 3.14: Polaardekompositsioon

3.10. Deformatsioonigradiendi polaardekompositsioon

3 - 66

Deformatsioonitensorid defineeritakse sel juhul pisut teisiti ja ka deformatsiooni-tensorite nimed on teised.

Parempoolne Cauchy-Greeni deformatsioonitensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{U}^{-2} \quad (3.141)$$

Vasakpoolne Cauchy-Greeni deformatsioonitensor

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2, \quad \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2} \quad (3.142)$$

Seosed „senikasutatud” ja „varendefineeritud” deformatsioonitensoritega:

- Cauchy DT: $c_{kl} \leftrightarrow \mathbf{C}$,
- Greeni DT: $C_{KL} \leftrightarrow \mathbf{B}^{-1}$,
- Fingeri DT: $c^{-1kl} \leftrightarrow \mathbf{B}$,
- Piola DT: $C^{-1}_{KL} \leftrightarrow \mathbf{C}^{-1}$.

3.11 Pidevustingimused ehk sobivustingimused

Kolmemõõtmelises ruumis on deformatsioonitensori kuus (sõltumatut) komponenti seotud siirdevektori kolme komponendiga läbi kuue võrrandi (vt. (3.53) lk.26). Näiteks,

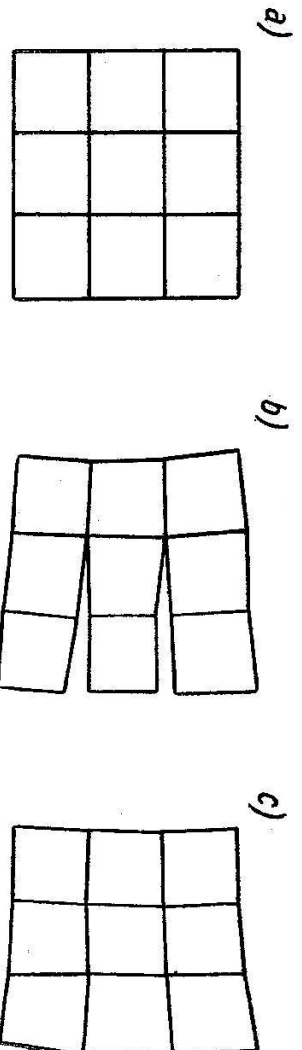
$$2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} = 2E_{LK} = U_{K;L} + U_{L;K} + U_{N;K}U_{N;L}. \quad (3.143)$$

Kui on teada siirdevektori komponendid U_K , siis valemi (3.143) põhjal saab määrata kas tensori C_{KL} või E_{KL} kuus komponenti. Kui aga on vastupidi, st., et teada on tensori C_{KL} või E_{KL} kuus komponenti, siis on meil kolme tundmatu määramiseks kuus võrrandit. Järelikult on meil tegu ülemääratud süsteemiga. Selleks, et siirdekomponendid U_K oleks üheselt määratavad ja pidevad (siirdeväli peab olema üheselt määratud ja pidev) tuleb nüüd deformatsiooni tensori komponentidele peale panna lisatingimused. Neid tingimusi nimetatakse *pidevustingimusteks* ehk *sobivustingimusteks*³⁶. Kui siirdekomponendid U_K on ette teada (siirdekomponendid on valitud põhimuutujateks) siis on sobivustingimused automaatselt täidetud. Kui aga põhimuutujateks on deformatsioonitensorid, siis on sobivustingimustel täita oluline roll.

³⁶I.K. compatibility conditions

3.11. Pidevustingimused ehk sobivustingimused

Alternatiivne põhjendus pidevustingimuste sissetoomiseks. Oletame, et



Joonis 3.15: Pidevustingimused

vaadeldav keha on algolekus lõigatud väikesteks kuupideks (joon. 3.15 a). Kui iga kuupi on seejärel eraldi deformeeritud, siis on nende uuesti ühendamine selliselt, et tekkiks pidev keha tildjuhul võimatu (joon. 3.15 b). Selleks, et peale deformatsiooni oleks meil endiselt tegu pideva kehaga (joon. 3.15 c), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama teatud tingimusi, mida eestikeelses kirjanduses nimetatakse tavaliselt *pidevustingimusteks*.

Pidevusvõrrandite tuletamine. Tuletame pidevusvõrrandid lõpmata väikeste deformatsioonide tensorile

$$2\tilde{E}_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K}. \quad (3.144)$$

Kirjutame üles viimase kõik komponendid:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{11} = U_{1,1}, & & \tilde{E}_{22} = U_{2,2}, & & \tilde{E}_{22} = U_{3,3}, \\ 2\tilde{E}_{12} = U_{1,2} + U_{2,1}, & & 2\tilde{E}_{13} = U_{1,3} + U_{3,1}, & & 2\tilde{E}_{23} = U_{2,3} + U_{3,2}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Diferentseerime võrrandit (3.145)₁ kaks korda koordinaadi X_2 järgi ja võrrandit (3.145)₂ kaks korda koordinaadi X_1 järgi ning liidame saadud tulemused.

$$\tilde{E}_{11,22} + \tilde{E}_{22,11} = U_{1,122} + U_{2,112} = (U_{1,2} + U_{2,1})_{,12} = 2\tilde{E}_{12,12} \quad (3.146)$$

Kombineerides võrrandeid (3.145)₁₋₃ saame veel kaks analoogilist pidevusvõrrandit.

Neist aga ei piisa. Selleks, et saada veel kolm võrrandit, leiame võrrandeist (3.145)₄₋₆ osatuletised „puuduva koordinaadi” järgi, liidame (3.145)₄₋₅ ja lahutame saadud summast (3.145)₆. Seejärel võtame saadud tulemusest osatuletise

3.11. Pidevustingimused ehk sobivustingimused

X_1 järgi:

$$\begin{aligned} 2 \left(\tilde{E}_{12,3} + \tilde{E}_{13,2} - \tilde{E}_{23,1} \right)_{,1} &= [(U_{1,23} + U_{2,13}) + (U_{1,23} + U_{3,12}) - (U_{2,13} + U_{3,12})]_{,1} = \\ &= 2U_{1,123} = 2\tilde{E}_{11,23}. \end{aligned} \quad (3.147)$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks pidevusvõrrandit.

Kokku oleme saanud kuus pidevusvõrrandit, mis on tuntud ka *Saint-Venant'i pidevusvõrranditena*:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{E}_{11,22} + \tilde{E}_{22,11} &= 2\tilde{E}_{12,12} \\ \tilde{E}_{22,33} + \tilde{E}_{33,22} &= 2\tilde{E}_{23,23} \\ \tilde{E}_{11,33} + \tilde{E}_{33,11} &= 2\tilde{E}_{13,13} \\ \left(\tilde{E}_{12,3} + \tilde{E}_{13,2} - \tilde{E}_{23,1} \right)_{,1} &= \tilde{E}_{11,23} \\ \left(\tilde{E}_{12,3} + \tilde{E}_{23,1} - \tilde{E}_{13,2} \right)_{,2} &= \tilde{E}_{22,13} \\ \left(\tilde{E}_{23,1} + \tilde{E}_{13,2} - \tilde{E}_{12,3} \right)_{,3} &= \tilde{E}_{33,12} \end{aligned} \right. \quad (3.148)$$

Saadud kuuel võrrandil on väga selge füüsikaline sisu.

1. Esimesed kolm: kui on antud normaaldeformatsioonid (suhtelised pikened) kolmes ristavas silhis, siis nende sihtidega määratud tasandites ei saa nihkedeformatsiooni meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldisega $(3.148)_{1-3}$.
2. Viimased kolm: kui on antud nihkedeformatsioonid kolmes ristavas tasapinnas, siis ei saa normaaldeformatsioone meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldisega $(3.148)_{4-6}$.

Mittelineaarsetele deformatsioonitensoritele, näiteks Lagrange'i DT, on pidevustingimusi leida sootuks keerukam.

3.12. Lihtsustatud deformatsiooniteooriad

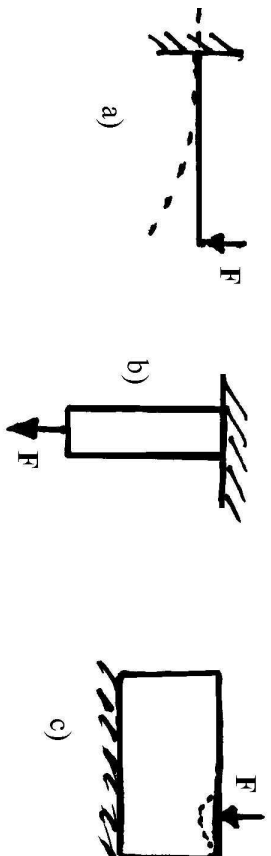
3 - 72

3.12 Lihtsustatud deformatsiooniteooriad

Esitatud valemite kasutamine võib viia matemaatilistele raskustele. Klassikalises (lineaarses) elastusteoorias ja vedelike voolamise teoorias (hüdromehaanikas) hülijatakse seetõttu mittelineaarsed liikmed, st. uuritakse vaid nn. väikeseid deformatsioone. Tihti saab lineaarse teooria täpsust tõsta lähtudes uuritava objekti geometriast ja deformatsiooni iseloomust.

Näited:

- a) Hästi õhukese tala paine — pöörded suured, pikened väikesed.
- b) Tala tõmme — pikened suured, pöörded väikesed. Rakendatakse Saint-Venant'i printsiipi (koormuse rakenduspunkti lähimbruses on olukord muust tala erinev).
- c) Koondatud jõu mõju massiivile — siin on soovitatav rakendada puhtalt mitelineaarset teooriat.



Joonis 3.16: Erineva iseloomuga deformatsioonid: a) õhukese tala paine, b) tala tõmme ja c) koondatud jõu mõju massiivile.

Deformatsioonitensor, pöördetensor ja invariantid on avaldatavad läbi siirdegradientide (näiteks $U_{K:L}$). Seega saame rääkida väikestest siiretest või mõnest teisest kolmest sõltumatu muutujast, mis neid asendaks. Näiteks võivad olla aproksimatsioonide puhul kasutusel kolm peapikenemist või pöördevektori komponendid. Deformatsioonitensori või pöördetensori komponendid otsene kasutamine on komplitseeritud, sest sobivustingimused peavad olema rahuldatud. Samuti tuleb olla ettevaatlik kui suurusjärkude hindamise aluseks on siirdegradientid. Järgnevate näidete eesmärgiks on anda mingi baasettekujutus sellistest ligikaudsetest teooriatest.

3.12. Lihtsuustatud deformatsiooniteooriad

3 - 74

Väikeste siirete teooria

Väikeste siirete teooria³⁷ puhul loetakse väikesteks kõik siirdekomponendid ja siirdegradientid ning hüljatakse kõik mittelineaarsed liikmed. Deformatsioonitensorid (3.53) saavad nüüd kujul

$$\begin{cases} 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} \approx U_{K:L} + U_{L:K} = 2\tilde{E}_{KL}, \\ 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} \approx u_{k;l} + u_{l;k} = 2\tilde{e}_{kl} \end{cases} \quad (3.149)$$

ja pöördetensori jaoks kasutatakse valemeid (3.135) ja (3.136), st.

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - \delta_{KM} \quad \text{ja} \quad \tilde{R}_{KM} \approx \delta_{kK} \delta_{mM} r_{km}.$$

Siin kaob erinevus U_K ja u_k vahel ning saadakse klassikaline lõpmata väikeste deformatsioonide teooria.

Et saada paremaid (täpsemaid) tulemusi vaadeldakse siin tihti siiret nn. häirituste rea kujul —

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \mathbf{u}_n \quad (3.150)$$

³⁷Lk. small displacement theory

kus suurused \mathbf{u}_n hoitakse fikseeritud ning ϵ on häiritusparameeter. Sellise formalismi puhul vastab ϵ^n n -järku aproksimatsioonile. Teooria esitati E. ja F. Cosserat' poolt (1896).

Väikeste peadeformatsioonide teooria

Väikeste peadeformatsioonide³⁸ puhul eeldame, et $e_\alpha \equiv E_\alpha \ll 1$ ja et DRK on valitud peasuundades. Sel juhul saame valemist (3.78) ja (3.86)

$$\begin{cases} 2E_{\underline{K}\underline{K}} = (1 + E_{(\underline{K})})^2 - 1, \\ 2E_{KL} = (1 + E_{(\underline{K})})(1 + E_{(\underline{L})}) \sin \Gamma_{\underline{K}\underline{L}}, \quad K \neq L \end{cases}$$

mittelinearsete liikmete hülgamisel

$$\begin{cases} E_{\underline{K}\underline{K}} \approx E_{(\underline{K})} \equiv e_{\underline{k}\underline{k}} = e_{(k)} \\ 2E_{KL} \approx [1 + E_{(\underline{K})} + E_{(\underline{L})}] \sin \Gamma_{\underline{K}\underline{L}}, \quad K \neq L. \end{cases} \quad (3.151)$$

³⁸I.k. *Small principal extentions*. Eesti keeles oleks seega täpsem öelda, et tegu on väikeste suhteliste peapikenemistega.

3.12. Lihtsuustatud deformatsiooniteooriad

Deformatsioonitensorite invariantid saavad kuju

$$\begin{cases} I_C = I_{-1}^C \approx 3 + 2I_e, & I_e = I_{-1}^C \approx 3 - 2I_e, \\ II_C = II_{-1}^C \approx 3 + 4I_e, & II_e = II_{-1}^C \approx 3 - 4I_e, \\ III_C = III_{-1}^C \approx 1 + 2I_e, & III_e = III_{-1}^C \approx 1 - 2I_e, \end{cases} \quad (3.152)$$

suhteline mahu muut

$$\frac{dv - d\mathcal{V}}{d\mathcal{V}} \approx I_E \approx I_e \quad (3.153)$$

ja pöördetensor

$$R_{KL} \approx \delta_{KL} + U_{K:L}, \quad R_{KL}^{-1} \approx \delta_{KL} - U_{K:L}. \quad (3.154)$$

Väikeste pöörete teooria

Väikeste pöörete³⁹ puhul loeme iga joonelemendi pööride väikeseks ja pöördemuruga $\vartheta \approx \sin \vartheta \approx \tan \vartheta$. Deformatsioonitensorit (3.65) (lk. 30) võib nüüd aproksimeerida kujul

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \left(\tilde{E}_{MK} \tilde{E}_{ML} + \tilde{E}_{MK} \tilde{R}_{ML} + \tilde{R}_{MK} \tilde{E}_{ML} \right). \quad (3.155)$$

Kui pööre on väike, siis võib kasutada pöördvektorit $2\tilde{R}_K = e_{KLM} \tilde{R}_{ML}$. Kui nüüd mõni R_K komponent osutub teistega võrreldes väikeseks, siis lihtsustub E_{KL} avaldis veelgi, sest liikmed, mis osutuvad teistega võrreldes väikesteks, hüljatakse. Selline aproksimatsioon sõltub keha ja deformatsiooni geometriast. Näiteks, õhukese plaadi painde puhul on tasandilise elemendi pööre ümber kesktasandi normaali sihilise telje väike, võrreldes pööretega, mis toimuvad kesktasandil asuvate telgedele ümber. Saadakse plaatide teist järku teooria, mis on tuntud kui Föppl-Kármán-Timošenko teooria.

³⁹lk. *small rotations*

3.12. Lihtsustatud deformatsiooniteooriad**Väikeste deformatsioonide ja väikeste pöörete teooria**

Väikeste deformatsioonide (suhteliste pikennemiste) ja väikeste pöörete⁴⁰ puhul loetakse nii $\tilde{E}_{KL} \ll 1$ kui ka $\tilde{R}_{KL} \ll 1$ ja

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \left(\tilde{E}_{MK} \tilde{R}_{ML} + \tilde{R}_{MK} \tilde{E}_{ML} \right). \quad (3.156)$$

Kui pöörded ja deformatsioonid osutuvad sama suurusjärku olevateks, siis võib nende korrutised hüljata. Tulemuseks on see, et eeldame väikeseid siirdegradiente ja saame lõpmata väikeste deformatsioonide teooria, st.,

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} \text{ ja } R^K{}_L \approx \delta^K{}_L + \tilde{R}_{KL}. \quad (3.157)$$

Siin on seega hüljatud kõik mittelineaarsed liikmed. Kehiti superpositsiooni printsiip: *Münnest siirdest põhjustatud deformatsiooni võib vaadelda neist siiretest eraldi põhjustatud deformatsioonide summama* —

$$\begin{cases} \mathbf{E} \approx \tilde{\mathbf{E}} \approx \tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_2 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \\ \mathbf{R} \approx \tilde{\mathbf{R}} \approx \tilde{\mathbf{R}}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_2 = \tilde{\mathbf{R}}_2 + \tilde{\mathbf{R}}_1 \end{cases} \quad (3.158)$$

⁴⁰lk. *small extensions and small rotations*

3.13 Deformatsioonide erijuhud

Vaatleme kahte tüüpi deformatsioone

- (i) *Deformatsioonid, mille puhul pikenemistel või pööretel on piiranguid.* Need deformatsioonid ei sõltu suunast ega keha või deformatsiooni geometriast. Siia klassi kuuluvad nn. jäik deformatsioon, puhas homogeenne pikenemine, potentsiaalne deformatsioon ja isohooriline deformatsioon.
- (ii) *Deformatsioonid, mille erisus on põhjustatud koordinaadistiku sobivast valikust.* Teisisõnu, pikenedemised ja pöörded võivad mõnes koordinaadistikus olla väga spetsiifiliselt määratud. Siia klassi kuuluvad näiteks ühtlane paisumine, (lihtne) pikideformatsioon, lihtne nihke, tasapinnaline deformatsioon.

3.13. Deformatsioonide erijuhud

(i) Deformatsioonid, mille puhul pikenemistel või pööretel on piiranguid.

Jäik deformatsioon. Deformatsioon on jäik⁴¹ (keha jääb jäigaks) kui mistahes kahe punkti vaheline kaugus ei muutu. Tärvilik ja piisav tingimus selleks on, et $\mathbf{C} = \mathbf{c} = \mathbf{I}$ igas punktis. Lisaks $C_\alpha = \lambda_\alpha^2 = 1$, $I_C = II_C = 3$ ja $III_C = 1$ Vaata ka lk. 55.

Puhas deformatsioon. Puhta deformatsiooni⁴² ehk paisumise ehk pöörddevaba deformatsiooni puhul peateljed ei pöördu. Tärvilik ja piisav tingimus selleks on, et $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ igas punktis. Vaata ka lk. 59

Potentsiaalne deformatsioon. Potentsiaalse deformatsiooni⁴³ puhul leidub skaalaarne funktsioon V nii, et

$$\mathbf{U} = \text{grad } V \quad (3.159)$$

⁴¹lk. rigid deformation

⁴²lk. pure strain, dilatation, eesti keeles ka puhas pikenemine ehk puhas pikideformatsioon

⁴³lk. potential deformation

Isohooriline deformatsioon. Isohooriline deformatsioon⁴⁴ on deformatsioon, mille puhul ruumala ei muutu. Kuna (vt. ka lk. 57)⁴⁵

$$\frac{dv}{dV} = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}} = j,$$

siis isohoorilise deformatsiooni puhul

$$\sqrt{\text{III}_C} = \sqrt{\text{III}_c} = j = 1. \quad (3.160)$$

Kuna antud juhul $\text{III}_C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$, siis saab invariantid I_C ja II_C avaldada vaid kahe peapikenemise kaudu. Enangi veel, funktsioonid mis illdjuhul sõltuvad kõigist kolmest invariantist (peapikenemisest), on nüüd vaid kahe esimese invarianti (peapikenemise) funktsioonid.

⁴⁴I.k. isohoric deformation

⁴⁵

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right|, \quad C_{KL} = x_{k,K} x_{k,L}, \quad \text{III}_C = |C_{KL}| = |x_{k,K} x_{k,L}| = |x_{k,K}| \cdot |x_{k,L}|$$

3.13. Deformatsioonide erijuhud

3 - 82

(ii) Deformatsioonid, mille erisus on põhjustatud koordinaadistiku sobivast valikust

Siin on enamikel juhtudel tegu affine teisendusega, mis seob materiaalse punkti \checkmark asukoha enne (X_K) ja pärast (x_k) deformatsiooni.

$$x_k = D_{kK} X_K, \quad X_K = D_{Kk}^{-1} x_k, \quad D_{kK} D_{Kl}^{-1} = \delta_{kl}, \quad (3.161)$$

kus D_{kK} ja D_{Kl}^{-1} on konstantsed tensorid (maatriksid). Teisendus (3.161) jätab sirged sirgeteks, ellipsoid ellipsiteks, ellipsoidid ellipsoidideks jne. Sellist deformatsiooni nimetatakse *homogenseks deformatsiooniks*⁴⁶. Seda võib defineerida ka kujul

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial X_K \partial X_L} = 0. \quad (3.162)$$

Valemite (3.161)₁ ja (3.161)₂ põhjal on selge, et homogene deformatsiooni korral deformatsioonigradiendid

$$x_{k,K} = D_{kK} \quad \text{ja} \quad X_{K,k} = D_{Kk}^{-1} \quad (3.163)$$

⁴⁶I.k. homogeneous strain

Üldistatud homogense deformatsiooni puhul võib D_{kK} sõltuda materiaalse punkti koordinaatidest ja sel juhul viimased valemid ei kehti.

Erinevad tensorid (maatriksid) D_{kK} kirjeldavad erinevaid deformatsioone, millest mõningaid vaatleme allpool.

Ühtlane paisumine. Ühtlaseks paisumiseks⁴⁷ nimetatakse homogeenst deformatsiooni, mille puhul

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (3.164)$$

Deformatsioonitensorid

$$\mathbf{C} = \mathbf{c}^{-1} = \lambda^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{C}^{-1} = \lambda^{-2} \mathbf{I}, \quad 2\mathbf{E} = (\lambda^2 - 1)\mathbf{I}. \quad (3.165)$$

Deformatsioonielipsoidid on antud juhul sfäärid. Järelikult iseloomustavad sellist deformatsiooni identsed peadeformatsioonid (peapikenemised). Parameeter λ iseloomustab pikkuse muutust suvalises suunas. Kui $\lambda > 1$, siis on tegu ühtlase

⁴⁷Ik. *uniform dilatation*

3.13. Deformatsioonide erijuhud

paisumisega (laienemisega), kui aga $0 < \lambda < 1$, siis ühtlase kokkutõmbumisega. Kera jääb sellisel deformatsioonil keraks. Deformatsioonitensorite invariantid

$$I_C = 3\lambda^2, \quad II_C = 3\lambda^4, \quad III_C = \lambda^6. \quad (3.166)$$

Üheteljeline (tihesunnaline) pikenenine ja pikideformatsioon. Üheteljelse pikენemise⁴⁸ puhul on

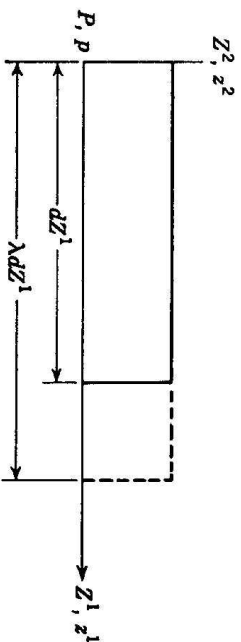
$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty \quad (3.167)$$

ning

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{c}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad [\mathbf{c}] = [\mathbf{C}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.168)$$

Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid $2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$ ja $2\mathbf{e} = \mathbf{I} - \mathbf{c}$ ning

⁴⁸Ik. *uniacial strain*



Joonis 3.17: Ühesuunaline pikenedmine. NB! Z^k asemel tuleb näha X_k ja z^k asemel x_k !)

invariandid

$$\begin{cases} I_C = 2 + \lambda^2, & II_C = 1 + 2\lambda^2, & III_C = \lambda^2, \\ I_E = 0.5(\lambda^2 - 1), & II_E = III_E = 0. \end{cases} \quad (3.169)$$

Deformatsioonilipsoid on antud juhul pöördelipsoid kususjuures kaks peapikenemist on võrdsed ühega, ning üks on ühest erinev. Deformatsiooni tulenusena liigub teljega X_1 risti olev tasand paralleelselt iseendaga ja X_2 ning X_3 sihis deformatsioon puudub.

Tegelikult tala ristlõige tõmbe puhul väheneb ja surve puhul suureneb . Sellist

3.13. Deformatsioonide erijuhud

deformatsiooni nimetatakse *pikideformatsiooniks* ehk *pikenedmiseks*⁴⁹ . Nüüd

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & K\lambda & 0 \\ 0 & 0 & K\lambda \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (3.170)$$

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{c}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & (K\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (K\lambda)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.171)$$

$$[\mathbf{c}] = [\mathbf{C}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (K\lambda)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (K\lambda)^{-2} \end{bmatrix}. \quad (3.172)$$

Invariandid

$$I_C = (1 + 2K^2)\lambda^2, \quad II_C = (2 + K^2)K^2\lambda^4, \quad III_C = K^4\lambda^6, \quad (3.173)$$

Seega, antud juhul on X_1 sihis pikenedmiskoeffitsent $ds_1/dS_1 = \lambda$ ja suhteline pikenedmine $(ds_1 - dS_1)/dS_1 = \lambda - 1$. Vastavad suurused X_2 ja X_3 sihis on $K\lambda$ ja

⁴⁹lk. *simple extension*, eesti keeles on võimalikud veel mitmed terminid, näiteks puhas pikenedmine jms.

$K\lambda - 1$. *Poisson'i tegur* ν , mis iseloomustab pikennemiste suhet põiki- (X_2 või Z_3 siht) ja pikisuunas (X_1 siht), on defineeritud järgmiselt:⁵⁰

$$\nu = -\frac{K\lambda - 1}{\lambda - 1} = \frac{1 - K\lambda}{\lambda - 1}, \quad K = \frac{1 + \nu}{\lambda} - \nu. \quad (3.174)$$

Kui $\nu > 0$ siis ristlõige väheneb, kui $\nu < 0$, siis suureneb, $\nu = -1$ ($K = 1$) korral on tegu ühtlase paisumisega, $\nu = 0$ ($K = 1/\lambda$) puhul üheteljelise pikennemisega.

Lihtne nihke. Lihtsa nihke⁵¹ korral

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad -\infty < S < \infty, \quad S = \text{const}. \quad (3.175)$$

Seega liikumisseedus saab kuju (joonis 3.18)

$$x_1 = X_1 + SX_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3. \quad (3.176)$$

⁵⁰Tugevusõpetuses

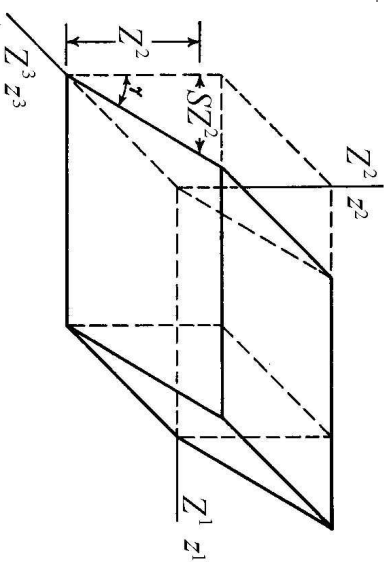
$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}.$$

⁵¹Ik. *simple shear*. Eelmiste aastate konspetkides olen sinn ekslikult kasutanud terminit puhvas nihke. Tegelikult vastab puhtale nihkele olukord, mida on kirjeldatud lk. 42 oleval joonisel 3.8.

3.13. Deformatsioonide erijuhud

3 - 88

Lihtsat nihet võib tihest küljest kirjeldada kui deformatsiooni, mis pöörab tasandeid $X_1 = \text{const}$. ümber nende lõikejoone tasandiga $X_2 = 0$ nurga $\gamma = \arctan S$ võrra, vastavalt liikumisseadusele (3.176). Teisest küljest aga kui deformatsiooni, mis nihutab mitte-deformeeruvaid tasandeid $X_2 = \text{const}$. vastavalt liikumisseadusele (3.176).



Joonis 3.18: Lihtne nihke. NB! Z ja X_1

Deformatsioonitensordid ja invariantidid

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & S & 0 \\ S & 1 + S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{C}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + S^2 & -S & 0 \\ -S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.177)$$

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1 & -S & 0 \\ -S & 1 + S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{c}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + S^2 & S & 0 \\ S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.178)$$

$$[\mathbf{E}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & -S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.179)$$

$$\begin{cases} \text{I}_C = \text{II}_C = 3 + S^2, & \text{III}_C = 1, \\ \text{I}_e = -\text{I}_E = 2\text{II}_e = 2\text{III}_e = -S^2/2, & \text{III}_e = \text{III}_E = 0. \end{cases} \quad (3.180)$$

Kuna $\text{III}_C = 1$, siis on lihtne nihe isohooriline deformatsioon.

Kui lahendada karakteristlik kuupvõrrand

$$-C^3 + \text{I}_C C^2 - \text{II}_C C + \text{III}_C = 0,$$

saame deformatsioonitensore \mathbf{C} ja \mathbf{c} peaväärtused

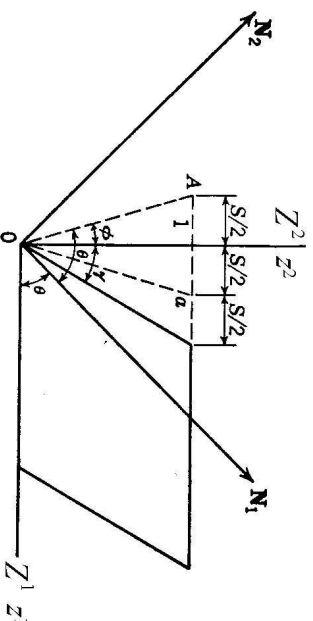
$$\begin{cases} C_1 = 1/c_1 = \lambda_1^2 = 1 + S^2/2 + S\sqrt{1 + S^2/4}, \\ C_2 = 1/c_2 = \lambda_2^2 = 1 + S^2/2 - S\sqrt{1 + S^2/4}, \\ C_3 = 1/c_3 = \lambda_3^2 = 1. \end{cases} \quad (3.181)$$

Viimastele vastavad peavektorid

$$\begin{cases} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{cases} = \frac{\mathbf{I}_1 + \left(S/2 \pm \sqrt{1 + S^2/4} \right) \mathbf{I}_2}{\sqrt{2 + S^2/2 \pm S\sqrt{1 + S^2/4}}}, \quad \mathbf{N}_3 = \mathbf{I}_3, \quad (3.182)$$

3.13. Deformatsioonide erijuhud

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{cases} = \frac{\mathbf{i}_1 + \left(-S/2 \pm \sqrt{1 + S^2/4} \right) \mathbf{i}_2}{\sqrt{2 + S^2/2 \mp S\sqrt{1 + S^2/4}}}, \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{i}_3. \quad (3.183)$$



Joonis 3.19: Nihketasand NB! Z ja X^I

Tasandi $X_3 = 0$ punkt $A(-S/2, 1, 0)$ läheb pärast deformatsiooni vastavalt valemile (3.176) asendisse $a(S/2, 1, 0)$ (vt. joonis 3.19). Seega $OA = Oa$ ja järelikult kiud, mis olid enne deformatsiooni paralleelsed OA -ga ja moodustasid X_2 teljega nurga $\Phi = \arctan S/2$ ei muuda deformatsiooni käigus oma pikkust. Valemist (3.182) saame määrata nurga

$$\tan \vartheta = S/2 + \sqrt{1 + S^2/4}. \quad (3.184)$$

Ka OA ja \mathbf{N}_1 vaheline nurk on ϑ , sest $\tan(\widehat{OAN_1}) = \tan \vartheta$. Seega poolitab peasuund \mathbf{N}_1 nurga $\widehat{OAX_1}$, peasuund \mathbf{N}_2 on temaga risti tasandil $X_3 = 0$ ning \mathbf{N}_3 on suunatud piki telge X_3 .

Tasapinnaline deformatsioon. Erinevalt kolmest viimasest näitest, ei pruugi siin olla tegu homogeense deformatsiooniga. Tasapinnalise deformatsiooni⁵² korral toimub paralleelsetel tasanditel identne deformatsioon ning nende normaali sihis deformatsioonid puuduvad. Seega, kui deformatsioonid toimuvad $x_1 - x_2$ tasandis,

⁵²I.k. plane strain

3.13. Deformatsioonide erijuhud

siis liikumisseadus on esitatav kujul

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(X_1, X_2), & k &= 1, 2, \\ x_3 &= X_3. \end{aligned} \quad (3.185)$$

On lihtne mõista, et Cauchy deformatsioonitensor saab nüüd kuju

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

ja analoogsed, st., väliskuju poolest sarnased on ka kõik teised deformatsiooni-tensorid ning pöördetensorid. Üks peatelgedest on antud juhul paralleelne x_3 -ga ja tema sihis on pikenemiskoeffitsient $\lambda_3 = 1$. Tasapinnaline deformatsioon on isohooriline kui $\lambda_1 = 1/\lambda_2$.

•

Üldistatud tasapinnaline deformatsioon on defnneeritud kujul

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(X_1, X_2), & k &= 1, 2, \\ x_3 &= x_3(X_3). \end{aligned} \quad (3.187)$$

3.14 Kiirus ja kiirendus

3.14.1 Materiaalne tuletis

Pideva keskkonna mehaanikas on dinaamiliste protsesside kirjeldamise puhul vaja leida materiaalsete punktidega seotud füüsikaliste suuruste (skalaaride, vektorite ja tensorite) muutumise kiirust⁵³, st., tuleb leida tuletisi aja järgi skalaaridest, vektoritest ja tensoritest (mis on funktsioonid kas materiaalsetest või ruumilistest koordinaatidest) mingis fikseeritud materiaalses punktis. Siinjuures tuleb arvesse võtta nii muutus, mis on seotud fikseeritud ruumipunktiga (lokaalne muutus), kui materiaalse punkti liikumisest põhjustatud muutus (konvektiivne muutus).

Materiaalne tuletis vektorist. *Materiaalseks tuletiseks vektorist (aja järgi)* nime-tatakse operatsiooni

$$\dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{\mathbf{X}=\text{const}}. \quad (3.188)$$

⁵³Lk. time rate

3.14. Kiirus ja kiirendus

3 - 94

Kui vektorfunktsiooni \mathbf{f} argumentideks on LK, s.t.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = F_{K^c}(\mathbf{X}, t)\mathbf{I}_K, \quad (3.189)$$

siis langevad materiaalne tuletis ja osatuletis aja järgi kokku:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial F_K}{\partial t} \mathbf{I}_K. \quad (3.190)$$

Näide: Nii leitakse materiaalselt tuletist liikumisseadusest.

Keerukam on lugu siis, kui \mathbf{f} on avaldatud EK-s. Vaatleme vektorfunktsiooni

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f_k(\mathbf{x}, t)\mathbf{i}_k. \quad (3.191)$$

Nüüid (kuna \mathbf{i}_k on konstantsed)

$$\dot{\mathbf{f}} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \mathbf{i}_k, \quad (3.192)$$

sest \mathbf{x} on läbi liikumisseaduse LK \mathbf{X} funktsioon.

Sageli esitatakse materiaalne tuletis vektorist kujul

$$\dot{\mathbf{f}} = f_k \mathbf{i}_k \equiv \frac{Df_k}{Dt} \mathbf{i}_k, \quad (3.193)$$

kus suurust

$$\frac{Df_k}{Dt} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}_{f_{k,i}} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}_{\dot{x}_i} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + f_{k,i} \dot{x}_i \quad (3.194)$$

nimetatakse materiaalseks tuletiseks vektori \mathbf{f} komponendist f_k . Esimest liiget va-
lemites (3.192) ja (3.194) nimetatakse *lokaalseks tuletiseks* (mõnikord ka *tuletiseks aja järgi*), teist liiget aga *konvektiivseks tuletiseks*. Lokaalne tuletis iseloomustab muutusi, mis toimuvad vaadeldavas ruumipunktis ning konvektiivne tuletis muu-
tusi, mis on põhjustatud materiaalse punkti liikumisest (vaadeldava ruumipunkti ümbruses).

Materiaalne tuletis skalaarist. Vaatleme skalaarfunktsiooni $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$. *Mate-
riaalne tuletis skalaarist* on defineeritud kujul

$$\dot{\Phi} = \frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}_{\Phi_{,i}} \dot{x}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi_{,i} \dot{x}_i. \quad (3.195)$$

3.14. Kiirus ja kiirendus

3 - 96

Näide: Tähistagu skalaar Φ materiaalse punkti temperatuuri. Temperatuuri muutumisel võib olla kaks põhjust: 1) antud ruumipunkti temperatuur muutub ja 2) liikudes satub materiaalne punkt teise ruumipunkti, kus on erinev tempera-
tuur (võrreldes ruumipunktiga, kus ta oli). Viimast nähtust nimetatakse füüsikas konvektsiooniks.

Materiaalne tuletis tensoritest. *Materiaalne tuletis tensorite komponentidest* on defineeritud järjekorras —

$$\frac{Df_{kl}}{Dt} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial t} + f_{kl,m} \dot{x}_m. \quad (3.196)$$

Märkused:

- (i) Materiaalse tuletise kontseptsiooni töid sisse Euler (1770) ja Lagrange (1783), tähistus D/Dt pärineb aga Stokesilt (1845).
- (ii) Kui on tegu liikumisseadusega $x_k = x_k(\mathbf{X}, t)$, siis

$$\dot{x}_k = \frac{Dx_k}{Dt} = \frac{\partial x_k}{\partial t}. \quad (3.197)$$

3.14.2 Materiaalse punkti kiirus ja kiirendus

Kiirus

Kiirus on teatavasti kohavektori esimene tuletis aja järgi. Kui materiaalse punkti kohavektor on $\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = x_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{i}_k$, siis tema kiirus on defineeritud kujul

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.198)$$

Kuna baasivektorid \mathbf{i}_k ei sõltu ajast, siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{x}_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{i}_k. \quad (3.199)$$

Kui tähistada $\mathbf{v} = v_k\mathbf{i}_k$, siis

$$v_k \equiv \dot{x}_k \equiv \frac{\partial x_k}{\partial t} \equiv \frac{Dx_k}{Dt}. \quad (3.200)$$

Kuna kohavektor

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u} \quad (3.201)$$

ja \mathbf{P} ei sõltu ajast (sageli tähistab $\mathbf{P} \equiv \mathbf{X}$ punkti kohavektorit alghetkel), siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (3.202)$$

3.14. Kiirus ja kiirendus

Lagrange'i koordinaadid. Olgu siirdevektor esitatud läbi LK kujul $\mathbf{u} = U_K\mathbf{I}_K$, kus $U_K = U_K(\mathbf{X}, t)$. Nüüd

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial U_K}{\partial t}\mathbf{I}_K, \quad (3.203)$$

ehk

$$\mathbf{v} = V_K\mathbf{I}_K, \quad \text{kus } V_K = \frac{\partial U_K}{\partial t}.$$

Viimased avaldised esitavadki *kiiruse (kiirusvektori) Lagrange'i koordinaatides*.

Euleri koordinaadid. Kui siirdevektor on esitatud läbi Euleri koordinaatide, siis $\mathbf{u} = u_k\mathbf{i}_k$, kus $u_k = u_k(\mathbf{x}, t)$. Nüüd saame *kiiruse avaldised Euleri koordinaatides*:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{X}=\text{const}} = \frac{Du_k}{Dt}\mathbf{i}_k \equiv \left[\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_{k,l}v_l \right] \mathbf{i}_k, \quad (3.204)$$

ehk

$$\mathbf{v} = v_k\mathbf{i}_k, \quad \text{kus } v_k = \frac{Du_k}{Dt} \equiv \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_{k,l}v_l.$$

Seega, ülaltoodud lähenemist kasutades saame kiiruse- ja siirdekomponentide vahelised seosed Euleri koordinaatide puhul ilmutamata kujul.

Teiselt poolt, kui on teada materiaalse punkti kiirus LKs, siis kasutades liikumiseadust $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, saame

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.205)$$

Kiirendus

Materiaalse punkti kiirendus on defineeritud kui tema kiirusvektori esimene tuletis aja järgi —

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.206)$$

Lagrange'i koordinaatide puhul

$$\mathbf{a} = A_K \mathbf{I}_K, \quad A_K = \frac{\partial V_K}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_K}{\partial t^2} \quad (3.207)$$

ning *Euleri koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = a_k \mathbf{i}_k, \quad a_k = \frac{Dv_k}{Dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \underbrace{v_{k,l}}_{\dot{x}_l} v_l \quad (3.208)$$

Seega avalduvad kiirenduse komponendid nii LK-s kui EK-s ilmutatud kujul.

3.14. Kiirus ja kiirendus

Märksused

- (i) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ määrab *kiiruse vältja* ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ omakorda *kiirenduse vältja*).
- (a) Punkti, kus $\mathbf{v} = 0$, nimetatakse *stagneerunud punktiks*⁵⁴.
- (b) Kui kiirus ei sõltu ajast, st, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, siis nimetatakse sellist liikumist *statsionaarseks liikumiseks*⁵⁵. See määratlus kehtib suvalise vektorvältja jaoks.
- (c) Liikumist, mille puhul vaid üks kiirusvektori komponent erineb nullist ja sõltub seejuures vaid vastavast ruumikoordinaadist nimetatakse *ühemõotmeliseks liikumiseks*⁵⁶ — näiteks $v_1 = v_1(x_1, t)$ ja $v_2 = v_3 = 0$.
- (d) Liikumist, mille puhul üks kiirusvektori komponent on null ja kaks kiirusvektori komponenti on nullist erinevad ning sõltuvad seejuures vastavatest ruumikoordinaatidest, nimetatakse *tasapinnaliseks liikumiseks*⁵⁷ — näiteks $v_1 = v_1(x_1, x_2, t)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2, t)$, $v_3 = 0$.

⁵⁴Lk. stagnation point, ld. stagnum – seisev vesi

⁵⁵Lk. steady motion

⁵⁶Lk. lineal motion

⁵⁷Lk. plane motion

(ii) Lagrange'i kirjelduse puhul on (analoogselt punkti kinemaatikaga) antud kiirusega liikuv materiaalne punkt identifitseeritav. Euleri kirjelduse puhul selline analoogia punkti kinemaatikaga puudub. Siin on antud kiiruste välja puhul, hetkel t , teada kiirusvektor igas ruumipunktis, kuid pole teada, milline materiaalne punkt asub vaadeldavas ruumipunktis.

3.14.3 Trajektoor, voolujoon, voolupind

*Trajektoor*⁵⁸ on kõver, mida mööda liigub vaadeldav materiaalne punkt — ✓

$$x_k = x_k(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\text{const}}. \quad (3.209)$$

Kui on antud kiiruste väli, siis fikseeritud materiaalse punkti \mathbf{X}_0 trajektooriiks on süsteemi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \quad (3.210)$$

integraalkõver, mis vastab algingimusele $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_0, t_0)$.

*Voolujooned*⁵⁹ on jooned (kõverad), mille puutujad igas punktis tihtivad sihilt kiirusvälja vektoritega. Kui tähistada materiaalse punkti kohavektori \mathbf{p} lõpmata •

⁵⁸I.k. pathline, trajectory

⁵⁹I.k. streamlines

väikest muutu, mis on paralleelne voolujoone puutujaga $d\mathbf{p}$, siis

$$\mathbf{v} = k d\mathbf{p} \quad \text{ehk} \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} = \frac{1}{k}, \quad (3.211)$$

kus k on konstant. Seega on voolujooned süsteemi (3.211) integraalkõverad.

*Voolupinnad*⁶⁰ ja *voolutorud*⁶¹ on voolujoonte hulgad, mis lõikuvad vastavalt avatud või suletud kõveraga. *

3.14.4 Materiaalne tuletis deformatsioonigradientidest ja kohavektori diferentsiaalid

Näitame, et

$$\frac{D}{Dt}(x_{k,K}) = v_{k,l}x_{l,K} \quad (3.212)$$

ja

$$\frac{D}{Dt}(dx_k) = v_{k,l}dx_l. \quad (3.213)$$

⁶⁰I.k. streamsheets

⁶¹I.k. stream tubes

Kuna $dx_k = x_{k,K} dX_K$, siis

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (dx_k) &= \frac{D}{Dt} (x_{k,K} dX_K) = \dots \\ &= \dots \end{aligned} \tag{3.214}$$

$$= v_{k,l} dx_l.$$

Sellega on (3.213) tõestatud. Pannes $dx_k = x_{k,K} dX_K$ avaldisse (3.213), saame (3.212).

Järgnevalt tõestame, et

$$\frac{D}{Dt} (X_{K,k}) = -v_{l,k} X_{K,l}. \tag{3.215}$$

Selleks leiame materiaalse tuletise võrdusest $x_{l,L} X_{L,k} = \delta_{kl}$

$$\frac{D}{Dt} \dots$$

Kust avaldame

...

3.14. Kiirus ja kiirendus

Korrutades VP ja PP $X_{K,l}$ oleme tõestanud valemi (3.215).

3.14.5 Suuruse ds^2 materiaalne tuletis

$$\frac{D}{Dt} (ds^2) = \frac{D}{Dt} (dx_k dx_k) = 2 \frac{D}{Dt} (dx_k) dx_k = \dots$$

Tähistades

$$d_{kl} = v_{(k,l)} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}), \tag{3.216}$$

saame

$$\frac{D}{Dt} (ds^2) = 2d_{kl} dx_k dx_l, \tag{3.217}$$

kus suurust d_{kl} nimetatakse *Euleri deformatsioonikiiruse tensoriks*.

LK korral

$$\frac{D}{Dt} (ds^2) = 2d_{k,l}x_kx_l dX_K dX_L = 2\dot{E}_{KLL} dX_K dX_L. \quad (3.218)$$

Suurust

$$\dot{E}_{KLL} = \frac{D}{Dt} E_{KLL} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KLL} \quad (3.219)$$

nimetatakse *Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensoriks*.

3.14.6 Materiaalne tuletis jakobiaanist j

Näitame, et

$$\frac{Dj}{Dt} = jv_{k,k} \quad (3.220)$$

$$\frac{Dj}{Dt} = \dots$$

3.14. Kiirus ja kiirendus

3.14.7 Elementaarruumala muutumise kiirus

Lähtume sellest, et $v = j\mathcal{V}$ ja saame

$$\frac{D(dv)}{Dt} = \frac{D}{Dt} (j\mathcal{V}) = \frac{D}{Dt} (j)v_{k,k} \mathcal{V} = v_{k,k}v = \mathbf{I}_d v. \quad (3.221)$$

Siin $\mathbf{I}_d = v_{k,k}$ on deformatsioonikiiruse tensori esimene invariant ja samas kiiruse divergents.

3.14.8 Elementaarpinna muutumise kiirus

Lõpmata väiked vektorid $d\mathbf{X}^{(1)} = dX_L^{(1)}\mathbf{I}_L$ ja $d\mathbf{X}^{(2)} = dX_M^{(2)}\mathbf{I}_M$ LK-s (või $d\mathbf{x}^{(1)} = dx_l^{(1)}\mathbf{i}_l$ ja $d\mathbf{x}^{(2)} = dx_m^{(2)}\mathbf{i}_m$ EK-s) määravad läbi vektorikorrutise elementaarpinna

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{X}^{(1)} \times d\mathbf{X}^{(2)} \quad \text{ja} \quad d\mathbf{a} = d\mathbf{x}^{(1)} \times d\mathbf{x}^{(2)}, \quad (3.222)$$

mida saab omakorda avaldada kujul

$$d\mathbf{A} = dA_K \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{a} = da_k \mathbf{i}_k. \quad (3.223)$$

Saab näidata, et elementaarpinna vektori komponendi da_k muutumise kiirus avaldub kujul:

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = v_{m,m}da_k - v_{m,k}da_m. \quad (3.224)$$

Tõestus: ...

$$d\mathbf{A} = dX_K^{(1)}\mathbf{I}_K \times dX_L^{(2)}\mathbf{I}_L = \dots = e_{KLM}dX_K^{(1)}dX_L^{(2)}\mathbf{I}_M \quad (3.225)$$

ja

$$d\mathbf{a} = dx_k^{(1)}\mathbf{i}_k \times dx_l^{(2)}\mathbf{i}_l = \dots = e_{klm}dx_k^{(1)}dx_l^{(2)}\mathbf{i}_m \quad (3.226)$$

Vimmastest

$$dA_M = e_{KLM}dX_K^{(1)}dX_L^{(2)} \quad \text{ja} \quad da_m = e_{klm}dx_k^{(1)}dx_l^{(2)} \quad (3.227)$$

Toome sisse bivektorid —

$$dA_{LM} = e_{KLM}dA_K \quad \text{ja} \quad da_{lm} = e_{klm}da_k \quad (3.228)$$

mille „pöördteisendus” on

$$dA_K = \frac{1}{2}e_{KLM}dA_{LM} \quad \text{ja} \quad da_k = \frac{1}{2}e_{klm}da_{lm} \quad (3.229)$$

3.14. Kiirus ja kiirendus

(3.227) ja (3.229) põhjal

$$dA_{LM} = 2dX_L^{(1)}dX_M^{(2)} \quad \text{ja} \quad da_{lm} = 2dx_l^{(1)}dx_m^{(2)} \quad (3.230)$$

Kuna $dx_k^{(1)} = x_{k,K}dX_K^{(1)}$ ja $dx_l^{(2)} = x_{l,L}dX_L^{(2)}$, siis

$$da_{lm} = \dots \dots = x_{l,L}x_{m,M}dA_{LM} \quad (3.231)$$

(3.229) põhjal

$$da_k = \frac{1}{2}e_{klm}da_{lm} \stackrel{(3.231)}{=} \dots \dots \stackrel{(3.228)}{=} \frac{1}{2}e_{klm}e_{KLM}x_{l,L}x_{m,M}dA_K \quad (3.232)$$

Kuna saab näidata, et $e_{KLM}x_{l,L}x_{m,M} = 2jX_{K,k}$, siis

$$da_k = jX_{K,k}dA_K. \quad (3.233)$$

$$\frac{D(da_k)}{Dt} \stackrel{(3.233)}{=} \dots$$

$$(3.234)$$

= ...

$$= v_{m,m}da_k - v_{m,k}da_m$$

3.15 Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

Integraalsete füüsikaliste suuruste muutumise kiiruse määramiseks on vaja leida tuletisi aja järgi vastavatest integraalidest. Algul toome sisse aga materiaalse joone, materiaalse pinna ja materiaalse mahu mõisted⁶².

Materiaalne joon on joon, mis koosneb materiaalsetest punktidest:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(S), S - \text{parameeter.} \quad (3.235)$$

Materiaalse joone asukoht ruumis hetkel t on määratud läbi liikumisseaduse $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ kujul

$$\mathbf{x}(S, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}(S), t). \quad (3.236)$$

Materiaalne pind on pind, mis koosneb materiaalsetest punktidest

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(R, Q), R, Q - \text{parameetrid} \quad (3.237)$$

ning tema asukoht ruumis hetkel t on

$$\mathbf{x}(R, Q, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}(R, Q), t). \quad (3.238)$$

Materiaalne maht on materiaalsete punktide 3D piirkond.

⁶²Ik. material line, material surface, material volume

3.15. Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

Joonintegraal

Olgu ϕ mingi funktsioon (näit. massi tihedus või kiirus või elektrijuhthivus vms.), mis on defineeritud üle materiaalse joone L . Vastava joonintegraali muutumise kiirus leitakse materiaalse tuletise abil:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_L \phi dx_k &= \int_L \frac{D}{Dt} (\phi dx_k) = \int_L \left[\frac{D\phi}{Dt} dx_k + \phi \frac{D}{Dt} (dx_k) \right] = \\ &\stackrel{(3.213)}{=} \int_L [\dot{\phi} dx_k + \phi v_{k,l} dx_l]. \end{aligned} \quad (3.239)$$

Fikseeritud ruumijooone l puhul (ϕ on defineeritud mingil ruumijoonel l) ei vaatle me (fikseeritud) liikuvaid materiaalseid punkte ning joonintegraali muutumise kiirus

$$\frac{d}{dt} \int_l \phi dx_k = \frac{\partial}{\partial t} \int_l \phi dx_k = \int_l \frac{\partial \phi}{\partial t} dx_k, \quad (3.240)$$

sest dx_k ei sõltu ajast.

Pindintegraal

Olgu nüüd suvaline funktsioon ϕ defineeritud üle materiaalse pinnaga S . Yastava pindintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_S \phi da_k &= \int_S \frac{D}{Dt} (\phi da_k) = \int_S \left[\frac{D\phi}{Dt} da_k + \phi \frac{D}{Dt} (da_k) \right] = \\ &\stackrel{(3.224)}{=} \int_S \left[\dot{\phi} da_k + \phi (v_{l,i} da_k - v_{l,k} da_l) \right]. \end{aligned} \quad (3.241)$$

Fikseeritud ruumipinna s puhul, ei vaatle me jällegi (fikseeritud) liikuvaid materiaalseid punkte ning pindintegraali muutumise kiirus

$$\frac{d}{dt} \int_s \phi da_k = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \phi da_k = \int_s \frac{\partial \phi}{\partial t} da_k, \quad (3.242)$$

sest da_k ei sõltu ajast.

3.15. Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

Ruumintegraal

Kui nüüd funktsioon ϕ on defineeritud üle materiaalse mahu \mathcal{V} , siis ruumintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{D\phi}{Dt} dv + \phi \frac{D}{Dt} (dv) \right] \stackrel{(3.221)}{=} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_{,k} v_k \right) dv + \phi v_{l,k} (dv) \right] = \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\phi v_k)_{,k} \right] dv. \end{aligned} \quad (3.243)$$

Kui kasutada Greeni-Gaussi teoreemi⁶³, siis saame viimasesest

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_s \phi v_k da_k. \quad (3.244)$$

Siin on materiaalne maht \mathcal{V} asendatud fikseeritud ruumimahuga v , mida ümbritseb pind s ja mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga \mathcal{V} . Seega, mingi

⁶³ $\int_{\mathcal{V}} u_{k,k} dv = \int_S u_k da_k$, $da_k = n_k da$ — tuntuud ka kui Gaussi-Ostrogradski teoreem

füüsikalise suuruse ϕ materiaalses mahus \mathcal{V} muutumise kiirus võrdub selle suuruse ϕ muutumise kiirus ruumilises mahus v (mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga \mathcal{V}) pluss suuruse ϕv_k voog läbi ruumilist mahtu v ümbritseva pinna s .

3.16 Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

3.16.1 Keeriselisus

Euleri *deformatsioonikiiruse tensor* on defineeritud juba punktis 3.14.5 kujul

$$d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}) \equiv v_{[k,l]}, \quad (3.245)$$

Defineerime nüüd lisaks (*Cauchy*) *keeriselisuse tensori*⁶⁴

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} - v_{l,k}) \equiv v_{[k,l]}. \quad (3.246)$$

Viimase kahe valemiga põhjal

$$v_{k,l} = d_{kl} + w_{kl} \equiv v_{(k,l)} + v_{[k,l]}. \quad (3.247)$$

⁶⁴I.k. *vorticity tensor*. Kasutatakse ka terminit pöörlemistensor, i.k. vastavalt *spin tensor*.

3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

Kaldsümmeetrilisest tensorist w_{kl} saab omakorda konstrueerida *keerisvektori*

$$w_k = e_{klm} w_{ml} = e_{klm} v_{m,l} \quad \text{ehk} \quad \mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}, \quad (3.248)$$

kus

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv \text{rot } \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{v} \quad \text{ja} \quad \nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (3.249)$$

3.16.2 Deformatsioonikiiruse tensori füüsikaline sisu

Deformatsioonikiiruse tensor d_{kl} iseloomustab *materiaalsete joonelementide pik-kuse ja nende vahelise nurga muutumise (hetkelist) kiirust*. Selle tõestuseks leiame *ühikvektori* \mathbf{n} *sihulise elemendi pikennemise kiiruse*⁶⁵ $d_{(\mathbf{n})}$. Vallemi (3.217) põhjal

$$D(ds^2)/Dt = 2d_{kl} dx_k dx_l. \quad \dagger$$

Seega —

$$d_{(\mathbf{n})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{ds} \frac{D(ds)}{Dt} = d_{kl} n_k n_l, \quad \text{kus} \quad n_k \equiv \frac{dx_k}{ds} \quad (3.250)$$

Kui ortogonaalse koordinaadistiku, näiteks DRK, puhul on \mathbf{n} on võetud piki x_1 , siis

$$d_{(\mathbf{1})} = d_{11}. \quad (3.251)$$

⁶⁵I.k. *Stretching, relative rate of stretch, rate of extension*

Analoogiliselt saab näidata, et *algse täisnuruga muutumise kiirus* avaldub kujul

$$-\dot{\vartheta}_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)} = 2d_{kl}n_{k1}n_{l2} \quad (3.252)$$

ning et kui ortogonaalsete koordinaatide puhul on \mathbf{n}_1 ja \mathbf{n}_2 valitud piki koordinaate x_1 ja x_2 , siis

$$-\dot{\vartheta}_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)} = 2d_{12}, \quad (3.253)$$

Kokku oleme seega tõestanud **teoreemi**: *ortogonaalse koordinaadistiku puhul võrduvad deformatsioonikiiruse tensori normaalkomponendid koordinaatide sihiliste joonlementide pikennemise kiirusega ja segakomponendid ($k \neq l$) poolega nihkekiirusest koordinaatidega x_k ja x_l määratud pinnal.*

3.16.3 Deformatsioonitensorite materiaalsed tuletised

Alajaotuses 3.14.5 defineerime Euleri deformatsioonikiiruse tensori d_{kl} ja näitasime, et Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor (3.219)

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = \frac{1}{2}\dot{C}_{KL}.$$

$\dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}$ sest $C_{KL} = 2E_{KL} + \delta_{KL}$.

3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

Kuna definitsiooni põhjal $C_{KL} = x_{k,K}x_{l,L}$, siis kasutades d_{kl} ja deformatsioonigradiendi materiaalse tuletise definitsiooni saame seosed Euleri ja Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensorite vahel

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl}x_{k,K}x_{l,L}. \quad (3.254)$$

Leiame nüüd seose deformatsioonikiiruse tensori d_{kl} ja Euleri deformatsiooni-tensori materiaalse tuletise \dot{e}_{kl} vahel. Selleks leiame jällegi materiaalse tuletise deformatsiooni moodsust $ds^2 - dS^2$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(ds^2) &= \frac{D}{Dt}(ds^2 - dS^2) \stackrel{(3.43)}{=} 2\frac{D}{Dt}(e_{kl}dx_kdx_l) \\ &\stackrel{(3.213)}{=} 2(\dot{e}_{kl} + e_{ml}v_{m,k} + e_{km}v_{m,l})dx_kdx_l. \end{aligned} \quad (3.255)$$

Kuna valemi (3.217) põhjal $D(ds^2)/Dt = 2d_{kl}dx_kdx_l$, siis

$$d_{kl} = \dot{e}_{kl} + e_{ml}v_{m,k} + e_{km}v_{m,l}. \quad (3.256)$$

Arvestades Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensorite definitsioone ($2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl}$ ja $2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL}$) saame

$$\dot{c}_{kl} = -2\dot{e}_{kl} \text{ ja } \dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}. \quad (3.257)$$

Killingi teoreem. On selge, et kui $dx_i = 0$, siis $D(ds^2)/Dt = 0$ ja vastupidi, kui suvalise kahe punkti puhul $D(ds^2)/Dt = 0$, siis $dx_i = 0$. Seega, $dx_i = 0$ on *tarrilik ja piisav tingimus selleks, et deformatsioon oleks jääk*. See tulemus on tuntud Killingi teoreemina.

Eelpool toodud valemite põhjal selgub, et jääga keha liikumise puhul, st. kui $dx_i = 0$, $\dot{E}_{KLi} = 0$ kuid $\dot{e}_{ki} \neq 0$. Viimane seletub sellega, et kuigi jääga keha liikumisel jääb deformatsiooni mõõt $ds^2 - dS^2$ konstantseks, võivad tensori e_{ki} komponendid muutuda. Seega, vaatlejale, kes liigub koos materiaalse punktiga, näib, et Euleri koordinaadid pöörlevad kui ruumipunktid mööduvad.

3.16.4 Kiirusvälja tsirkulatsioon

Kiirusvälja (kiirusvektori) \mathbf{v} tsirkulatsiooniks mööda suletud taanduvat (laguvat) kõverat⁶⁶ c , nimetatakse joonintegraali

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint v_k dx_k. \quad (3.258)$$

⁶⁶Ik. reducible curve

3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

Siin $d\mathbf{x} \equiv d\mathbf{p} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ on kõvera c diferentsiaalne puutuja suvalises punktis, st., $d\mathbf{x} \equiv d\mathbf{p}$ näitab ka liikumise suunda mööda kõverat c . †

Stokesi teoreemi põhjal $\oint_c \mathbf{b} \cdot d\mathbf{x} = \int_s (\text{curl } \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{a}$. Arvestades seda, et valem (3.248) põhjal on just keerisvektor \mathbf{w} rootor kiiruse vektorist \mathbf{v} , siis saame

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{a} = \text{ehk } \Gamma = \oint v_k dx_k = \int w_k da_k, \quad (3.259)$$

kus s on orienteeritud pind, mis on ümbrisetud orienteeritud kõveraga c . Kokkuvõttes, kiirusvektori tsirkulatsioon mööda kinnist (ja taanduvat) kõverat võrdub keerisvektori vooga läbi sellele kõverale toetuva “suvalise” pinnaga.

3.16.5 Keeriselisuse füüsikaline interpretatsioon

Keeriselisuse tensori füüsikaline sisu

Vaatleme materiaalsel joonelementi, mille siht on antud hetkel määratud vektori- $ga d\mathbf{x}$ ja mis pöörleb ümber vektoriga $\boldsymbol{\mu}$ määratud telje. Olgu $\boldsymbol{\nu}$ mingi fikseeritud ühikvektor ja φ vektorite $d\mathbf{x}$ ja $\boldsymbol{\nu}$ vaheline nurk. Kui tähistada $\mathbf{n} = d\mathbf{x}/ds$, siis

$$\cos \varphi = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{i}_k n_k \mathbf{i}_l \nu_l = \delta_{kl} \nu_l \frac{dx_k}{ds}. \quad (3.260)$$

Võtame viimase avaldise v.p. ja p.p. materiaalse tuletise —

$$\begin{aligned}
 & - (\sin \varphi) \dot{\varphi} = \delta_{kl} \nu_l \frac{D}{Dt} \left(\frac{dx_k}{ds} \right) = \\
 & = \dots \\
 & = \dots \\
 & = \dots \\
 & = \nu_{l,m} n_m \nu_l - d_{(n)} \cos \varphi.
 \end{aligned} \tag{3.261}$$

Kui $\varphi = \pm\pi/2$, siis saame, et

$$\dot{\varphi} = \mp \nu_{l,m} n_m \nu_l. \tag{3.262}$$

Olgu nüüd x_k ortogonaalne koordinaatsüsteem ja $\nu \parallel x_2$ ning $\mathbf{n} \parallel x_1$. Leiame millise nurkkiirusega pöörleb x_1 sihiline element x_2 sihilise elemendi suhtes (ümber

3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

x_3 -ga määratud telje), st.,

$$\dot{\varphi}_{12} = \dots \tag{3.263}$$

Esimene indeks näitab siin milline telg pöörleb ja teine mille suhtes ta pöörleb.

Analoogiliselt

$$\dot{\varphi}_{21} = \dots \tag{3.264}$$

Seega

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_{12} &= \nu_{1,2} - \nu_{2,1} = 2w_{12} = -2w_{21} \\
 \dot{\varphi}_{21} - \dot{\varphi}_{12} &= \nu_{1,2} + \nu_{2,1} = 2d_{12} = 2d_{21}
 \end{aligned} \tag{3.265}$$

Seega oleme näidanud, et *keeriselisuse tensori komponent w_{kl} võrdub poolega ortogonaalsete koordinaatide x_k ja x_l sihiliste joonelementide pöörlemise nurkkiiruste summast. Siinjures toimub pöörlemine ümber telje, mis on risti mõlema vaadeldava joonelemendiga.* Samuti leidis veelkord kinnitust fakt, et deformatsioonikiiruse tensori segakomponendid võrduvad poolega nihkekiirusest koordinaatidega x_k ja x_l määratud pinnal.

Keerisvektori füüsikaline interpretatsioon

Vaatleme pinnal s punkti \mathbf{x} , kus pinnanormaaliks on \mathbf{n} ja keerisvektoriks \mathbf{w} . Kui pinna s pindala on a , siis

$$\oint_c v_k dx_k = a w_n + O(a^2). \quad (3.266)$$

Seega, kui kõver c läheneb punktile \mathbf{x} , siis

$$w_n = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \oint_c v_k dx_k, \quad (3.267)$$

st., kiiruse tsirkulatsioon mööda kontuuri c , jagatud pindalaga a võrdub keerisvektori normaalkomponendiga vaadeldavas punktis (kui $a \rightarrow 0$).

3.16.6 Keerisevaba ja keeriseline liikumine**Keerisevaba liikumine**

Liikumine on *keerisevaba* siis ja ainult siis kui keeriselisuse tensor $w_{ki} = 0$ (ja järelikult ka keerisvektor $\mathbf{w} = 0$) vaadeldava piirkonna igas punktis. Vedeliku

3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

puhul nimetatakse sellist liikumist *laminaarseks*⁶⁷ voolamiseks, st., vedeliku voolamine toimub paralleelsete kihtidena. Sellisel juhul on kiiruste väli avaldatav läbi potentsiaali ϕ —

$$v_k = -\phi_{,k} \quad (3.268)$$

ja liikumist võib nimetada ka *potentsiaalseks*. Potentsiaalse liikumise puhul

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} v_k dx_k &= - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\phi = \phi(\mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_2) \\ \Gamma &= \oint_c v_k dx_k = - \oint_c d\phi = 0. \end{aligned} \quad (3.269)$$

Viimasele vastab **Kelvini teoreem**: *Liikumine on potentsiaalne siis ja ainult siis kui kiirusvektori tsirkulatsioon mööda igat taanduvat kõverat on null*. Pöördteoreemi tõestus järgeldub Stokesi teoreemist — $\Gamma = \oint_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{a} = 0$ põhjal on $\mathbf{w} = 0$ kõikjal vaadeldavas piirkonnas ja seega on liikumine keerisevaba.

Keeriseline liikumine

Vaatleme juhtu, kus keerisvektor \mathbf{w} on nullist erinev igas vaadeldava piirkonna punktis. Jooni, mille puutujateks on keerisvektorid nimetatakse *keerisjoonteks*. Keerisjooned on võrrandi

$$\frac{dx_1}{w_1} = \frac{dx_2}{w_2} = \frac{dx_3}{w_3} \quad (3.270)$$

integraalkõverad. *Keerispinnad* on keerisjoontest moodustatud pinnad ja *keeristorud* on “suletud keerispinnad,” st., nad on defineeritud analoogiliselt voolupindade ja voolutorudega. ✓

Helmholtzi esimene teoreem: *igas keeristoru lõikes on summaarne keeriselisus sama, mis suvalises teises keeristoru lõikes.*

Tõestus põhineb Greeni-Gaussi teoreemil — $\int_v \operatorname{div} \mathbf{w} dv = \int_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da$. Kuna $\mathbf{w} = \operatorname{curl} \mathbf{v}$ ja $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) = 0$, siis

$$\int_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (3.271)$$

Keerisvektor \mathbf{w} on keeristoru külgpinna puutuja. Järelikult seal $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$. Tähistame s_1 ja s_2 keeristoru kaht suvalist lõiget välisnormaalidega \mathbf{n}_1 ja \mathbf{n}_2 .

3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

Seega nimetatud otspindadel

$$\int_{s_1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_1 da = - \int_{s_2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.272)$$

Seega on keeriselisus lõigetes s_1 ja s_2 arvuliselt võrdne —

$\int_{s_1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_1 da = \operatorname{const}$. See konstant on igal torul erinev ja iseloomustab vaadeldavat toru.

Järeldus: Keerisjooned (keeristorud) ei saa alata ega lõppeda suvalises vedeliku punktis — nad on kas kinnised või algavad ja lõpevad keskkonna rajal (k.a. $\pm\infty$).

Sisukord

3	Deformeeruva keskkonna kinemaatika	1
3.1	Euleri ja Lagrange'i koordinaadid	2
3.2	Liikumise kirjeldamine	6
3.3	Siirdeväli ja deformatsioonigradient	12
3.3.1	Siire	12
3.3.2	Deformatsioonigradient	14
3.4	Deformatsioonitensordid	17
3.4.1	Cauchy ja Greeni deformatsioonitensordid	17

3.4.2	Fingeri ja Piola deformatsioonitensordid	22
3.4.3	Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensordid	23
3.5	Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded	27
3.5.1	Lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid	27
3.5.2	Lineaarse teooria pöörde tensorid ja pöördevektorid	28
3.6	Deformatsioonitensorige füüsikaline sisu	31
3.7	1D deformatsioonimöödud ja nende seos deformatsioonitensorigega	38
3.8	Deformatsioonielipsoid	43
3.9	Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad	47
3.9.1	Pöörde põhiteoreem	58
3.10	Deformatsioonigradiendi polaardekompositsioon	64
3.11	Pidevustingimused ehk sobivustingimused	67
3.12	Lihtsustatud deformatsiooniteooriad	72
3.13	Deformatsioonide erijuhud	79
3.14	Kiirus ja kiirendus	93

3.14.1	Materiaalne tuletis	93
3.14.2	Materiaalse punkti kiirus ja kiirendus	97
3.14.3	Trajektor, voolujoon, voolupind	101
3.14.4	Materiaalne tuletis deformatsioonigradientidest ja kohavek- tori diferentsiaalst	102
3.14.5	Suuruse ds^2 materiaalne tuletis	104
3.14.6	Materiaalne tuletis jakobiaanist j	105
3.14.7	Elementaarruumala muutumise kiirus	106
3.14.8	Elementaarpinna muutumise kiirus	106
3.15	Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika	109
3.16	Keeriselsus ja deformatsiooni kiirus	113
3.16.1	Keeriselsus	113
3.16.2	Deformatsioonikiiruse tensori füüsikaline sisu	114
3.16.3	Deformatsioonitensorite materiaalsed tuletised	115
3.16.4	Kiirusvälja tsirkulatsioon	117
3.16.5	Keeriselsuse füüsikaline interpretatsioon	118
3.16.6	Keerisevaba ja keeriseline liikumine	121