

Peatükk 4

Deformeeruva keskkonna dünaamika

Dünaamika on mehaanika osa, mis uurib materiaalsete keskkondade liikumist välismõjude (välisjõudude) toimel. Uuritavaks materiaalseks keskkonnaks võib olla nii tahke keha, gaas kui vedelik. Üheks vaadeldavaid materiaalseid keskkondi iseloomustavaks suuruseks on *inerts*. Inertsiooni mõõduks on mass.

4.1. *Mass*

4 - 2

4.1 Mass

Mass on positiivne suurus, mis on invariantne liikumise suhtes. Tema dimensioon M ei sõltu ei pikkuse dimensioonist L ega aja dimensioonist T . Kui mass on absoluutselt pidev, siis leidub funktsioon ρ , mida nimetatakse *massi tiheduseks*.

Sel juhul keha kogu mass

$$\mathfrak{M} = \int_v \rho dv. \quad (4.1)$$

Kui mass pole pidev üle kogu ruumala v , siis

$$\mathfrak{M} = \int_{v_1} \rho dv + \sum_{\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha}, \quad (4.2)$$

kus v_1 on pideva massijaotusega piirkond.

Edaspidi vaatleme vaid pideva massijaotusega keskkondi, st., et igas (elementaar)mahus on etteantud massi tihedus ning kui $v \rightarrow 0$, siis $\mathfrak{M} \rightarrow 0$ — seega $0 < \rho < \infty$.

Pideva keskkonna mehaanika I põhiaksiom — massi jäävuse seadus
 Globaalne massi jäävuse aksiom: keskkonna kogumass on liikumisel invariante —

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_0 d\mathcal{V} = \int_v \rho dv. \quad (4.3)$$

Kuna $dv = j d\mathcal{V}$, kus

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \right| = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}},$$

siis saab viimase võrduse esitada nii LK-s kui EK-s —

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho_0 - \rho j) d\mathcal{V} = 0 \quad \text{või} \quad \int_v (\rho - \rho_0 j^{-1}) dv = 0. \quad (4.4)$$

Lokaalse massi jäävuse aksiomi saame kui rakendame globaalset massi jäävuse aksiomi materiaalse punkti lõpmata väikeses tibruses. Valemite (4.4) põhjal saame

$$\rho_0 = \rho j = \rho \sqrt{\text{III}_C} \quad \text{või} \quad \rho = \rho_0 j^{-1} = \rho_0 \sqrt{\text{III}_c}. \quad (4.5)$$

Avaldisi (4.5) nimetatakse *materiaalseteks pidevusvõrranditeks* ja nad esitatakse Lagrange'i koordinaatides (Lagrange'i kirjeldus).

4.2. Liikumishulk, kineetiline moment, energia

4 - 4

Ruumilise pidevusvõrrandi (Euleri kirjeldus) saame kui esitame globaalset massi jäävuse aksiomi kujul

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv = \int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} \right] dv = 0. \quad (4.6)$$

Viimase põhjal avaldub lokaalne massi jäävuse aksiom kujul

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0, \quad (4.7)$$

mis kujutabki endast *ruumilist pidevusvõrrandit*.

Avaldised (4.5) ja (4.7) esitavad tiheduse ja sama nähtuse kaht erinevat kirjeldust — (4.5) on mugavam kasutada tahke keha mehaanikas, (4.7) aga vedelike ja gaaside puhul.

4.2 Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *liikumishulka*¹ \mathcal{P} avaldub kujul

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \mathbf{i}_k \int_{\mathfrak{M}} v_k(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} \quad (4.8)$$

¹Lk. *momentum or linear momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka termini *impulss*.

kujuures baasivektorid \mathbf{i}_k saab integraali ette tuua vaid seetõttu, et me kasutame sirgjoonelisi koordinaate. Kuna pideva massijaotuse puhul $d\mathcal{M} = \rho dv$, siis pole oluline, kas integreeritakse üle ruumala või massi. On selge, et liikumishulga \mathcal{P} komponendid

$$\mathcal{P}_K(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{M}} v_k(\mathbf{x}, t) d\mathcal{M}. \quad (4.9)$$

Kui korrutada avaldist (4.8) skalaarselt baasivektoriga \mathbf{I}_K , siis saame liikumishulga \mathcal{P} komponendid \mathcal{P}_K LK-s —

$$\mathcal{P}_K(\mathbf{X}, t) = \delta_{Kk} \int_{\mathcal{M}} v_k(\mathbf{x}, t) d\mathcal{M}. \quad (4.10)$$

Keha (mahus v sisalduva massi \mathcal{M}) *kineetiline moment*² \mathcal{H}_o ruumipunkti o suhtes

$$\mathcal{H}_o \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathcal{M} = \mathbf{i}_k \int_{\mathcal{M}} e_{klm} p_l v_m d\mathcal{M}. \quad (4.11)$$

Analoogiliselt eelnevaga saame ka kineetilise momendi komponendid esitada nii

²Ik. *moment of momentum or angular momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid impulsi moment ja pöördeimpulss.

4.2. Liikumishulk, kineetiline moment, energia

EK-s kui LK-s³ —

$$\mathcal{H}_k^o = \int_{\mathcal{M}} e_{klm} p_l v_m d\mathcal{M}, \quad \mathcal{H}_{Kl}^o = \delta_{Kk} \int_{\mathcal{M}} e_{klm} p_l v_m d\mathcal{M}. \quad (4.12)$$

Lisaks saab kineetilise momendi avaldada ka bivektori kujul

$$\mathcal{H}_{kl}^o = \int_{\mathcal{M}} (p_k v_l - p_l v_k) d\mathcal{M}, \quad \mathcal{H}_{KL}^o = \delta_{Kk} \delta_{Ll} \int_{\mathcal{M}} (p_k v_l - p_l v_k) d\mathcal{M}. \quad (4.13)$$

Pideva keskkonna mehanika II põhiaksioom —
liikumishulga tasakaalu seadus⁴

Liikumishulga muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude peavektoriga⁵ —

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F} \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{M}} v_k d\mathcal{M} = \mathcal{F}_k \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{M}} \delta_{Kk} v_k d\mathcal{M} = \mathcal{F}_K. \quad (4.14)$$

³Sii $\mathcal{H}_o = \mathcal{H}_K^o \mathbf{I}_K = \mathcal{H}_k^o \mathbf{i}_k$

⁴Ik. *principle of balance of momentum*

⁵Sii ja edaspidi võib nii Kroneckeri deltad kui permutatsioonisümbolid tuua integraali ette.

Pideva keskkonna mehaanika III põhiaksioom — kineetilise momendi tasakaalu seadus⁶

Kineetilise momendi muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude peamomendiga (mõlemad momendid peavad olema võetud tihke ja sama ruumipunkti suhtes) —

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_o &= \mathcal{M}_o \text{ ehk } \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \delta_{Kk} e_{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_K^o \text{ ehk} \\ &\frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \delta_{Kk} \delta_{Ll} (p_k v_l - p_l v_k) d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_{KL}^o \text{ ehk} \\ &\frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} e_{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_k^o \text{ ehk } \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} (p_k v_l - p_l v_k) d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_{kl}^o. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Valenitega (4.14) ja (4.15) esitatud pideva keskkonna mehaanika põhiaksioome nimetatakse *Euleri liikumisseadusteks* ning nad kujutavad endast Newtoni seaduste laiendust punktmassilt keskkonnale.

⁶Ik. principle of balance of moment of momentum

4.2. Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Pideva keskkonna mehaanika IV põhiaksioom — energia jäävuse seadus⁷

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetiline energia*⁸

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} v^2 d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \delta_{kl} \int_{\mathfrak{M}} v_k v_l d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} v_k v_k d\mathfrak{M}. \quad (4.16)$$

Energia jäävuse seadus. Kineetilise ja siseenergia summa muutumise kiirus võrdub välisjõudude töö ja keskkonda sisse tulnud või sealt lahkunud energiatega summa muutumise kiirusega —

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + \sum_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}. \quad (4.17)$$

Siin \mathcal{K} on kineetiline energia, \mathcal{E} – siseenergia, \mathcal{W} – välisjõudude töö ajatihikus ja \mathcal{U}_{α} – ajatihikus muundunud energiatega mehaanikaline ekvivalents. *Seeega eeldame, et energiad on aditiivsed.*

Suurused \mathcal{K} , \mathcal{W} ja \mathcal{U}_{α} on selgelt määratletavad, siseenergia \mathcal{E} on aga ebamäärasem ja teda võib vaadelda kui võrrandi (4.17) tasakaalustavat liiget. Ta on n. oleku

⁷Ik. principle of conservation of energy

⁸Ik. kinetic energy

funktsioon ja sõltub olekut väljendavatest muutujatest⁹.

Kui on teada siseenergia tihedus ε (ihikmassi kohta), siis

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{M}} \varepsilon d\mathcal{M} \equiv \int_{\mathcal{V}} \rho \varepsilon dv. \quad (4.18)$$

4.3 Pinge

4.3.1 Sise- ja välisjõud

Materiaalne keha deformeerub sise- ja välisjõudude¹⁰ toimel. Jõudude päritolu võib olla väga mitmesugune — mehaanikaline, elektriline, keemiline jne. jne. Punktmassi ja jäiga keha mehaanikas vaadeldakse jõudusid, mis võivad sõltuda vaid ajast, punkti asukohast ja kiirusest, st., $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t)$. Pideva keskkonna mehaanikas me selist piirangut ei sea ja jõud võib sõltuda lisaks eeltoodule ka näiteks deformatsioonigradiendist, kõrgemat järku tuletistest aja järgi, elektromagnetilistest muutujatest jne. Klassikalises mehaanikas jõudu tavaliselt

⁹Ik. *constitutive variables*

¹⁰Ik. *internal and external loads*

4.3. Pinge

4 - 10

ei defineerita. Staatika ja dünaamika kursustes jaotatakse jõud tavaliselt sise- ja välisjõududeks. Pideva keskkonna vaatepunktist lähtudes võib jõud jagada kolme kategooriasse.

1. *Välised mahu- ehk massijõud*¹¹ mõjuvad keha või keskkonda moodustavatele materiaalselele punktidele (masspunktidele). Näiteks gravitatsiooni jõud või elektrostaatilised jõud. Summaarne jõud saadakse integreerimisel üle kogu ruumala \mathcal{V} . Siin eeldatakse, et on teada jõe tihedus ihikmassi või ihikruumala kohta.
2. *Välised pinn- ehk kontaktjõud*¹² on põhjustatud teiste kehade või keskkonnadade mõjust kokkupuutepinnal. Siin eeldatakse, et on teada pinnäihikule mõjuv jõud. Näiteks hüdrostaatilise rõhu mõju vette asetatud keha pinnale.
3. *Sisejõud*¹³ on põhjustatud vaadeldavat keha moodustavate materiaalse-te punktide omavahelisest mõjust. Newtoni III seaduse põhjal mõjutavad kaks masspunkti teineteist võrdvastupidiste jõududega — seega on kõigi sisejõudude summa null. Dünaamika kursuses näidati, et ka kõigi sisejõudude

¹¹Ik. *extrinsic volume loads or extrinsic body loads*

¹²Ik. *extrinsic surface loads or contact loads*

¹³Ik. *mutual or internal loads*

peamoment on null. Punktmasside vahelised jõud (sisejõud) muutuvad pinnajõududeks kui me isoleerime (mõtteliselt) keskkonna või keha tiheduse ülejäänust. See annab pingehüpoteesi, mida vaatleme järgmises alajaotuses.

Allpool kasutame välisjõudude ja -momentide jaoks järgmisi tähistusi:

- \mathbf{f} — massijõud (jõud massiühiku kohta),
- $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ — pinnajõud (jõud pinnaihiku kohta vaadeldavat punkti läbiival pinnal normaaliga \mathbf{n}),
- \mathcal{F}_α — punktis \mathbf{p}_α mõjuv koondatud jõud,
- \mathbf{m} — massimoment (moment massiühiku kohta),
- $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ — pinnamoment (moment pinnaihiku kohta vaadeldavat punkti läbiival pinnal normaaliga \mathbf{n}),
- \mathcal{M}_α — punktis \mathbf{p}_α mõjuv jõupaari moment.

4.3. Pinge

4 - 12

Seega, kehale mõjuva jõusüsteemi peavektor

$$\mathcal{F} = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{f} d\mathcal{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da + \sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha \quad (4.19)$$

ja peamoment

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_o = \int_{\mathcal{M}} [\mathbf{m} + \mathbf{p} \times \mathbf{f}] d\mathcal{M} + \int_s [\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} + \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}] da + \\ + \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha \times \mathcal{F}_\alpha + \sum_\beta \mathcal{M}_\beta. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Koondatud jõudusid defineeritakse tihti kui piirjuhte pinnal- või mahujõududest. ✓
Selle käsitlus võib aga mõnikord põhjustada matemaatilisi raskusi ning vajab seetõttu täiendavate tingimuste kasutamist. Näiteks, et vältida määramatusi rakendatakse lokaalseid teoreeme ja printsiipe vaid punktides, kus ei mõju koondatud jõudusid. Globaalsete teoreemide puhul sellist probleemi pole.

Antud kursuses vaadeldakse edaspidi eeskätt vaid jaotatud jõudusid (massijõudusid ja pinnajõudusid) ja nende põhjustatud momente. Teisisõnu, reeglina esitatakse jõusüsteemi peavektor kujul

$$\mathcal{F} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da \quad (4.21)$$

ja peamoment kujul

$$\mathcal{M}_o = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da. \quad (4.22)$$

Arvestades avaldisi (4.21) ja (4.22) saavad liikumishulga ja kineetilise momendi globaalse tasakaalu seadused (4.14) ja (4.15) kujul

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}} &\stackrel{(4.8)}{=} \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da, \\ \dot{\mathcal{H}}_o &\stackrel{(4.11)}{=} \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \\ &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Neid võrrandeid nimetatakse *Euleri liikumisvõrrandeks*. Kuna sisejõud on tasakaalus, siis nemad neis võrrandeis ei esine.

4.3. Pinge

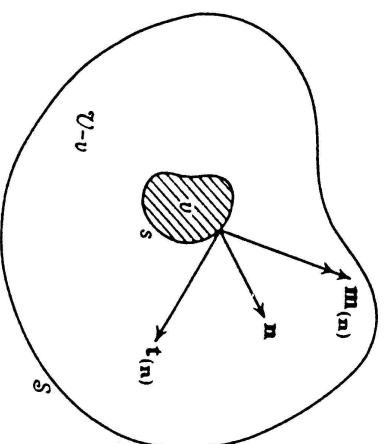
4 - 14

4.3.2 Cauchy pingehüpotees

Pinnal Δa mõjub keskmine jõud $\Delta \mathcal{F}$ ja keskmine moment punkti p suhtes \mathcal{M}_p . Kui $\Delta a \rightarrow 0$, siis suhe $\Delta \mathcal{F} / \Delta a \rightarrow \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$. Kui vaadeldavas protsessis moment punkti \dagger p suhtes ei lähene nullile, siis saame ka suuruse $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$.

Vaatleme väikest ruumipiirkonda v , mis on ümbritsetud pinnaga s ja mis asub täielikult kehas mahuga \mathcal{V} ja pinnaga S (joonis 4.1). Punktis p , mis asub pinnal s on välisnormaal \mathbf{n} ning mõjuvad jõud $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ ja moment $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ pinnatihiku kohta. Mõlemad nad on põhjustatud mahtude v ja $\mathcal{V} - v$ koosmõjust pinnal s . Suurust $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ nimetatakse *pingeks* ehk *pingevektoriks*

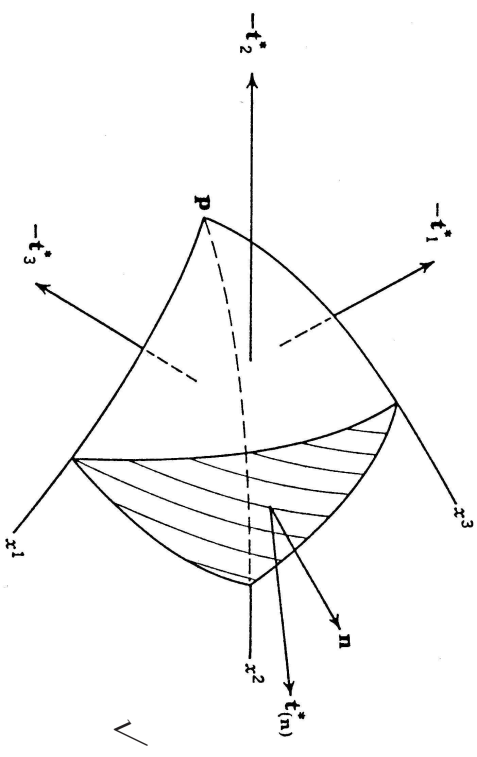
Joonis 4.1: Pinge ja momentpinge



ja suurust $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ *momentpingeks* ehk *momentpingevektoriks*¹⁴. Nad iseloomustavad vaadeldava mahu v välispinnal s mõjuvat väliskoorrumust, mis ei sõltu ainult vaadeldava punkti kohavektorist \mathbf{p} vaid ka pinnanormaalist \mathbf{n} .

¹⁴I.K. couple stress

Vaatleme väikest tetraeedrit (joonis 4.2), mille tipp p asub vaadeldava piirkonna v sees ja mille kolm tahku on koordinaatpinnad ning neljas asub pinnal s . Koordinaatpinnal $x_i = const.$ mõjuva keskmise pinge tähistame $-t_i^*$. Kasutame vaadeldava tetraeedri jaoks liikumishulga tasakaalu seadust (integreerimisel on rakendatud keskväärtusteoreeme) —



Joonis 4.2: Tetraeedrid

$$\frac{d}{dt} (\rho v^* \Delta v) = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}^* \Delta a - \mathbf{t}_k^* \Delta a_k + \rho \mathbf{f}^* \Delta v. \quad (4.24)$$

Siin Δv on tetraeedri ruumala, Δa ja Δa_k – tetraeedri tahkude pindalad, \mathbf{v}^* – tetraeedri punktide keskmine kiirus ning \mathbf{f}^* – keskmine mahujõud.

Jagame nüüd viimase avaldise Δa ja laseme $\Delta a \rightarrow 0$ nii, et punkt p läheneb pinnale s mahu v seest. Kuna $\Delta v / \Delta a \rightarrow 0$, siis piiril saame

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k \frac{da_k}{da} = \mathbf{t}_k n_k, \quad (4.25)$$

4.3. Pinge

4 - 16

sest teatavasti elementaarpind $da = \mathbf{n} da = da_k \mathbf{i}_k$ ja $da_k = n_k da$. Kokkuvõttes oleme seega tõestanud **teoreemi** — *pingevektor pinnapunktis p on lineaarfunktsioon ihkulisest pinnanormaalist n. Selle lineaarfunktsiooni kordajateks on pingektorid, mis mõjuvad vaadeldavat punkti läbivatel koordinaattasanditel.* †

Pingektorid \mathbf{t}_k ei sõltu pinnanormaalist \mathbf{n} . Eldades, et $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ on pidev funktsioon normaalist \mathbf{n} ja võttes valemis (4.25) $\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ saame

$$\mathbf{t}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}, \quad (4.26)$$

st., punktis p mõjuvad sama pinna vastaskülgedel võrdvastupidised pingektorid.

Rakendades analoogilist mõttekäiku ka momentpingetele, saame

$$\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{m}_k n_k = \mathbf{m}_k n_k \quad \text{ja} \quad \mathbf{m}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}. \quad (4.27)$$

4.3.3 Pingetensor

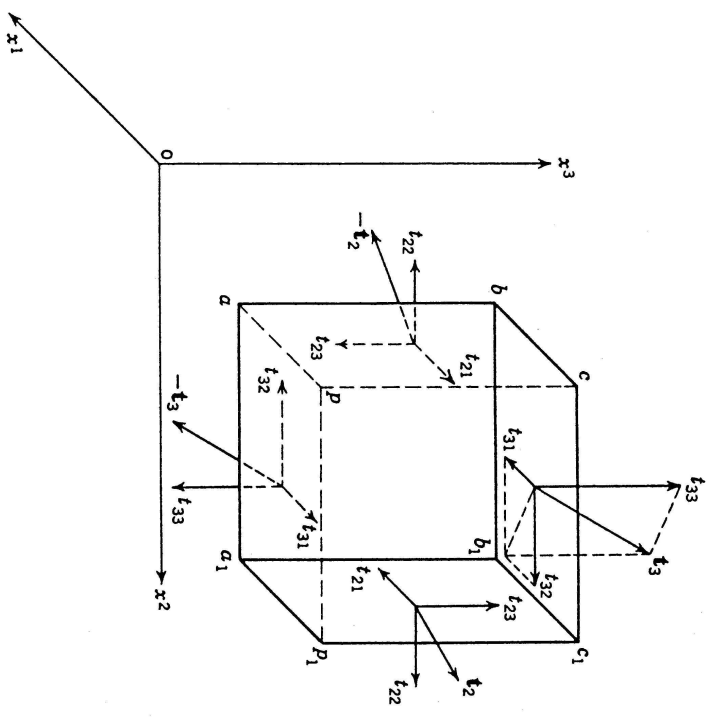
Pingetensori komponent (pingekomponent) t_{kl} on koordinaatpinnal $x_k = \text{const}$ mõjuva pingevektori t_k l -is komponent, st.,

$$t_k = t_{kl} \mathbf{i}_l \quad (4.28)$$

Seega näitab esimene indeks koordinaatpinda, millel pingektor t_k mõjub ja teine indeks vaadeldava komponendi mõjuvise suunda. Pingekomponentide positiivsed suunad on näidatud joonisel 4.3. Pingetensori normaalkomponente $k = l$ nimetatakse *normaalpingeteks*¹⁵ ja segakomponente $k \neq l$ *nihkepingseteks*¹⁶.

¹⁵Ik. normal stress

¹⁶Ik. shear stress



Joonis 4.3: Pingetensor

4.3. Pinge

Pingektori $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ saab nüüd avaldada kujul

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = t_k n_k \stackrel{(4.28)}{=} t_{kl} n_k \mathbf{i}_l, \quad (4.29)$$

kust

$$t_{(\mathbf{n})l} = t_{kl} n_k. \quad (4.30)$$

Seega oleme tõestanud teoreemi — *punkti p läbiival pinnal normaaliga n mõjuv pingektor $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ avaldub lineaarfunktsioonina vaadeldava punkti pingetensorist t_{kl} .*

Erinevate autorite erinevaid tähistusi pingetensori jaoks

t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}	Eringen, Truesdell
A	B	C	D	E	F	Cauchy varasemad tööd
p_{xx}	p_{yy}	p_{zz}	p_{yz}	p_{zx}	p_{xy}	Cauchy hilisemad tööd, St. Venant, Maxwell
X_x	Y_y	Z_z	Y_z	Z_x	X_y	F. Neumann, Kirchhoff, Love
P	Q	R	S	T	V	Kelvin
\widehat{xx}	\widehat{yy}	\widehat{zz}	\widehat{yz}	\widehat{zx}	\widehat{xy}	K. Pearson
σ_x	σ_y	σ_z	T_{yz}	T_{zx}	T_{xy}	Kármán, Timošenko, insenerid
T_{11}	T_{22}	T_{33}	T_{23}	T_{31}	T_{12}	Green, Zerna, Vene ja Saksa autorid
σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{23}	σ_{31}	σ_{12}	Mõned Inglise ja Ameerika autorid ning teised
σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	σ_{yz}	σ_{zx}	σ_{xy}	

4.4. Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

4.4 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

Lähtume valemist (4.23) (lk. 4-13), st. liikumishulga ja kineetilise momendi glo-
balse tasakaal seadustest

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathcal{M} &= \int_{\mathcal{M}} \mathbf{f} d\mathcal{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da, \\ \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathcal{M} &= \int_{\mathcal{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathcal{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da \end{aligned}$$

ning leiame vasakul poolel olevad materiaalsed tuletised.¹⁷ Saame

✓

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{a} d\mathcal{M} &= \int_{\mathcal{M}} \mathbf{f} d\mathcal{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da \\ \int_{\mathcal{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{a} d\mathcal{M} &= \int_{\mathcal{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathcal{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Need on valemite (4.4) alternatiivsed kujud. Vaatleme nüüd väiksest mahtu v , mis
asub mahu \mathcal{V} sees ja kus on pidev massijaotus. Kasutades valemeid (4.25) saame
viimastest

¹⁷ $d\mathcal{M} = \rho dv = \text{const}$.

$$\begin{aligned}\int_v \mathbf{a} \rho dv &= \int_v \mathbf{f} \rho dv + \int_s \mathbf{t}_k n_k da \\ \int_v \mathbf{p} \times \mathbf{a} \rho dv &= \int_v \mathbf{p} \times \mathbf{f} \rho dv + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_k n_k da.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Kasutades Greeni-Gaussi teoreemi¹⁸ saame üle minna pindintegraalilt ruumintegraalile

$$\begin{aligned}\int_v [\mathbf{t}_{k,k} + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a})] dv &= 0. \\ \int_v \{\mathbf{i}_k \times \mathbf{t}_k + \mathbf{p} \times [\mathbf{t}_{k,k} + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a})]\} dv &= 0.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Viimaste valemite tuletamisel on arvestatud, et $\mathbf{p}_{,k} = \mathbf{i}_k$. Valemid (4.33) kehtivad suvalise mahu v jaoks kui integraalide alused avaldised on nullid, st.,

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{k,k} + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) &= 0, \\ \mathbf{i}_k \times \mathbf{t}_k &= 0.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Need võrrandid väljendavadki *liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadust*. Valemi (4.34)₂ saamiseks on kasutatud valemit (4.34)₁.

¹⁸siin kasutame teda kujul $\int_v \mathbf{t}_{k,k} dv = \int_s \mathbf{t}_k n_k da$ ja $\int_v (\mathbf{p} \times \mathbf{t}_k)_{,k} dv = \int_s (\mathbf{p} \times \mathbf{t}_k) n_k da$

4.4. Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

4 - 22

Valemi (4.28) põhjal $\mathbf{t}_k = t_{kl} \mathbf{i}_l$. Asendades selle võrranditesse (4.34) ning arvestades, et $\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l = \epsilon_{klm} \mathbf{i}_m$ saame esitada liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused komponentkujul (koordinaatkujul) —

$$\begin{aligned}t_{lk,l} + \rho (f_k - a_k) &= 0, \\ t_{kl} &= t_{lk}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Võrrand (4.35)₂ on saadud avaldisest $e_{ijk} t_{jk} = 0$.

Äsjatuletatud lokaalse tasakaalu seadusi kujul (4.34) või kujul (4.35) nimetatakse vastavalt *Cauchy esimeseks ja teiseks liikumisseaduseks*.¹⁹

Avaldisest (4.35)₂ järeldub, et pingetensor peab olema sümmeetriline — seega on meil vaadeldaval juhul vaid kuus sõltumatut pingekomponenti: $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{12} = t_{21}, t_{13} = t_{31}, t_{23} = t_{32}$.

Järeldus: Kui liikumishulk on lokaalses tasakaalus ning mahu- ja pinnamomendid puuduvad, on kineetiline moment lokaalses tasakaalus parajasti siis kui pingetensor on sümmeetriline.

¹⁹Erinegen võib saada tulemused kokku kahe teoreemina.

Teoreem 1 Liikumishulga lokaalse tasakaalu tarvilik ja piisav tingimus on esitatav kujul (4.35)₁ või (4.34)₁.

Teoreem 2 Kineetilise momendi lokaalse tasakaalu tarvilik ja piisav tingimus esitatakse kujul (4.35)₂ või (4.34)₂, tingimusel, et liikumishulk on lokaalses tasakaalus.

Ülesanne 4.4.1. Kirjutada valemid (4.35) lahtri nii DRK x_i kui x, y, z korral.

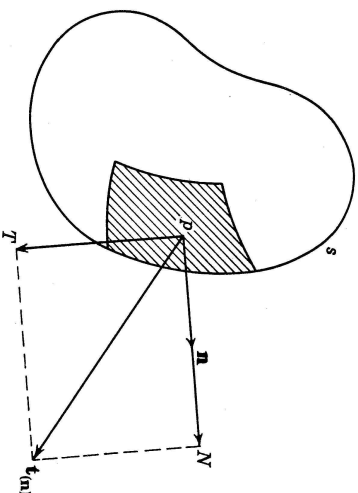
4.5 Peapinged ja pingetensori invariandid

4.5.1 Cauchy pingepinnad

Vaatleme pingevektorit $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$, mis mõjub punktis p pinnal S . Kui \mathbf{n} on pinna s välisnormaal, siis pingevektori $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ normaalikomponent

$$N = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{n} \stackrel{(4.30)}{=} t_{kl} n_k n_l. \quad (4.36)$$

Kui fikseerime N väärtuse ja muudame pinna orientatsiooni, siis selleks, et (4.36) oleks rahuldatud, peab muutuma pingetensor t_{kl} . Sel juhul esitab (4.36) teist järku pinda pingete ruumis. Seda pinda nimetatakse Cauchy pingepinnaks (analoogiliselt Cauchy deformatsiooni-ellipsoidiga).



Joonis 4.4: Normaal- ja tangentsiaalpinge

4.5.2 Peapinged, pingetensori peasuunad ja invariandid

Kui massi- ja pinnamomendid puuduvad, siis on pingetensor t_{kl} sümmeetriline. Seega kehtivad tema kohta samad seaduspärasused, mis deformatsioonitensorite kohta:

- (i) pingetensoril leidub vähemalt kolm peasuunda;
- (ii) pingetensoril leidub kolm peapinget, t_α ($\alpha = 1, 2, 3$), mis mõjuvad peapindadel;
- (iii) peapindadel on nihkepinged nullid;
- (iv) pingetensoril leidub kolm sõltumatut invarianti I_t , II_t ja III_t , mille leidmise eeskirjad, läbi pingetensori t_{kl} või peaväärtuste t_α , on analoogilised Greeni deformatsioonitensori C_{KL} invariantide leidmise eeskirjadele (vt. 3. ptk.)

4.5.3 Pinguse (pingeoleku) erijuhud

Analoogiliselt deformatsioonide erijuhutudele saame eristada ka pinguse erijuhute.

- (i) Kaks peapinget on nullid, kolmas pole — *lihtne tõmme ehk üheteljeline pingus*²⁰.
- (ii) Üks peapinge on null, kaks pole — *tasapinnaline pingus ehk tasandpingus ehk kaheteljeline pingus*²¹.
- (iii) Kui DRK-s esitatud tasandpinguse puhul kaks peapinget on suuruselt võrdsed kuid märgilt vastupidised²², siis nimetatakse sellist pingust *lahtsaks nihkeks*²³. Sel juhul puuduvad normaalpinged pindadel, mis moodustavad peapindadega 45° nurga. Kui tähistada $t_1 = -t_2 = t$, siis joonisel 4.5 kujutatud olukorra puhul on x_1, x_2 teljestikus nullist erinevad vaid pingetensori komponendid $t_{11} = t_{12}$ ja peateljestik 1-2 vaid $t_{11} = -t_{22} = t$. Seega invariandid

$$I_p = III_p = 0 \text{ ja } II_p = -(t_{12})^2 = -t^2 \quad (4.37)$$

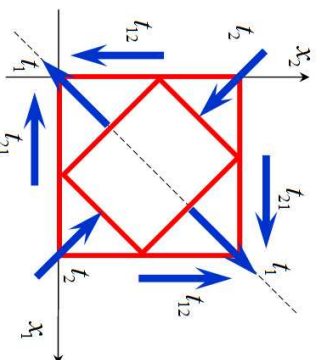
²⁰I. k. *simple tension or uniaxial stress*

²¹I. k. *plane stress or biaxial stress*

²²võib öelda ka, et üks nihkepinge on nullist erinev ja teised on nullid

²³I. k. *simple shear*

4.5. Peapinged ja pingetensori invariandid



Joonis 4.5: Lihtne nihe

ning nihkepinge $t_{12} = t$. See osutub ka maksimaalseks nihkepingeks (võrdle tugevusõpetusest tuntud valemiga $\max t_{kl} = (t_1 - t_2)/2$), mis mõjub pindadel, mis moodustavad peapindadega nurgad 45°.

4.6 Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

Cauchy liikumisvõrrandid (4.34) või (4.35) on esitatud EK-s. Lagrange'i kirjelduse jaoks toome sisse pingvektori \mathbf{T}_K ruumipunktis \mathbf{x} , mis vastab deformeerumata pinnale dA materiaalses punktis $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, nii et

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da = \mathbf{t}_k da_k = \mathbf{T}_K dA_K. \quad (4.38)$$

Kuna valem (3.233) põhjal $da_k = j X_{K,k} dA_K$ ja $dA_K = j^{-1} x_{k,K} da_k$ siis

$$\mathbf{t}_k = j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{T}_K = j X_{K,k} \mathbf{t}_k \quad (4.39)$$

Lähtume Cauchy esimesest liikumisest kujul (4.34)₁, st.,

$$\mathbf{t}_{k,k} + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0. \quad (4.40)$$

Kuna $(j^{-1} x_{k,K})_k = 0$, siis

$$\mathbf{t}_{k,k} = (j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_K)_{,k} = j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_{K,k} = j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_{K,L} X_{L,k} = j^{-1} \mathbf{T}_{K,K}. \quad (4.41)$$

Arvestades lokaalset massi jäävuse seadust $\rho_0 = j\rho$ saame seega Cauchy esimesele liikumisseadusele kuju

$$\mathbf{T}_{K,K} + \rho_0 (\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0. \quad (4.42)$$

4.6. Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

Piola (1833, 1836 ja 1848) tõi sisse pseudopinge tensorid T_{Kl} ja T_{KL} nii, et

$$\mathbf{T}_K = T_{Kl} \mathbf{i}_l = T_{KL} x_{l,L} \mathbf{i}_l = T_{KL} \mathbf{I}_L. \quad (4.43)$$

Tänapäeval on need tensorid tuntud kui *esimene ja teine Piola-Kirchhoffi pseudo-pinge tensor*. Terminit pseudopinge kasutatakse siin seetõttu, et mõlemad tensorid väljendavad pinget algse (deformeerumata) pinnakohta. Tensor T_{Kl} (esimene Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor) esitab pinget ruumipunktis \mathbf{x} ja tensor T_{KL} (teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor) materiaalses punktis \mathbf{X} .

Kombineerides avaldised (4.28), (4.39) ja (4.43) saame Cauchy pingetensori ning esimese ja teise Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensori vahelised seosed:

$$\begin{aligned} T_{Kl} &= j X_{K,k} t_{kl}, & t_{kl} &= j^{-1} x_{k,K} T_{Kl}, \\ T_{KL} &= T_{Kl} X_{L,l} = j X_{K,k} X_{L,l} t_{kl}, & & \\ t_{kl} &= j^{-1} x_{k,K} x_{l,L} T_{KL}, & T_{Kl} &= x_{l,L} T_{KL}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Kasutades valem (4.43) saab avaldada võrrandi (4.42) läbi tensorite T_{Kl} ja T_{KL} —

$$\begin{aligned} T_{Kk,K} + \rho_0 (f_k - a_k) &= 0, \\ (T_{KL} x_{k,K})_{,K} + \rho_0 (f_k - a_k) &= 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Pinna ja mahumomentide puudumisel saab Cauchy teine liikumisseadus $t_{kl} = t_{lk}$ LK-s kujul

$$\begin{aligned} T_{Kk}x_{m,K} &= T_{K^m}x_{k,K}, \\ T_{KL} &= T_{LK}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Tensoritega T_{KL} ja T_{Kl} seotud valemid ja Lagrange'i ehk materiaalseid koordinaate (Lagrange'i kirjeldust) on mugav kasutada tahkiste korral. Deformatsiooni käigus keha välispind muutub ja seega tuleb rajatingimused esitada liikuvil ja muutuvil pinnal ning nad sõltuvad siirdevektorist \mathbf{u} , mis on tundmatu. Lagrange'i kirjelduse puhul aga siin probleemi pole, sest rajatingimused esitatakse algse pinna jaoks, mis on teada. Ka tensorid T_{KL} ja T_{Kl} on seotud algpinnaga. Tõsi küll, liikumisvõrrandid ise on sel juhul "pisut" keerukamad kui Euleri kirjelduse korral. Linearse teooria puhul erinevus kahe vaadeldava kirjelduse vahel kaob.

4.6. Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

Näide P1

Pideva keskkonna deformatsiooni kirjeldab siirdeväli

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 + AX_3, \\ x_3 = X_3 + AX_2, \end{cases}$$

$x_k \equiv x_k$ ja $X_K \equiv X^K$. Cauchy pingetensor ruumipunktis $(1, 1, 1)$ on

$$[t_{kl}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Leida pingetensorite T_{Kl} ja T_{KL} , st. esimese ja teise Piola-Kirchoffi pingetensori, maatriksid. Milline materiaalne punkt on vaadeldaval hetkel ruumipunktis $(1, 1, 1)$?

Lahenduskäik ja vastused on failis NaideP1.pdf.