

Peatükk 6

Kovariantsus ja kontravariantsus ehk mis saab siis, kui koordinaatideks pole Descartes'i ristkoordinaadid

6.1. Sissejuhatus

6 - 2

6.1 Sissejuhatus

Seni oleme kasutanud DRK, kuid üldjuhul ei pruugi koordinaadid olla sirgjoonelised ja/või ortogonaalsed. Lihtsamateks kõverjooneliste koordinaatide näideteks on silindrilised ja sfäärilised koordinaadid. Sellistel juhtudel tulevad sisse ko- ja kontravariantsuse mõisted ning oliliseks muutub see, kas indeksid on kirjutatud alla või ülles. Kolmandas peatükis tõime sisse EK ja LK kõverjoonelistena, kuid edaspidi oleme kasutanud vaid DRKe.

Käesolevas peatükis esitame eelnevates peatükkides tuletatud põhitulemused kõverjoonelistes koordinaatides ja defineerime juurde mõned uued mõisted. Pikkemalt on käesolevas peatükis esitatust võimalik lugeda minu loengukonspetsist, mis oli pideva keskkonna mehaanika õpetamisel kasutusel kuni 2008/09 õppeaastani, vt. <http://cens.ioc.ee/~salupere>.

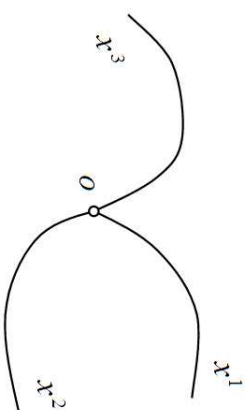
Märkus: Käesolevas peatükis tähistavad j ja J vastavalt (üldistele) kõverjoonelistele koordinaatidele ja DRKle vastavaid jakobiaane:

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \right| \quad \text{ja} \quad J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right|.$$

6.2 Koordinaadid

6.2.1 Euleri koordinaadid

Toome sisse ajas muutumatu kõverjoonelise koordinaatsüsteemi \mathbf{x} , mille suhtes vaadeldakse keskkonna materiaalse punkti liikumist. Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Euleri koordinaatsüsteemiks* ehk *ruumiliseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate \mathbf{x} — *Euleri koordinaatideks* (EK) ehk *ruumilisteks koordinaatideks*. Ühe punktmassi liikumist Euleri koordinaatsüsteemis kirjeldavad kolm võrrandit



Joonis 6.1: Euleri koordinaadid

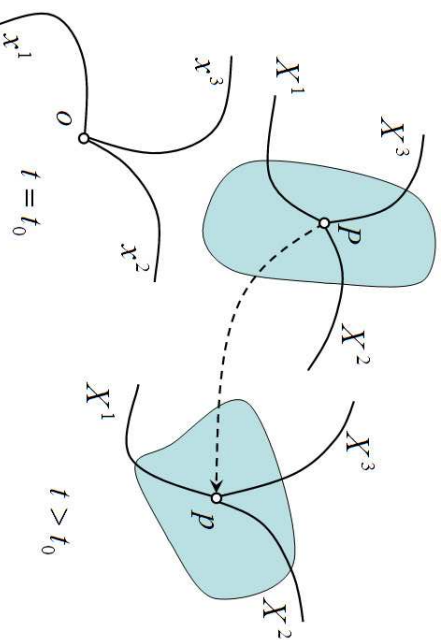
dinaatsüsteemiks ehk *ruumiliseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate \mathbf{x} — *Euleri koordinaatideks* (EK) ehk *ruumilisteks koordinaatideks*. Ühe punktmassi liikumist Euleri koordinaatsüsteemis kirjeldavad kolm võrrandit

$$x^i = f^i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$

6.2. Koordinaadid

6.2.2 Lagrange'i koordinaadid

Fikseerime ajahetkel $t = t_0$ keskkonna materiaalse punkti asendi ja seome nendega kõverjoonelise koordinaatsüsteemi \mathbf{X} . Kui nüüd ajahetkel $t > t_0$ keskkond liigub ja muudab kuju, siis liigub ja muudab kuju ka koordinaatsüsteem \mathbf{X} . Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Lagrange'i koordinaatsüsteemiks* ehk *materiaaldinaatsüsteemiks* ehk *materiaalseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate



Joonis 6.2: Lagrange'i koordinaadid

\mathbf{X} — *Lagrange'i koordinaatideks* (LK) ehk *materiaalseteks koordinaatideks*.

6.2.3 Kõverjooneliste koordinaatide avaldamine Descartes'i ristkoordinaatide kaudu

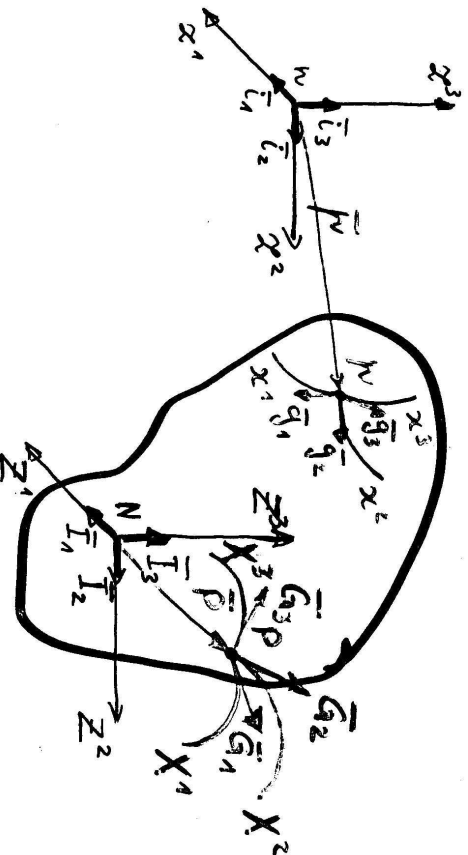
Eukleidilises ruumis E^3 saab alati sisse tuua Descartes'i ristkoordinaadid (DRK). Toome nüüd Euleri kõverjoonelised koordinaadid sisse läbi Euleri Descartes'i ristkoordinaatide (EDRK) $\mathbf{z} \equiv (z^1, z^2, z^3)$. Selleks eeldame, et EDRK \mathbf{z} sõltuvad kolmest Eukleidilise ruumi E^3 muutujast \mathbf{x} , st.,

$$z^k = f^k(\mathbf{x}) = z^k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3, \quad (6.2)$$

kus funktsioonid f^k kuuluvad klassi C^r , $r \geq 1$ (st., nad on pidevad funktsioonid, mis omavad pidevaid osatuletisi kuni järgrumi r) ja on defineeritud mingis ruumi E^3 piirkonnas. Nüüd tuleb määratleda tingimused, mille puhul õnnestub võrranditest (6.2) avaldada

$$x^k = x^k(\mathbf{z}), \quad k = 1, 2, 3 \quad (6.3)$$

nii, et (6.2) ja (6.3) oleksid teineteise ühessed pöördteisendused.



Joonis 6.3: Kõverjoonelised koordinaadid ja DRK

Matemaatilisest analüüsist tuntud teoreemi (teoreem ilmutamata funktsioonist)¹ põhjal omab teisendus (6.2) punkti p ümbruses δ ühest pöördteisendust (6.3) siis ja ainult siis kui jakobiaan

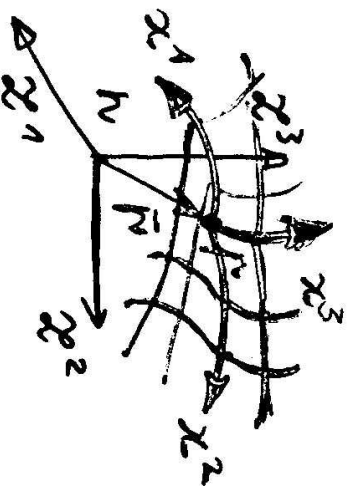
$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| \neq 0; \quad |x^k - x_0^k| < \delta. \quad (6.4)$$

¹Tõestust vaata näiteks M.N.L. Narasimhani'i õpikust *Principles of Continuum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New-York et al., 1993. lk. 28–30

Siin x_0^k , $k = 1, 2, 3$, on ruumipunkti p koordinaadid ja

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| = \begin{vmatrix} \partial z^1 / \partial x^1 & \partial z^1 / \partial x^2 & \partial z^1 / \partial x^3 \\ \partial z^2 / \partial x^1 & \partial z^2 / \partial x^2 & \partial z^2 / \partial x^3 \\ \partial z^3 / \partial x^1 & \partial z^3 / \partial x^2 & \partial z^3 / \partial x^3 \end{vmatrix}. \quad (6.5)$$

Kui fikseerime avaldise (6.2) vasakul poolel (\mathbf{z}) = (z_*^1, z_*^2, z_*^3) , siis saame kolme lõikuva pinnavaõrandid. Teatavasti esitavad kaks lõikuvat pinda kõvera (kõverjoone) ja kolm lõikuvat pinda punkti. Kui (\mathbf{z}) = (z_*^1, z_*^2, z_*^3) on punkti p koordinaadid, siis paarikaupe lõikuvad pinnad esitavad kolm ruumipunkti p läbivat kõverat. Neid ruumipunkti p läbivat kolme pinda nimetatakse *koordinaatkõverateks* ja kolme kõverat *koordinaatkõverateks*.



Joonis 6.4: Koordinaatkõverad ja koordinaatpinnad

läbivat kolme pinda nimetatakse *koordinaatkõverateks* ja kolme kõverat *koordinaatkõverateks*.

6.2. Koordinaadid

Ajahetkel $t = t_0$ toome analoogiliselt sisse Lagrange'i kõverjoonelised koordinaadid — eeldame, et LDRK \mathbf{Z} on avaldatavad LK \mathbf{X} kaudu kujul

$$Z^K = Z^K(\mathbf{X}), \quad K = 1, 2, 3. \quad (6.6)$$

Vastav pöördteisendus

$$X^K = X^K(\mathbf{Z}), \quad K = 1, 2, 3 \quad (6.7)$$

eksisteerib ja on ühene materiaalse punkti P ümbruses δ paraajasti siis kui jaksibiaan

$$J_L = \left| \frac{\partial Z^K}{\partial X^L} \right| \neq 0; \quad |X^K - X_0^K| < \delta. \quad (6.8)$$

Avaldised (6.2), (6.3), (6.6) ja (6.7) nimetatakse *koordinaatteisendusteks*, kusjuures (6.2) ja (6.3) kehtivad suvalisel ajahetkel, kuid (6.6) ja (6.7) vaid $t = t_0$ puhul (viimaseid kasutatakse vaid selleks, et LK sisse tuua).

Edaspidises eeldame, et

- kõverjoonelised koordinaatsüsteemid on sisse toodud Descartes'i ristkoordinaatide kaudu (EK kujul (6.2) ja LK kujul (6.6)) selliselt, et jakobiaanid

(6.4) ja (6.8) pole samaselt nullid ruumis E^3 või vähemalt mingis meid huvitavas ruumi E^3 piirkonnas (v.a. mõned singulaarsed punktid, jooned või pinnad);

- tildjuhul on pikkuse mõõtmiseks piki telgi z^k ja Z^K valitud ühtne masttaap.

Märkused:

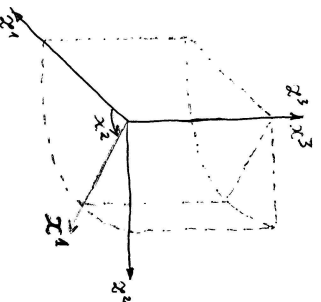
- Selliselt sisse toodud kõverjoonelised koordinaadid on tildjuhul lokaalsed ja pole tildjuhul ortogonaalsed.
- $J \neq 0 \Rightarrow J > 0$ või $J < 0$ igas ruumpunktis.

✓

Näide 6.2.1. *Euleri koordinaatideks x^k on silindrilised koordinaadid. Kas EK on üheselt määratud EDRK kaudu? Millised on koordinaatpinnad ja koordinaatkõverad?*

Defineerime x^k läbi z^k :

$$\begin{cases} z^1 = x^1 \cos x^2 \\ z^2 = x^1 \sin x^2 \\ z^3 = x^3 \end{cases} \quad (6.9)$$



Joomis 6.5: Silindrilised koordinaadid

Pöördteisendus

$$\begin{cases} x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2} \\ x^2 = \arctan(z^2/z^1) \\ x^3 = z^3 \end{cases} \quad (6.10)$$

Jakobiaan

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| = \dots$$

Järelkult, ühene pöördteisendus eksisteerib ...

6.3 Liikumise kirjeldamine

Liikumisseaduseks nimetatakse üheparameetrilist koordinaatide teisendust

$$x^k = x^k(\mathbf{X}, t) \quad (6.11)$$

või

$$X^K = X^K(\mathbf{x}, t), \quad (6.12)$$

mis siirdab materiaalse punkti \mathbf{X} ruumipunkti \mathbf{x} . Parameetrik \mathbf{x} on siin aeg t . Alghetkel $t = t_0$ kujutavad teisendused (6.11) ja (6.12) (parameetrist sõltumata) koordinaatteisendusi. Tihti on kasulik kui $t = t_0$ puhul teljestikud x^k ja X^K ühtiksid, st., hetkel $t = t_0$ $x^k = X^K$ kui $k = K$. Sel juhul on materiaalse punkti asukoht alghetkel $t = t_0$ automaatselt teada ning asukoha muutus algasendi suhtes on hetkel $t > t_0$ lihtsalt leitav.

Analoogiliselt eelmise punktiga 6.2.3 tekib ka siin küsimus liikumisseaduse ühesusest, st., teisendused (6.11) ja (6.12) peavad olema teineteise ühised pöördeisendused. Eldades, et nii funktsioon (6.11) kui (6.12) kuuluvad klassi C^r , $r \geq 1$, on see tingimus täidetud ruumipunkti p ümbruses δ parajasti siis kui jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \right| \neq 0 \quad |x^k - x_0^k| < \delta. \quad (6.13)$$

*

6.4. Skalaar, vektor ja tensor

6 - 12

Jakobiaan (6.13) väljendab tegelikult pidevuse aksioomi, mille põhjal positiivne † lõplik aine maht ei saa deformeeruda nullmahuks ega lõpmata suureks mahuks² ning ükski ainehulk ei tungi teise ainehulga sisse³ (joon deformeerub jooneks, pind pinnaks ja maht mahuks).

6.4 Skalaar, vektor ja tensor

6.4.1 Skalaar

Vaatleme koordinaatsüsteeme ζ^i ja η^i . Funktsiooni $\varphi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) \equiv \varphi(\zeta)$ nime-tatakse (absoluutseks) *skalaariks* kui ta ei muuda koordinaatteisendusega $\zeta^k = \zeta^k(\eta^1, \eta^2, \eta^3) \equiv \zeta^k(\boldsymbol{\eta})$, $k = 1, 2, 3$ oma algväärtust, st.,

$$\varphi(\zeta^1(\boldsymbol{\eta}), \zeta^2(\boldsymbol{\eta}), \zeta^3(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi(\boldsymbol{\eta}) = \varphi(\zeta). \quad (6.14)$$

Seega ei sõltu skalaari väärtus antud punktis koordinaatide valikust.

Näide 6.4.1. *Temperatuur on absoluutne skalaar.*

²ik. *indestructibility of matter*

³ik. *impenetrability of matter*

6.4.2 Kontravariantne vektor

Suurusi $\varphi^k(\boldsymbol{\zeta})$ nimetatakse vektori kontravariantseteks komponentideks ehk lihtsalt kontravariantseteks vektoriks kui koordinaatteisenduse $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$ puhul muutuab ta vastavalt seadusele

$$\varphi^k(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi^k(\boldsymbol{\eta}) = \varphi^m(\boldsymbol{\zeta}) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.15)$$

Suurusi $\psi^k(\boldsymbol{\eta})$ tuleb siin mõista kui suuruste $\varphi^k(\boldsymbol{\zeta})$ komponente koordinaatsüsteemis η^i , $i = 1, 2, 3$.

Samuti on siin kasutatud *summeerimiskokkulepet*, mida kõverjoonelistel koordinaatide korral jääme kasutama kujul $\sum_{i=1}^3 a^i b_i \equiv a^i b_i$, st. üks summeerimisindeksitest peab olema all ja teine üleval.

Näide 6.4.2. *Diferentsiaal on kontravariantne vektor, sest võttes*

$\varphi^k = d\zeta^k$, saame

$$\psi^k = d\eta^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} d\zeta^m \equiv \varphi^m \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}.$$

6.4.3 Kovariantne vektor

Suurusi $\varphi_k(\boldsymbol{\zeta})$ nimetatakse vektori kovariantseteks komponentideks ehk lühidalt kovariantseks vektoriks kui nad koordinaatide teiseenduse $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$ puhul teise-nevad vastavalt seadusele

$$\varphi_k(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi_k(\boldsymbol{\eta}) = \varphi_m(\boldsymbol{\zeta}) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.16)$$

Näide 6.4.3. *Osatuletis absoluutselt skalaarist on kovariantne vektor, sest tähistades*

$$\varphi_m = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m}$$

kas Φ on absoluutne skalaar, saame

$$\varphi_k(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi_k(\boldsymbol{\eta}) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} = \varphi_m(\boldsymbol{\zeta}) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

6.4.4 Kontravariantne, kovariantne ja segatensor

Suurusi $\Phi^{kl}(\zeta)$, $\Phi_{kl}(\zeta)$ ja $\Phi^k_l(\zeta)$ nimetatakse vastavalt kontravariantseteks-, kovariantseks- ja segatensooriks kui nad koordinaatteisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul teisenevad seaduste

$$\Phi^{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^{kl}(\eta) = \Phi^{mn}(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \eta^l}{\partial \zeta^n}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (6.17)$$

$$\Phi_{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi_{kl}(\eta) = \Phi_{mn}(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (6.18)$$

ja

$$\Phi^k_l(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^k_l(\eta) = \Phi^m_n(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (6.19)$$

järgi.

‡

6.5. Baasivektor, meetriline tensor

6.5 Baasivektor, meetriline tensor

6.5.1 Kovariantsed baasivektorid

Vaatleme kahte DRK — üks neist on EDRK z^k ja teine LDRK Z^K . Vastavad ühikbaasid tähistame \mathbf{i}_k ja \mathbf{I}_K . Kui eeldame, et pikkuse mastaap piki telgi z^k ja Z^K on sama, siis omavad vektorid \mathbf{i}_k ja \mathbf{I}_K võrdset ühikpikkust. Kõverjoonelised LK tuuakse teatavasti sisse kujul (6.6), st.,

$$Z^K = Z^K(\mathbf{X}), \quad K = 1, 2, 3,$$

ja kõverjoonelised EK kujul (6.2), st.,

$$z^k = z^k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3.$$

Kohavektorid \mathbf{P} ja \mathbf{p} avalduvad läbi LDRK ja EDRK kujul

$$\mathbf{P} = Z^K(\mathbf{X})\mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{p} = z^k(\mathbf{x})\mathbf{i}_k. \quad (6.20)$$

Viimastest leiame kohavektorite \mathbf{P} ja \mathbf{p} diferentsiaalid

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} dX^K = \mathbf{G}_K dX^K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} dx^k = \mathbf{g}_k dx^k, \quad (6.21)$$

kus vektoreid

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M \quad (6.22)$$

ja

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m \quad (6.23)$$

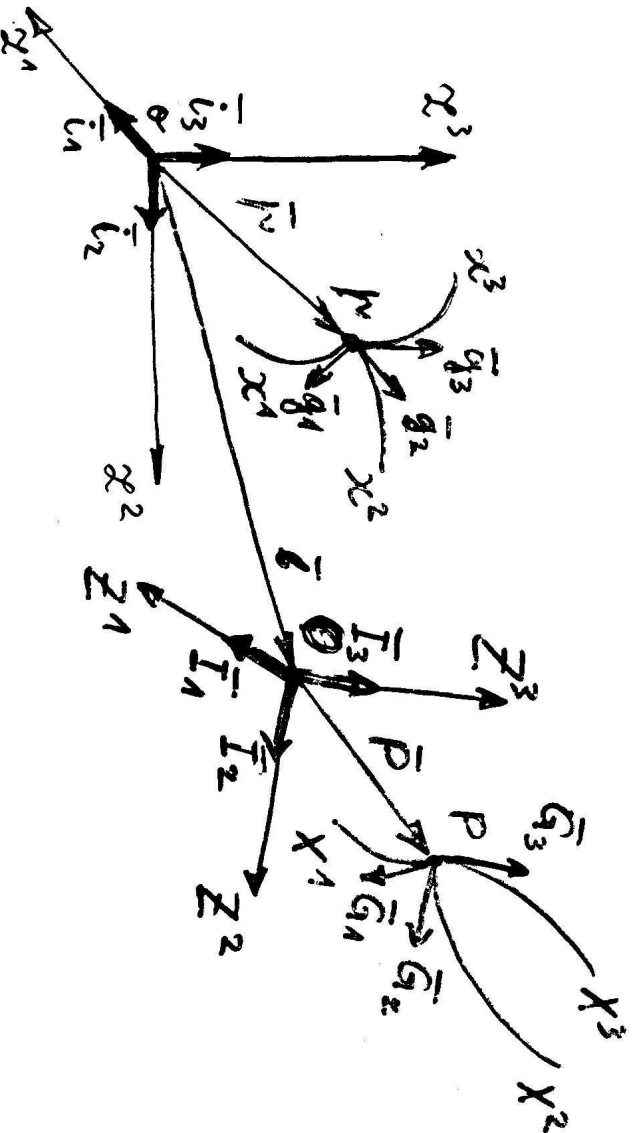
nimetatakse vastavalt kõverjooneliste koordinaatide X^K ja x^k *kovariantseteks baasivektoriteks*. Nad on suunatud piki koordinaatkõverate puutujaid (vaadelda vas punktis) ja liikumisel tihest punktist teise muutuvad nad tildjuhul nii suuruselt kui suunalt. Seega moodustavad nad vektorvälja.

Loomulikult saab suurusi $d\mathbf{P}$ ja $d\mathbf{p}$ avaldada DRK kaudu kujul

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z^K} dZ^K = \mathbf{I}_K dZ^K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^k} dz^k = \mathbf{i}_k dz^k \quad (6.24)$$

ning DRK baasivektoreid \mathbf{I}_K ja \mathbf{i}_k omakorda baasivektorite \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k kaudu kujul \checkmark

$$\mathbf{I}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z^K} = \frac{\partial X^L}{\partial Z^K} \mathbf{G}_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^k} = \frac{\partial x^l}{\partial z^k} \mathbf{g}_l. \quad (6.25)$$



Joonis 6.6: Kovariantsed baasivektorid

6.5.2 Kovariantne meetriline tensor

Elementaarpiikkuse ruut $dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P}$ avaldub lähtudes valemistest (6.24) ja (6.21) kujul

$$dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = dZ^K \mathbf{I}_K \cdot dZ^L \mathbf{I}_L = dX^K \mathbf{G}_K \cdot dX^L \mathbf{G}_L.$$

Järgnevalt defineerime *kovariantse meetrilise tensori*

$$G_{KL} = G_{LK} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L \stackrel{(6.22)}{=} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M \cdot \frac{\partial Z^N}{\partial X^L} \mathbf{I}_N = \delta_{MN} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \frac{\partial Z^N}{\partial X^L}, \quad (6.26)$$

kus *Kroneckeri delta*

$$\delta_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{I}_L = \begin{cases} 1, & K = L, \\ 0, & K \neq L. \end{cases} \quad (6.27)$$

Arvestades viimaseid avaldise saame elementaarpiikkuse ruudu avaldada kujul

$$dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL} dX^K dX^L = \delta_{KL} dZ^K dZ^L. \quad (6.28)$$

Analoogiliselt — elementaarpiikkuse ruut

$$ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl} dx^k dx^l = \delta_{kl} dz^k dz^l, \quad \delta_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (6.29)$$

6.5. Baasivektor, meetriline tensor

ja *kovariantne meetriline tensor*

✓

$$g_{kl} = g_{lk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \stackrel{(6.23)}{=} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m \cdot \frac{\partial z^n}{\partial x^l} \mathbf{i}_n = \delta_{mn} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^n}{\partial x^l}. \quad (6.30)$$

Märkus. Suurused ds^2 ja dS^2 on skalaarid ja nende väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi valikust, st., $ds^2(\mathbf{x}) = ds^2(\mathbf{z})$ ja $dS^2(\mathbf{X}) = dS^2(\mathbf{Z})$.

6.5.3 Kontravariantset baasivektorid ja meetrilised tensorid

Kovariantsete baaside \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k duaalsed⁴ baasid on defineeritud läbi orthonormaalsustingimuse

$$\mathbf{G}^K \cdot \mathbf{G}_L = \delta^K_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_l = \delta^k_l \quad (6.31)$$

Vektoreid \mathbf{G}^K ja \mathbf{g}^k nimetatakse *kontravariantseteks baasivektoriteks* ja nad avalduvad võrrandisüsteemide (6.31) lahendina kujul

$$\mathbf{G}^K = G^{KL} \mathbf{G}_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}^k = g^{kl} \mathbf{g}_l. \quad (6.32)$$

⁴Lad. k. *dualis* — kahene

Viimastes avaldistes esinevad *kontravariantset meetrilised tensorid* avalduvad läbi kovariantsete meetriliste tensorite kujul

$$G_{KL} = \frac{\text{cofactor } G_{KL}}{G} \equiv \frac{(-1)^{K+L} \Delta_{LK}^G}{G} \quad (6.33)$$

ja

$$g^{kl} = \frac{\text{cofactor } g_{kl}}{g} \equiv \frac{(-1)^{k+l} \Delta_{lk}^g}{g}, \quad (6.34)$$

kus

$$G = |G_{KL}| \quad \text{ja} \quad g = |g_{kl}| \quad (6.35)$$

on determinantid ning Δ_{KL}^G ja Δ_{kl}^g on determinantide $|G_{KL}|$ ja $|g_{kl}|$ elementide indeksipaariga KL või kl vastav miinor. Meetrilised tensorid rahuldavad tingimusi ✓

$$G_{KL} G^{LM} = \delta_K^M \quad \text{ja} \quad g_{kl} g^{lm} = \delta_k^m. \quad (6.36)$$

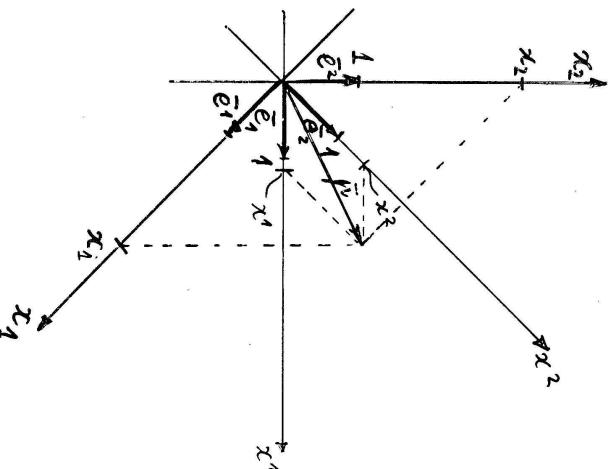
Kuna meetrilised tensorid G_{KL} ja G^{KL} on muutujate X^I ning meetrilised tensorid g_{kl} ja g^{kl} muutujate x^i funktsioonid, siis kujutavad G_{KL} ja G^{KL} endast tensorvälju Lagrange'i koordinaatides X^I ning g_{kl} ja g^{kl} tensorvälju Euleri koordinaatides x^i .

Vt. ka faili kojokoord.pdf

6.5. Baasivektor, meetriline tensor

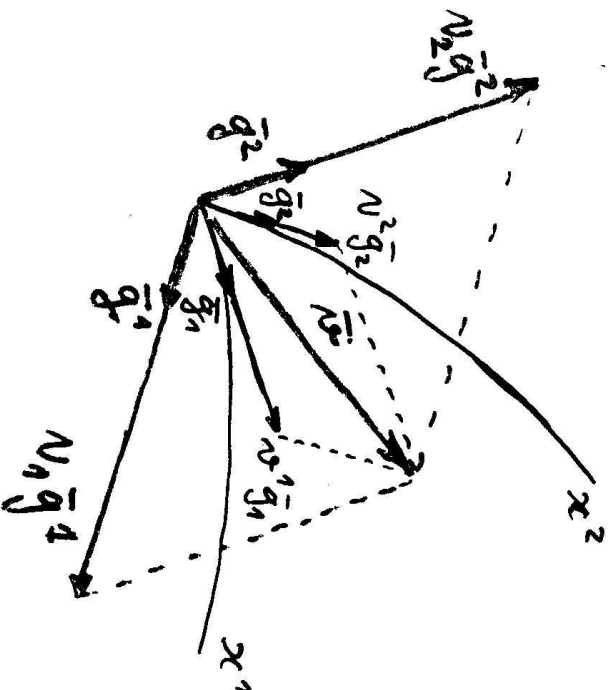
6 - 22

Näide 6.5.1. Vektorite avaldamine kovariantsete ja kontravariantsete baasivektorite kaudu.



Joonis 6.7:

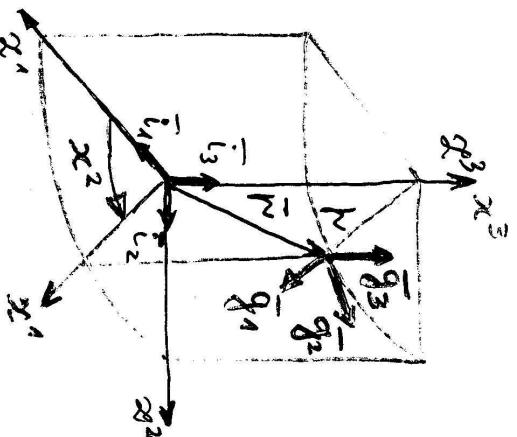
Näide 6.5.2. Vektorite avaldamine kovariantsete ja kontravariantsete baasivektorite kaudu.



Joonis 6.8:

6.5. Baasivektor, meetriline tensor

6 - 24



Joonis 6.9: Silindrilised koordinaadid

Näide 6.5.3. Pöördume tagasi Näite 6.2.1 (lk. 9) juurde. Euleri koordinaatideks x^k on silindrilised koordinaadid, mis on defineeritud läbi DRK järgmiselt:

$$\begin{cases} z^1 = x^1 \cos x^2 \\ z^2 = x^1 \sin x^2 \\ z^3 = x^3 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2} \\ x^2 = \arctan \frac{z^2}{z^1} \\ x^3 = z^3 \end{cases}$$

Vaatleme suvalist punkti p koordinaatidega (\mathbf{x}) ehk kohavektoriga \mathbf{p} . Leida sellele punktile vastavaa kovariantset ja kontravariantset baasivektorid ning meetrilised tensorid!

Suvaline vektor \mathbf{v} on avaldatav nii kovariantse kui ka kontravariantse baasi kaudu:

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{g}^k = v^k \mathbf{g}_k, \quad (6.37)$$

kus v_k ja v^k on vastavalt vektori \mathbf{v} kovariantset ja kontravariantset komponendid, mis ühtivad vaid ortonormeeritud baasi puhul.

Korrutame nüüd avaldist (6.37) kontravariantse baasivektoriga \mathbf{g}^l

$$v_k \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^l = v^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^l.$$

Kuna $v^k \delta_k^l = v^l$, siis $v_k g^{kl} = v^l$, ehk nimetades indeksid timber,

$$v^k = g^{kl} v_l. \quad (6.38)$$

6.5. Baasivektor, meetriline tensor

6 - 26

Kui korrutada aga avaldist (6.37) kovariantse baasivektoriga \mathbf{g}_l , siis saame analoogiliselt, et

$$v_k = g_{kl} v^l. \quad (6.39)$$

Sellist protseduuri nimetatakse *vektori indeksite tõstmiseks ja langetamiseks*. See-ga, meetriliste tensorite abil saab indekseid tõsta ja langetada ehk teisisonu — minna kovariantsetelt komponentidelt üle kontravariantsetele ja vastupidi. Lag-range'i koordinaatide puhul analoogiliselt

$$V^K = G^{KL} V_L \quad \text{ja} \quad Y_K = G_{KL} Y^L \quad (6.40)$$

Märkused:

1. Üldjuhul pole baasivektorid \mathbf{G}^K , \mathbf{G}_K , \mathbf{g}^k ja \mathbf{g}_k ühikvektorid. Nende pikkused avalduvad läbi meetrilise tensori diagonaali elementide —

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}^K| &= \sqrt{G^K_K}, & |\mathbf{G}_K| &= \sqrt{G_{K K}}, & K &= \underline{K} \\ |\mathbf{g}^k| &= \sqrt{g^k_k}, & |\mathbf{g}_k| &= \sqrt{g_{k k}}, & k &= \underline{k}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Allkriips tähendab sin seda, et korduva indeksi järgi ei summeerita. Eelne-mud näite 6.5.3 puhul $|\mathbf{g}_1| = |\mathbf{g}_3| = 1$ ja $|\mathbf{g}_2| = x^1$.

2. Kui kõverjoneelised koordinaadid on ortogonaalsed, siis $g^{kl} = g_{kl} = 0$ kui $k \neq l$. Näite 6.5.3 puhul see nii oligi. Lisaks olid vektorid \mathbf{g}^k ja \mathbf{g}_k kollineaarsed.

6.5.4 Vahetaja⁵

Seni olemme hoidnud EK ja LK lahust, kuid vahel on vaja tihes koordinaatsüsteemis esitatud vektoreid projekteerida teise koordinaatsüsteemi baasivektoritele. Vaatleme joonist 6.6 (lk. 18) Punktide P ja p kohavektorid

$$\mathbf{P} = P^L \mathbf{G}_L \text{ ja } \mathbf{p} = p^l \mathbf{g}_l.$$

Korrutame neist esimest kontravariantse baasivektoriga \mathbf{G}^K —

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^K = P^L \mathbf{G}_L \cdot \mathbf{G}^K = P^L \delta_L^K = P^K.$$

Seega,

$$P^K = \mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^K \text{ ja } p^k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}^k. \quad (6.42)$$

Viimased kujutavad endast vektorite \mathbf{P} ja \mathbf{p} projektsioone vastavalt baasivektorite \mathbf{G}^K ja \mathbf{g}^k sihtidele (vt. Näited 6.5.1 ja 6.5.2).

⁵Varasemas konseptis nihutaja, i.k. *shifter*.

Oletame nüüd, et tahame viia vektori \mathbf{p} paralleellütkkega punkti P ja projekteerida teljestikku X^K , st., baasivektorite \mathbf{G}^K sihile. Tähistame vastava projektsiooni p^K . Nüüd

$$\mathbf{p} = p^K \mathbf{G}_K(\mathbf{X}) = p^k \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \quad (6.43)$$

Korrutame avaldist (6.43) kontravariantse baasivektoriga \mathbf{G}^L

$$p^K \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}^L = p^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}^L.$$

Defineerime nn. *vahetaja*

$$g_K^K \stackrel{\text{def}}{=} g_K^K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}^K = \mathbf{G}^K \cdot \mathbf{g}_k. \quad (6.44)$$

Seega, tähistades timber indeksid $L \rightarrow K$ saame

$$p^K = g_K^K p^k = g_K^k p^k, \quad (6.45)$$

mis esitabki kohavektori \mathbf{p} projektsiooni kovariantse baasivektori \mathbf{G}^K silhil. Korrutades avaldist (6.43) kontravariantse baasivektoriga \mathbf{g}^l ja defineerides *vahetajad*

$$g_K^k \stackrel{\text{def}}{=} g_K^k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{G}^K = \mathbf{G}^K \cdot \mathbf{g}^k, \quad (6.46)$$

saame vektori \mathbf{p} tagasi EK-sse:

$$p^k = g_K^k p^K = g_K^k p^K. \quad (6.47)$$

Analoogiliselt eelnevaga saab defineerida vahetajad

$$g_{kK} \stackrel{\text{def}}{=} g_{Kk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}_K = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{g}_k \quad (6.48)$$

ja

$$g^{kK} \stackrel{\text{def}}{=} g^{Kk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{G}^K = \mathbf{G}^K \cdot \mathbf{g}^k. \quad (6.49)$$

Vahetajad g^k_K , g^K_k jne. on nii muutujate \mathbf{X} kui ka \mathbf{x} funktsioonid, sest baasivektorid \mathbf{G}_K ja \mathbf{G}^K sõltuvad Lagrange'i koordinaatidest \mathbf{X} ning baasivektorid \mathbf{g}_k ja \mathbf{g}^k Euleri koordinaatidest \mathbf{x} . Enangi veel, nad osutuvad nn. kahepunktliisteks tensorväljadeks, sest teisenevad kui tensorid mõlemas koordinaatsüsteemis.

Järgnevalt näitame, et

$$g^k_K g^l_K = \delta_k^l. \quad (6.50)$$

Teatavasti

$$v_k = v_K g^K_k = v_l g^l_K g^k_K.$$

Kuna

$$v_k = v_l \delta_k^l,$$

siis peab kehtima võrdus (6.50) ehk vahetajad g^k_K ja g^l_K on teineteise pöördtensorid. analoogiliselt

$$g^k_K g^k_L = \delta^K_L. \quad (6.51)$$

6.5. Baasivektor, meetriline tensor

Teisendame nüüd vahetajat g_{kK} —

$$g_{kK} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}_K \stackrel{(6.23), (6.22)}{=} \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \mathbf{i}_l \cdot \frac{\partial Z^L}{\partial X^K} \mathbf{I}_L = \delta_{lL} \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \frac{\partial Z^L}{\partial X^K}, \quad (6.52)$$

kus

$$\delta_{lL} = \delta_{LI} = \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{I}_L. \quad (6.53)$$

Suurus δ_{lL} on Kroneckeri delta vaid juhul kui $z^k \uparrow\uparrow Z^K$.

6.5.5 Tensorite indeksite tõstmine ja langetamine

Peale vektorite indeksite saab meetriliste tensorite abil tõsta ja langetada ka tensorite indekseid, näiteks

$$\begin{aligned} C^K_L &= G^{KM} C_{ML} \\ C^K_L &= G^{KM} C_{LM} \\ C^K_L &= G_{LM} C^{KM} \\ C^{KL} &= G_{LM} C^K_M \\ g^{kK} &= G_{KL} g^{kl} g^L_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{Kk} &= G^{KL} g^{k'l} \\ g^K_k &= G^{KL} g_{kl} g^L_l \\ g_{Kk} &= G_{KL} g_{kl} g^{Ll} \end{aligned}$$

Näide 6.5.4. Vaatleme juhtu, kus LK ühtib $LDRK$ ning EK ühtib $EDRK$, st., $(\mathbf{X}) = (\mathbf{Z})$ ja $(\mathbf{x}) = (\mathbf{z})$. Baasivektorid punktides P ja p on avaldaste (6.22) ja (6.23) põhjal

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M = \mathbf{I}_K \quad (6.54)$$

analoogiliselt

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{i}_k \quad (6.55)$$

Antud juhul ühtivad kovariantsed ja kontravariantsed koordinaadid ja baasid, st.,

$$G_{KL} = G^{KL} = \delta_{KL}, \quad (6.56)$$

$$g_{kl} = g^{kl} = \delta_{kl}, \quad (6.57)$$

$$g_{Kk} = g^{Kk} = \delta_{Kk}, \quad (6.58)$$

millest viimane on Kroneckeri delta kui $\mathbf{i}_k \uparrow \uparrow \mathbf{I}_K$.

6.5. Baasivektor, meetriline tensor

6.5.6 Gradient

Skalaarse funktsiooni *gradient* on defineeritud järgmiselt —

$$\text{grad } T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n}^\circ, \quad (6.59)$$

kus \mathbf{n}° on normaalisihiline ühikvektor, mis on suunatud funktsiooni T kasvamise suunas. Teisest küljest —

$$\text{grad } T \stackrel{\text{def}}{=} \nabla T = \mathbf{g}^k \frac{\partial T}{\partial x^k}, \quad (6.60)$$

kus *nabla*

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = g^{kl} \mathbf{g}^l \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (6.61)$$

Valemeis (6.60) ja (6.61) peame kasutama kontravariantset baasi, sest osatuletis absoluutsest skalaarist on kovariantne vektor, st., $\partial T / \partial x^k = \Phi_k$.

*

6.5.7 Deformatsioonigradient

Deformatsioonigradientid on defineeritud järgmiselt⁶ :

$$x^k_{,K} = \frac{\partial x^k(\mathbf{X}, t)}{\partial X^K} \quad \text{ja} \quad X^K_{,k} = \frac{\partial X^K(\mathbf{x}, t)}{\partial x^k}, \quad (6.62)$$

Vastavalt liikumisseadustele avalduvad *koordinaatide diferentsiaalid* kujul

$$dx^k = x^k_{,K} dX^K \quad \text{ja} \quad dX^K = X^K_{,k} dx^k. \quad (6.63)$$

Deformatsioonigradientide vahelised seosed

$$x^k_{,K} X^K_{,l} = \delta^k_l \quad \text{ja} \quad X^K_{,k} x^k_{,L} = \delta^K_L \quad (6.64)$$

Valemite (6.21) põhjal avalduvad kohavektorite diferentsiaalid (lõpmata väikesed muudud) läbi baasivektorite \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k . Teisendame neid avaldisi:

$$\begin{cases} d\mathbf{P} = \mathbf{G}_K dX^K \stackrel{(6.63)}{=} \mathbf{G}_K X^K_{,k} dx^k = \mathbf{c}_k dx^k, \\ d\mathbf{p} = \mathbf{g}_k dx^k \stackrel{(6.63)}{=} \mathbf{g}_k x^k_{,K} dX^K = \mathbf{C}_K dX^K, \end{cases} \quad (6.65)$$

⁶Indeks peale koma tähistab siin ja edaspidi osatuletist vastava (kontravariantse) koordinaadi järgi.

6.5. Baasivektor, meetriline tensor

6 - 34

kus suurused

$$\begin{cases} \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} X^K_{,k} = \mathbf{G}_K X^K_{,k} \\ \text{ja} \\ \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} x^k_{,K} = \mathbf{g}_k x^k_{,K} \end{cases} \quad (6.66)$$

on vaadeldavad kui uued, keskkonna deformeeritud olekule vastavad, baasivektorid. Teisisõnu, *keskkonna liikumisel transformeeruvad baasivektorid \mathbf{g}_k ja \mathbf{G}_K † uuteks baasivektoriteks \mathbf{C}_K ja \mathbf{c}_k* .

Järgnevalt avaldame vana baasi \mathbf{G}_K uue baasi \mathbf{c}_k kaudu:

$$(6.66)_1 \cdot x^k_{,L} \rightarrow \dots \Rightarrow \mathbf{G}_K = \mathbf{c}_k x^k_{,K}. \quad (6.67)$$

$$(6.66)_2 \cdot X^K_{,l} \rightarrow \dots \Rightarrow \mathbf{g}_k = \mathbf{C}_K X^K_{,k}. \quad (6.68)$$

Kontravariantseid baasid saadakse ortonormaalustingimustest

$$\mathbf{c}^k \cdot \mathbf{c}_l = \delta^k_l \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{C}_L = \delta^K_L, \quad (6.69)$$

$$\mathbf{c}^k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}^K(\mathbf{X}) x^k_{,K} \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}^K(\mathbf{X}, t) = \mathbf{g}^k(\mathbf{x}) X^K_{,k}. \quad (6.70)$$

kust

†

Meil oli eeldatud, et $t = t_0$ puhul EK ja LK tihtivad, st., $x^1 = X^1, \dots, x^3 = X^3$. Järelikult alghetkel

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_K(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t)$$

Vaatleme avaldisi (6.65) —

$$d\mathbf{P} = \underbrace{\mathbf{G}_K dX^K}_i = \underbrace{\mathbf{c}_k dx^k}_{ii} \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \underbrace{\mathbf{g}_k dx^k}_{iii} = \underbrace{\mathbf{C}_K dX^K}_{iv}. \quad (6.71)$$

i määrab $d\mathbf{P}$ kui $t = t_0$

ii $d\mathbf{P}$ muutumise seadus EK-s

iii määrab $d\mathbf{p}$ igal ajahetkel, sest vastavalt definitsioonile (6.21) ja (6.23) ei muutu $d\mathbf{p}$ ajas

iv määrab muutumatu suuruse $d\mathbf{p}$ muutuvates koordinaatides X^K suvalisel hetkel $t \geq t_0$.

6.6. Deformatsioonitensordid

6 - 36

6.6 Deformatsioonitensordid

6.6.1 Cauchy ja Greeni deformatsioonitensordid

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l \stackrel{(6.66)}{=} G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l} \quad \text{ja} \\ C_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L \stackrel{(6.66)}{=} g_{kl} x^k_{,K} x^l_{,L}. \end{array} \right. \quad (6.72)$$

Suurust c_{kl} nimetatakse *Cauchy deformatsioonitensoriks* ja suurust C_{KL} *Greeni deformatsioonitensoriks*. Nad on sümmeetrilised ja positiivselt määratud. Tensorid c_{kl} ja C_{KL} võib interpreteerida ka kui meetrilisi tensoreid, sest meetriline tensor $G_{KL}(\mathbf{X})$ transformeerub läbi keskkonna liikumise tensoriks $c_{kl}(\mathbf{x})$ ja $g_{kl}(\mathbf{x}) \rightarrow C_{KL}(\mathbf{X})$. Kovariantsete tensorite c_{kl} ja C_{KL} indekseid saab kontravariantsete meetriliste tensoritega tõsta (\mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K omi ei saanud!). Saadud kontravariantsete tensorite maatriksid $[c^{kl}]$ ja $[C^{KL}]$ ei osutu aga kovariantsete tensorite maatriksite $[c_{kl}]$ ja $[C_{KL}]$ pöördmaatriksiteks (nagu oli g_{kl} ja G_{KL} puhul). Antud juhul tuleb sisse tuua tensorid

$$\left\{ \begin{array}{l} -{}^{1}_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{c}^l \stackrel{(6.70)}{=} G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L} \quad \text{ja} \\ -{}^1_{C_{KL}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{C}^L \stackrel{(6.70)}{=} g^{kl} X^K_{,k} X^L_{,l}, \end{array} \right. \quad (6.73)$$

mille puhul $c_{km}^{-1}c^{ml} = \delta_k^l$ ja $C_{KM}^{-1}C^{ML} = \delta_K^L$. Tensorit c^{kl} nimetatakse *Fingeri † deformatsioonitensoriks* ja C^{KL} *Piola deformatsioonitensoriks*

6.6.2 Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensordid

Pöördume tagasi suuruste $d\mathbf{p}$ ja $d\mathbf{P}$ juurde —

$$\begin{cases} dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL}dX^K dX^L = c_{kl}dx^k dx^l, \\ ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl}dx^k dx^l = C_{KL}dX^K dX^L \end{cases}$$

Viimastest leiame *elementaarpiikuse ruudu muudu*

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL}dX^K dX^L = 2e_{kl}dx^k dx^l, \quad (6.74)$$

kus

$$2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} \quad \text{ja} \quad 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl}. \quad (6.75)$$

Tensorit $E_{KL} = E_{KL}(\mathbf{X}, t)$ nimetatakse *Lagrange'i deformatsioonitensoriks* ja tensorit $e_{kl} = e_{kl}(\mathbf{x}, t)$ *Euleri deformatsioonitensoriks*.

6.7. Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

Kehtivad seosed:

$$E_{KL} = e_{kl}x^k_{,K}x^l_{,L} \quad \text{ja} \quad e_{kl} = E_{KL}X^K_{,k}X^L_{,l} \quad (6.76)$$

Valemi (6.76)₁ kasutamise puhul tuleb avaldada $e_{kl}(\mathbf{X}, t)$ ja (6.76)₂ puhul vastupidi $E_{KL}(\mathbf{x}, t)$.

Meetriliste tensorite abil saame leida vastavaid sega- ja kontravariantseid tensorid:

$$\begin{aligned} E^K_L &= G^{KM}E_{ML}, & E^{KL} &= G^{KM}G^{LN}E_{MN} = G^{LM}E^K_M, \\ e^k_l &= g^{km}e_{ml}, & e^{kl} &= g^{km}g^{ln}e_{mn} = g^{lm}e^k_m. \end{aligned}$$

6.7 Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

6.7.1 Vektori kovariantne osatuletis

Kõigepealt püüame siirdevektori \mathbf{u} kaudu avaldada vektorid C_K ja c_k .

Kohavektor $\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u}$ (kui LK ja EK nullpunktid ei ühti siis $\mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{P} + \mathbf{u}$).
Seega *siirdevektor*

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P}. \quad (6.77)$$

Siirdevektori \mathbf{u} saab avaldada nii LK kui EK kaudu —

$$\mathbf{u} = U^K \mathbf{G}_K = U_K \mathbf{G}^K = u_k \mathbf{g}^k, \quad (6.78)$$

kus $U^K(\mathbf{X}, t)$ ja $u^k(\mathbf{x}, t)$ on vektori \mathbf{u} kontravariantsed komponendid ning $U_K(\mathbf{X}, t)$ ja $u_k(\mathbf{x}, t)$ kovariantsed komponendid vastavalt LK-s ja EK-s.

Ka nende indekseid saab meetriliste tensorite abil tõsta ja langetada —

$$U^K = G^{KM} U_M, \quad U_L = G_{LK} U^K, \quad u^k = g^{km} u_m, \quad u_l = g_{lk} u^k.$$

$$(6.78) \rightarrow U_K \mathbf{G}^K = u_k \mathbf{g}^k \mid \cdot \mathbf{G}_L \Rightarrow \dots = \dots$$

Tähistame indeksid ümber ($L \rightarrow K$) ja saame

$$U_K = g^k{}_K u_k \quad \text{ja} \quad u_k = g^K{}_k U_K. \quad (6.79)$$

Definitsioonide (6.66) põhjal

$$\mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K}, \quad \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k}.$$

6.7. Deformatsioonitensorige avaldamine siirete kaudu

6 - 40

Avaldame valemist (6.77) kohavektorid \mathbf{p} ja \mathbf{P} ning asendame viimastesse avaldistesse. Saame

$$\mathbf{C}_K = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^K} = \mathbf{G}_K + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^K}, \quad \mathbf{c}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = \mathbf{g}_k - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \quad (6.80)$$

Valemite (6.78) põhjal $\mathbf{u} = U^L \mathbf{G}_L = u^l \mathbf{g}_l$ ning (6.80) saab kuju

$$\mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + \frac{\partial}{\partial X^K} (U^L \mathbf{G}_L), \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - \frac{\partial}{\partial x^k} (u^l \mathbf{g}_l). \quad (6.81)$$

Analoogilised avaldised siirdevektori kovariantsete komponentide jaoks:

$$\mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + \frac{\partial}{\partial X^K} (U_L \mathbf{G}^L), \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - \frac{\partial}{\partial x^k} (u_l \mathbf{g}^l). \quad (6.82)$$

Järgnevalt püüame leida avaldistes (6.81) ja (6.82) olevaid osatuletisi

$$\frac{\partial}{\partial X^K} (U^L \mathbf{G}_L) = \frac{\partial U^L}{\partial X^K} \mathbf{G}_L + U^L \frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K}, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (u^l \mathbf{g}_l) = \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \mathbf{g}_l + u^l \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k}, \quad (6.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^K} (U_L \mathbf{G}^L) = \frac{\partial U_L}{\partial X^K} \mathbf{G}^L + U_L \frac{\partial \mathbf{G}^L}{\partial X^K}, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (u_l \mathbf{g}^l) = \frac{\partial u_l}{\partial x^k} \mathbf{g}^l + u_l \frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial x^k}. \quad (6.84)$$

Esimeste liidetavate leidmine pole probleemiks — see on lihtne. Teiste liidetavatega on lugu keerukam, sest osatuletisi tuleb leida baasvektoritest $\mathbf{G}_L, \dots, \mathbf{g}^l$.

Vastavalt definitsioonidele (6.22) ja (6.23)

$$\mathbf{G}_L = \frac{\partial Z^N}{\partial X^L} \mathbf{I}_N \rightarrow \mathbf{I}_N = \frac{\partial X^L}{\partial Z^N} \mathbf{G}_L, \quad \mathbf{g}_l = \frac{\partial z^n}{\partial x^l} \mathbf{i}_n \rightarrow \mathbf{i}_n = \frac{\partial x^l}{\partial z^n} \mathbf{g}_l.$$

Seega osatuletised võrrandeis (6.83)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K} = \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \mathbf{I}_N = \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \mathbf{G}_M, \\ \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \mathbf{i}_n = \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial z^n} \mathbf{g}_m. \end{cases} \quad (6.85)$$

Võtame kasutusele *Christoffeli teist liiki sümboleid*

$$\begin{cases} M \\ KL \end{cases} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} m \\ kl \end{cases} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial z^n}. \quad (6.86)$$

Valemid (6.85) saavad nüüd kuju

$$\frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K} = \begin{cases} M \\ KL \end{cases} \mathbf{G}_M \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k} = \begin{cases} m \\ kl \end{cases} \mathbf{g}_m. \quad (6.87)$$

analoogiliselt saab näidata, et

$$\frac{\partial \mathbf{G}^L}{\partial X^K} = - \begin{cases} L \\ KM \end{cases} \mathbf{G}^M \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial x^k} = - \begin{cases} l \\ km \end{cases} \mathbf{g}^m. \quad (6.88)$$

6.7. Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

Christoffeli esimest liiki sümboleid on defineeritavad kahel moel.

i) Läbi Christoffeli teist liiki sümboleite

$$\begin{cases} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} G^{MN} \begin{cases} N \\ KL \end{cases}, & \begin{cases} M \\ KL \end{cases} = G^{MN} [KL, N], \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} g_{mn} \begin{cases} n \\ kl \end{cases}, & \begin{cases} m \\ kl \end{cases} = g^{mn} [kl, n]. \end{cases} \quad (6.89)$$

ii) Arvestades meetriliste tensorite definitsioone (6.26) ja (6.30),

$$G^{KL} = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L = \delta^{MN} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \frac{\partial Z^N}{\partial X^L}, \quad g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l = \delta^{mn} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^n}{\partial x^l},$$

saame

$$\begin{cases} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{KM}}{\partial X^L} + \frac{\partial G_{LM}}{\partial X^K} - \frac{\partial G_{KL}}{\partial X^M} \right), \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \end{cases} \quad (6.90)$$

Väga tihti defineeritaksegi Christoffeli esimest liiki sümboleid kujul (6.90).

Valemeist (6.86) ja (6.90) järeldub, et Christoffeli sümboleid on sümmeetrilised

indeksite K ja L (k ja l) suhtes:

$$\begin{cases} M \\ KL \end{cases} = \begin{cases} M \\ LK \end{cases}, \quad [KL, M] = [LK, M], \quad \begin{cases} m \\ kl \end{cases} = \begin{cases} m \\ lk \end{cases}, \quad [kl, m] = [lk, m]. \quad (6.91)$$

NB! *Christoffeli sümboolid pole tensorid!*

Tuleme tagasi valemite (6.83) ja (6.84) juurde ning esitame nad kujul

$$\frac{\partial}{\partial X^K}(U^L \mathbf{G}_L) = U^M{}_{;K} \mathbf{G}_M, \quad \frac{\partial}{\partial x^k}(u^l \mathbf{g}_l) = u^m{}_{;k} \mathbf{g}_m, \quad (6.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^K}(U_L \mathbf{G}^L) = U_{M;K} \mathbf{G}^M, \quad \frac{\partial}{\partial x^k}(u_l \mathbf{g}^l) = u_{m;k} \mathbf{g}^m, \quad (6.93)$$

Siin

$$U^M{}_{;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U^M}{\partial X^K} + \begin{cases} M \\ KL \end{cases} U^L, \quad u^m{}_{;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \begin{cases} m \\ kl \end{cases} u^l \quad (6.94)$$

on *kontravariantsete vektorite kovariantset osatuletised* ning

$$U_{M;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U_M}{\partial X^K} - \begin{cases} L \\ MK \end{cases} U_L, \quad u_{m;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_m}{\partial x^k} - \begin{cases} l \\ mk \end{cases} u_l \quad (6.95)$$

on *kovariantsete vektorite kovariantset osatuletised*.

6.7. Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

6 - 44

Suurused $U^M{}_{;K}$ ja $u^m{}_{;k}$ on segatensordid ning $U_{M;K}$ ja $u_{m;k}$ kovariantset tensorid. •
Meetriliste tensoritega saab teostada üleminekuid (6.94) \rightarrow (6.95) ja vastupidi:

$$\begin{cases} U^L{}_{;K} = G^{LM} U_{M;K} & U_{L;K} = G_{LM} U^M{}_{;K} \\ u^l{}_{;k} = g^{lm} u_{m;k} & u_{l;k} = g_{lm} u^m{}_{;k} \end{cases}$$

Kovariantse osatuletise geomeetriaalne interpretatsioon. Kovariantse osatuletise avaldised (6.94) ja (6.95) koosnevad kahest osast. Neist esimene iseloomustab vektori \mathbf{u} muutumist kui muutub koordinaat X^K (või x^k) ning teine \mathbf{u} muutumist kui seoses X^K (või x^k) muutumisega muutub baas \mathbf{G}_M (või \mathbf{g}_m).

Sirgjooneliste koordinaatide puhul on Christoffeli sümboolid samaselt nullid ja seega kovariantne osatuletis on võrdne “harilikku” osatuletisega. *

Pöördume nüüd tagasi uute baasivektorite \mathbf{C}_K ja \mathbf{c}_k avaldiste (6.81) ja (6.82) juurde. Arvestades avaldisi (6.92) ja (6.93) saame

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + U^M{}_{;K} \mathbf{G}_M, \\ \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - u^m{}_{;k} \mathbf{g}_m, \end{cases} \quad (6.96)$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + U_{M;K} \mathbf{G}^M, \\ \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - u_{m;k} \mathbf{g}^m. \end{cases} \quad (6.97)$$

Avaldame nüüd Greeni ja Cauchy deformatsioonitensorigid läbi siirete võttes arvesse valemeid (6.96) —

$$C_{KL} = \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L \stackrel{(6.96)}{=} \dots$$

= \dots

= \dots

Kokku saame

$$\begin{cases} C_{KL} = G_{KL} + U_{K;L} + U_{L;K} + U_{N;K}U^N_{;L}, \\ c_{kl} = g_{kl} - u_{k;l} - u_{l;k} + u_{m;k}u^m_{;l}. \end{cases} \quad (6.98)$$

Arvestades Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorige definitsioone (6.75) saame omakorda

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K} + U_{M;K}U^M_{;L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{k;l} + u_{l;k} - u_{m;k}u^m_{;l}. \end{cases} \quad (6.99)$$

Need võrrandid on PKM ühed põhivõrrandid, mis seovad omavahel Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorigid ning materiaalsete punktide siirded \mathbf{u} .

6.7. Deformatsioonitensorige avaldamine siirete kaudu

Sirgjooneliste koordinaatide puhul $U_{M;K} \equiv U_{M,K}$ jne.

DRK puhul lisaks eelnevale $U^M_{;L} \equiv U_{M,K}$ jne. ning võrrandid (6.99) saavad kuju

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L,K} + U_{K,L} + U_{M,K}U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{l,k} + u_{k,l} - u_{m;k}u_{m,l}. \end{cases} \quad (6.100)$$

Avaldame kohavektorite \mathbf{P} ja \mathbf{p} lõpmata väikesed muudud $d\mathbf{P}$ ja $d\mathbf{p}$ läbi siirete. Valemite (6.65) põhjal

$$d\mathbf{P} = \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t)dx^k \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t)dX^K.$$

Asendades siia c_k ja \mathbf{C}_K valemist (6.96) ja (6.97) saame

$$d\mathbf{P} = (\mathbf{g}_k - u^m_{;k}\mathbf{g}_m)dx^k, \quad d\mathbf{p} = (\mathbf{G}_K + U^M_{;K}\mathbf{G}_M)dX^K, \quad (6.101)$$

$$d\mathbf{P} = (\mathbf{g}_k - u_{m;k}\mathbf{g}^m)dx^k, \quad d\mathbf{p} = (\mathbf{G}_K + U_{M;K}\mathbf{G}^M)dX^K. \quad (6.102)$$

Märkused:

1. Ortogonaalse kõverjoonelise koordinaatsüsteemi puhul lihtsustuvad mõned avaldised tunduvalt:

- meetriline tensor

$$g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \Rightarrow g_{kl} = 0 \text{ kui } k \neq l; \quad (6.103)$$

- elementaarpiikkuse ruut

$$ds^2 = g_{kl} dx^k dx^l = g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2; \quad (6.104)$$

- determinant

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}; \quad (6.105)$$

- kontravariantne meetriline tensor

†

$$g^{k \underline{k}} = 1/g_{\underline{k} k}; \quad (6.106)$$

- kontravariantne baas

$$\mathbf{g}^{k \underline{k}} = g^{k \underline{k}} \mathbf{g}_{k \underline{k}}, \quad k = \underline{k}; \quad (6.107)$$

- Christoffeli teist liiki sümboolid

‡

6.7. Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

6 - 48

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ \underline{k} \underline{k} \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{ll}} \frac{\partial g_{\underline{k} \underline{k}}}{\partial x^l}, \quad l \neq \underline{k}; \quad (6.108)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k} l \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^l} \ln \sqrt{g_{\underline{k} \underline{k}}}, \quad l \neq \underline{k}; \quad (6.109)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k} \underline{k} \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^{\underline{k}}} \ln \sqrt{g_{\underline{k} \underline{k}}}; \quad (6.110)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ lm \end{matrix} \right\} = 0, \quad l \neq k \neq m. \quad (6.111)$$

2. Alghetkel $t = t_0$ toome sisse Lagrange'i koordinaadid (mis võivad kuid ei pruugi ühtida Euleri koordinaatidega). Sel hetkel loeme keskkonna deformatsioonid ja siirded nulliks ning ütleme, et keskkond on *loomulikult olekus*.

3. Siirete ja deformatsioonide määramiseks hetkel $t = t_1$ on vaja teada liikumisseadust, st., ajast kui parameetrist sõltuvat koordinaatseisendust. Kui meid ei huvita kuidas deformatsioon toimub, siis piisab tegelikult sellest kui me teame liikumisseadust esitavat koordinaatseisendust vaid kahel ajahetkel: $t = t_0$ ja $t = t_1$.

4. Suurusid $u_{l;k}$, $u^m_{\underline{l}}$ jne. nimetatakse *siirdegradientideks*.

6.8 Vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid

Vektorite ja tensoritega opereerides ei pöörata tavaliselt tähelepanu dimensioonile — erinevad komponendid on sageli erineva dimensiooniga (näiteks silindrilised koordinaadid). Et sellest füüsikaliselt vastuvõtmatust olukorrast puhtalt välja tulla, tuuakse sisse vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid. Teatavasti pole baasivektorid kõverjoonelise koordinaatsüsteemi puhul üldjuhul ühikvektorid ja valemite (6.41) põhjal on nende pikkused määratud meetrilise tensori diagonaalielementidega

$$|\mathbf{g}_k| = \sqrt{g_{\underline{k} \underline{k}}} \quad \text{ja} \quad |\mathbf{g}^k| = \sqrt{g^{\underline{k} \underline{k}}} \quad \text{kui} \quad k = \underline{k}. \quad (6.112)$$

Defneerime ühikvektorid

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{g}_k}{\sqrt{g_{\underline{k} \underline{k}}}} \quad \text{ja} \quad \mathbf{e}^k = \frac{\mathbf{g}^k}{\sqrt{g^{\underline{k} \underline{k}}}}, \quad k = \underline{k}. \quad (6.113)$$

Nüüd

$$\mathbf{u} = u^k \mathbf{g}_k = u^{(k)} \mathbf{e}_k = u_k \mathbf{g}^k = u_{(k)} \mathbf{e}^k, \quad (6.114)$$

kus $u^{(k)}$ ja $u_{(k)}$ on vektori \mathbf{u} *kontra- ja kovariantset füüsikalised komponendid*. Valemite (6.113) ja (6.114) põhjal vektori füüsikalised komponendid

$$u^{(k)} = u^k \sqrt{g_{\underline{k} \underline{k}}} \quad \text{ja} \quad u_{(k)} = u_k \sqrt{g^{\underline{k} \underline{k}}}. \quad (6.115)$$

6.8. Vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid

Ortogonaalse baasi puhul $g_{\underline{k} \underline{k}} = 1/g^{\underline{k} \underline{k}}$, järelikult on kovariantne füüsikaline komponent leitav kovariantse meetrilise tensori abil:

$$u_{(k)} = \frac{u_k}{\sqrt{g_{\underline{k} \underline{k}}}}. \quad (6.116)$$

analoogiliselt saab defineerida tensorite füüsikalised komponendid. Näiteks ortogonaalse baasi puhul

$$t^{(k)}_{(l)} = t^k_l \sqrt{\frac{g_{\underline{k} \underline{k}}}{g_{\underline{l} \underline{l}}}} \dots \quad (6.117)$$

✓

Märkused

1. Tavaliselt lahendatakse ülesanded ko- ja kontravariantsetes tensorites ning lõpus minnakse üle füüsikalistele komponentidele.
2. DRK puhul $\mathbf{g}_k \equiv \mathbf{g}^k \equiv \mathbf{e}_k \equiv \mathbf{e}^k$.

Näide 6.8.1. Leida ühikkaas ja siirdevektori füüsikalised komponendid silindriliste koordinaatide jaoks

6.9 Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

6.9.1 Lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid

Hiljates kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed, saame *lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid*⁷

$$\begin{cases} 2\tilde{E}_{KL} = 2\tilde{E}_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L;K} + U_{K;L}, \\ 2\tilde{e}_{kl} = 2\tilde{e}_{lk} = c_{kl} - g_{kl} = u_{l;k} + u_{k;l}. \end{cases} \quad (6.118)$$

Selliseid deformatsioonitensoreid kasutatakse klassikalises lineaarses teoorias.

6.9.2 Pöördetensorid ja pöördevektorid

$$\tilde{R}_{KL} = \frac{1}{2}(U_{K;L} - U_{L;K}) \quad \text{ja} \quad \tilde{r}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k;l} - u_{l;k}). \quad (6.119)$$

Viimased on *klassikalise lineaarse teooria pöördetensorid*. On selge, et tegu on kaldsümmeetriliste tensoritega, st., $\tilde{R}_{KL} = -\tilde{R}_{LK}$ ja $\tilde{r}_{kl} = -\tilde{r}_{lk}$. Pöördetensorite indkseid saab meetriliste tensoritega tõsta ja langetada.

⁷Neid nimetatakse ka lihtsalt väikeste deformatsioonide tensoriteks “nunstades” sõna *lõpmata* lisamata.

6.9. Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

Järgnevalt toome sisse Lagrange'i ja Euleri *lineaarsed pöördevektorid* $\tilde{\mathbf{R}}^K$ ja $\tilde{\mathbf{r}}^k$:

$$\tilde{\mathbf{R}}^K = \frac{1}{2}\epsilon^{KLM}\tilde{R}_{ML}, \quad \text{ja} \quad \tilde{\mathbf{r}}^k = \frac{1}{2}\epsilon^{klm}\tilde{r}_{ml}, \quad (6.120)$$

kus ϵ^{KLM} ja ϵ^{klm} on *permutatsioonisümbolid*.

Permutatsioonisümbolid⁸

$$\begin{cases} \epsilon^{klm} = \frac{e_{klm}}{\sqrt{g}}, \\ \epsilon_{klm} = e_{klm}\sqrt{g}, \quad g = |g_{kl}|, \end{cases} \quad (6.121)$$

kus⁹

$$e_{klm} = \begin{cases} 1 & \text{kui } klm \text{ on } 123 \text{ paaris permutatsioon,} \\ -1 & \text{kui } klm \text{ on } 123 \text{ paaritu permutatsioon,} \\ 0 & \text{muudel juhtudel.} \end{cases} \quad (6.122)$$

⁸Tuntud ka kui Levi-Civita tensor või Levi-Civita permutatsioonitensor.

lk. on kasutusel ka nimetused *Levi-Civita symbol*, *permutation symbol*, *antisymmetric symbol*, *alternating symbol*. Tullio Levi-Civita (29. 03. 1873 – 29. 12. 1941) oli Itaalia matemaatik.

⁹Vt. ka 2. ptk. lk. 13

Näide 6.9.1. Avaldame pöördevektorid $\tilde{\mathbf{r}}^1$, $\tilde{\mathbf{r}}^2$ ja $\tilde{\mathbf{r}}^3$ sirdegradientide kaudu. Valimite (6.120) ja (6.121) põhjal

$$\tilde{\mathbf{r}}^k = \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{klm} r_{ml},$$

Seega

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{r}}^1 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [\dots\dots\dots + \dots\dots\dots] = \dots\dots\dots \\ \tilde{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{3;2} - u_{2;3}) \\ \tilde{\mathbf{r}}^3 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [\dots\dots\dots + \dots\dots\dots] = \dots\dots\dots \\ \tilde{\mathbf{r}}^3 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [\dots\dots\dots + \dots\dots\dots] = \dots\dots\dots \\ \tilde{\mathbf{r}}^3 = \frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{2;1} - u_{1;2}) \end{array} \right. \quad (6.123)$$

6.10. Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensorite geometriiline tõlgendus

6 - 54

6.10 Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensorite geometriiline tõlgendus

6.10.1 Pikenemine, pikenemiskoeffitsendid ja suhteline pikenemine

Pikenemiskoeffitsient suunas \mathbf{N} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda^{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{dS^2}} = \sqrt{\frac{C_{KL} dX^K dX^L}{dS^2}} = \sqrt{C_{KL} N^K N^L}, \\ \lambda^{(\mathbf{n})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{dS^2}} = \sqrt{\frac{ds^2}{c_{kl} dx^k dx^l}} = \frac{1}{\sqrt{c_{kl} n^k n^l}}. \end{array} \right. \quad (6.124)$$

Füüsilikaliselt on suurused $\Lambda^{(\mathbf{N})}$ ja $\lambda^{(\mathbf{n})}$ samad — esimene on vaid esitatud LK-s, teine EK-s.

*Suhteline pikenemine*¹⁰ (suunas \mathbf{N}) esitatakse kujul

$$E^{(\mathbf{N})} = e^{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda^{(\mathbf{N})} - 1 \equiv \lambda^{(\mathbf{n})} - 1. \quad (6.125)$$

¹⁰Lk. extension

Lagrange'i koordinaadid. Pikenemiskoeffitsendid ja suhteline pikenemine koordinaatkõvera X^K puutuja sillis (\mathbf{N} on koordinaatkõvera X^K puutuja sillis):

$$\Lambda_{(K)} = \sqrt{\frac{C_{KK}}{G_{KK}}} = \sqrt{1 + \frac{2E_{KK}}{G_{KK}}}, \quad E_{(K)} = \sqrt{1 + \frac{2E_{KK}}{G_{KK}}} - 1. \quad (6.126)$$

Et anda füüsikalist tõlgendust deformatsioonitensorite komponentidele, esitatakse viimased valemid sageli kujul

$$\frac{C_{KK}}{G_{KK}} = \Lambda_{(K)}^2, \quad \frac{2E_{KK}}{G_{KK}} = \Lambda_{(K)}^2 - 1 = (1 + E_{(K)})^2 - 1. \quad (6.127)$$

Euleri koordinaadid. Lähtudes avaldistest (6.124)₂ saame tuletada analoogilised valemid EK jaoks —

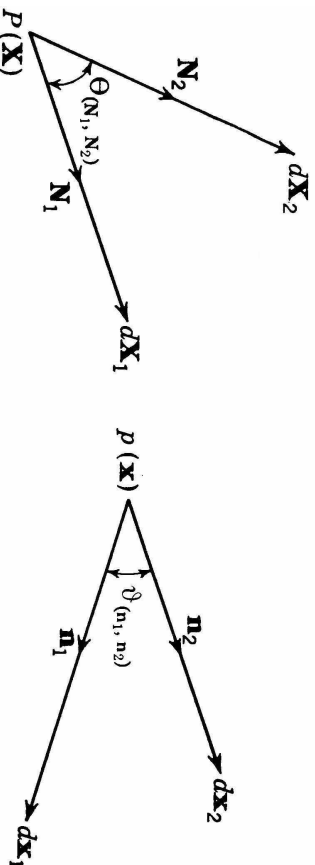
$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{(k)} &= \sqrt{\frac{g_{kk}}{c_{kk}}} = \left(1 - \frac{2e_{kk}}{g_{kk}}\right)^{-\frac{1}{2}}, & e_{(k)} &= \left(1 - \frac{2e_{kk}}{g_{kk}}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1, \\ \frac{c_{kk}}{g_{kk}} &= \lambda_{(k)}^{-2}, & \frac{2e_{kk}}{g_{kk}} &= 1 - \lambda_{(k)}^{-2} = 1 - (1 + e_{(k)})^{-2} \end{aligned} \right. \quad (6.128)$$

6.10. Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensorite geomeetiline tõlgendus

6 - 56

6.10.2 Nurga muutus ja nihkedeformatsioon

Vaatleme kahte lõpmata väikest vektorit $d\mathbf{X}_1$ ja $d\mathbf{X}_2$, mille vaheline nurk on $\Theta \equiv \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}$ ja mis deformeeruvad vektoriteks $d\mathbf{x}_1$ ja $d\mathbf{x}_2$, mille vaheline nurk on $\vartheta \equiv \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}$.



Joonis 6.10: Nurga muutus

Nurkade koosinused

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} \stackrel{(6.21)}{=} \frac{G_{KL} dX_1^K dX_2^L}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} = G_{KL} N_1^K N_2^L \quad (6.129)$$

ja

†

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_1| |d\mathbf{x}_2|} \stackrel{(6.65)}{=} \frac{C_{KL} dX_1^K dX_2^L}{\sqrt{C_{MN} dX_1^M dX_1^N} \sqrt{C_{RS} dX_2^R dX_2^S}} = \dots \\ &\stackrel{(6.124)}{=} \dots \stackrel{\text{tähistamine}}{=} \frac{C_{KL} N_1^K N_2^L}{\Lambda(\mathbf{N}_1) \Lambda(\mathbf{N}_2)} H. \quad (6.130) \end{aligned}$$

Nine ehk nihkedeformatsioon ehk nihkenurk vektoritega \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_2 määratud pinnal on defineeritud kui algse nurga Θ muut —

$$\Gamma(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = \gamma(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \Theta(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) - \vartheta(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2). \quad (6.131)$$

✓

Võtame viimase avaldise vasakust ja paremast poolst sinuse

$$\begin{aligned} \sin \Gamma &= \sin(\Theta - \vartheta) = \dots \\ &\dots \stackrel{(6.130)}{=} H \sin \Theta - \sqrt{1 - H^2} \cos \Theta. \quad (6.132) \end{aligned}$$

6.10. Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensorite geometriiline tõlgendus

6 - 58

Kui $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_2$, siis saame viimasest, et

$$\sin \Gamma = H \stackrel{(6.130)}{=} \frac{C_{KL} N_1^K N_2^L}{\Lambda(\mathbf{N}_1) \Lambda(\mathbf{N}_2)}. \quad (6.133)$$

Seega, kaks algsest ristuvat vektorit jäävad ka peale deformatsiooni risti parajasti siis kui

$$C_{KL} dX_1^K dX_2^L = 0. \quad (6.134)$$

Kui valida suunad \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_2 piki koordinaatkõverate X^K puutujaid, siis saab nurgamuutuste hindamiseks kasutada baasivektoreid \mathbf{G}_K ja \mathbf{C}_K (kuigi nad pole ühikvektorid) —

$$\begin{cases} \cos \Theta_{(KL)} = \frac{G_{KL}}{\sqrt{G_{\underline{K}\underline{K}} G_{\underline{L}\underline{L}}}}, \\ \cos \vartheta_{(KL)} = \frac{C_{KL}}{\sqrt{C_{\underline{K}\underline{K}} C_{\underline{L}\underline{L}}}} = \frac{G_{KL} + 2E_{KL}}{\sqrt{(G_{\underline{K}\underline{K}} + 2E_{\underline{K}\underline{K}})(G_{\underline{L}\underline{L}} + 2E_{\underline{L}\underline{L}})}}. \end{cases} \quad (6.135)$$

EK-s saavad viimased valemid kuju

$$\begin{cases} \cos \vartheta_{(kl)} = \frac{g_{kl}}{\sqrt{g_{k\ k} g_{l\ l}}}, \\ \cos \Theta_{(kl)} = \frac{c_{kl}}{\sqrt{c_{k\ k} c_{l\ l}}} = \frac{g_{kl} - 2e_{kl}}{\sqrt{(g_{k\ k} - 2e_{k\ k})(g_{l\ l} - 2e_{l\ l})}}. \end{cases} \quad (6.136)$$

Kuna LK ja EK on valitavad sõltumatult, siis üldjuhul ei õnnestu siduda nihkeid $\Gamma_{(KL)}$ ja $\gamma_{(kl)}$. Nurkadele $\Theta_{(KL)} = \pi/2$ ja $\vartheta_{(kl)} = \pi/2$ vastavad nihked on määratud järgmiselt:

$$\begin{cases} \sin \Gamma_{(KL)} = \frac{1}{\Lambda_{(K)} \Lambda_{(L)}} \frac{C_{KL}}{\sqrt{G_{K\ K} G_{L\ L}}}, \\ \sin \gamma_{(kl)} = -\lambda_{(k)} \lambda_{(l)} \frac{c_{kl}}{\sqrt{g_{k\ k} g_{l\ l}}}. \end{cases} \quad (6.137)$$

Kui X^K on DRK, siis ...

6.11. Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad

6 - 60

6.11 Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad

Tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$(C^K{}_L - C\delta^K{}_L) N^L = 0. \quad (6.138)$$

Viimasel eksisteerib mittetriviaalne lahend juhul kui tema *karakteristlik determinant* on null, st.,

$$|C^K{}_L - C\delta^K{}_L| = 0. \quad (6.139)$$

Selle determinandi arendamise tulemusena saadakse *karakteristlik võrrand* (mis kujutab endast kuupvõrrandit)

$$-C^3 + I_C C^2 - II_C C + III_C = 0 \quad (6.140)$$

tundmatu C määramiseks. Kogu protseduur on tegelikult analoogiline DKR korral käsitletule.

Invariantide III_C ja III_c geomeetiline tõlgendus. Maatriksite teooriast on teada, et determinant maatriksite korrutisest on võrdne korrutatavate maatriksite

determinantide korrutisega, st., $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Meil

$$C^K{}_L = G^{KM} C_{ML} \stackrel{(6.72)}{=} G^{KM} g_{kl} x^k{}_{,M} x^l{}_{,L}. \quad (6.141)$$

Invariandi III_C definitsiooni põhjal

$$\text{III}_C = |C^K{}_L| \stackrel{(6.141)}{=} |G^{RS}| |g_{mn}| |x^k{}_{,K}|^2 = \frac{g}{G} j^2 = J^2, \quad (6.142)$$

kus J on teisenduse $z^k = z^k(Z^K, t)$ jakobiaan fikseeritud ajahetkel t ja mis on leitav järjenselt:

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \right| \left| \frac{\partial x^n}{\partial X^N} \right| \left| \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right| = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} j. \quad (6.143)$$

Vaatleme peatelgede sihilisi joonelemente ds_α ja dS_α . Elementaarruumalad $d\mathcal{V} = ds_1 ds_2 ds_3$ ja $d\mathcal{V} = dS_1 dS_2 dS_3$. Kuna

$$\frac{ds_\alpha}{dS_\alpha} = \Lambda_\alpha = \lambda_\alpha,$$

siis

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\mathcal{V}} = \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{dS_1 dS_2 dS_3} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \sqrt{\text{III}_C} \stackrel{(6.142)}{=} J.$$

6.12. Pöörde põhiteoreem

6 - 62

Seega

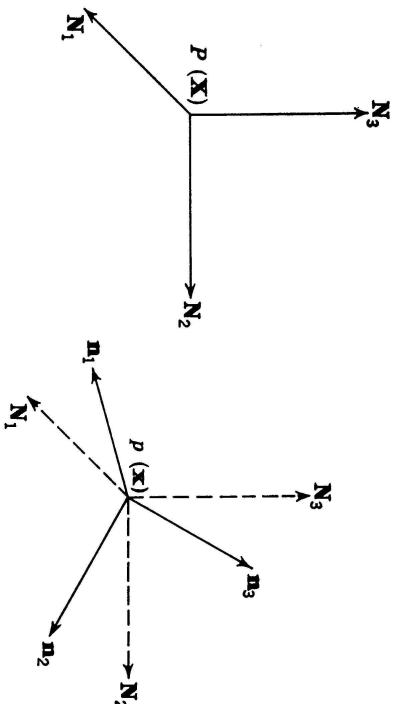
$$d\mathcal{V} = \sqrt{\text{III}_C} d\mathcal{V} \quad \text{ja} \quad d\mathcal{V} = \sqrt{\text{III}_C} d\mathcal{V}. \quad (6.144)$$

Kokkuvõttes — *invariandid III_C ja III_c iseloomustavad ruumala muutust.*

6.12 Pöörde põhiteoreem

Fikseeritud kiu lokaalse pöörde määramiseks toome sisse pöördetensori. Olgu vektorid \mathbf{N}_α peatelgede sihilised ortogonaalsed ühikvektorid \mathbf{X} -s. Peale deformatsiooni on see kolmik pööratud ortogonaalseks kolmikuks \mathbf{n}_α koordinaatides \mathbf{x} . Kui vahetada (siirata) kolmik \mathbf{N}_α ruumipunkti $p(\mathbf{x})$ siis saab defineerida ihese ortogonaalse tensori \mathbf{R} , mida nimetatakse *pöördetensoriks* ja mis pöörab vahetatud \surd kolmiku \mathbf{N}_α kolmikuks \mathbf{n}_α .

$$\begin{cases} n^k{}_\alpha = R^k{}_m g^m{}_K N^K{}_\alpha = g^k{}_L R^L{}_K N^K{}_\alpha = R^k{}_K N^K{}_\alpha \\ N^K{}_\alpha = g^K{}_m R^{-1}{}^m{}_K n^k{}_\alpha = R^{-1}{}^K{}_L g^L{}_k n^k{}_\alpha = R^{-1}{}^K{}_K n^k{}_\alpha \end{cases} \quad (6.145)$$



Joonis 6.11: Peatelgede siire koos pöördega

Siin \mathbf{R}^{-1} on tensori \mathbf{R} pöördtensor (duaalne tensor): \mathbf{R} pöörab $\mathbf{N}_\alpha \rightarrow \mathbf{n}_\alpha$ ja vastupidi — \mathbf{R}^{-1} pöörab $\mathbf{n}_\alpha \rightarrow \mathbf{N}_\alpha$ tagasi. Tensor

$$R^k{}_K = R^k{}_m g^m{}_K = R^L{}_K g^k{}_L \quad (6.146)$$

esitab siiret $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$ koos järgneva pöördega.

Defneerime nüüd vektorite kolmikud \mathbf{N}^α ja \mathbf{n}^α —

$$N^\alpha{}_K N^L{}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \delta^L{}_K, \quad n^\alpha{}_k n^\alpha{}_l \stackrel{\text{def}}{=} \delta^l{}_k, \quad (6.147)$$

6.12. Pöördede põhiteoreem

6 - 64

st., (vektorite) kolmikud \mathbf{N}^α ja \mathbf{n}^α ning \mathbf{N}_α ja \mathbf{n}_α teineteise pöördkolmikud¹¹. Maatrikskirjaviisis tähendaks eelnev seda, et $[N^\alpha{}_K][N^L{}_\alpha] = \mathbf{I}$, kus \mathbf{I} on ühikmaatriks. Korrutame avaldisi (6.145) vastavalt vektoritega $N^\alpha{}_L$ ja $n^\alpha{}_l$. Arvestades definitsioone (6.147) saame pöördetensorite määramiseks valemid

$$R^k{}_K = n^k{}_l N^\alpha{}_K \quad \text{ja} \quad R^L{}_K = N^K{}_\alpha n^\alpha{}_l. \quad (6.148)$$

Pöördeta deformatsiooni (deformatsiooni, kus peateljed ei pöördu) puhul, seega

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \text{ehk} \quad R^k{}_l = \delta^k{}_l; \quad R^k{}_K = g^k{}_K; \dots \quad (6.149)$$

Toupin (1956) tõestas, et

1. Greeni ja Cauchy deformatsioonitensorite n -ndad astmed on seotud \surd järjmiselt

$$C^n{}_L = \bar{R}^L{}_K n^k{}_l R^l{}_L, \quad \bar{c}^n{}_l = R^k{}_K C^K{}_L \bar{R}^L{}_l \quad (6.150)$$

ning lisaks veel, et

$$\bar{C}^n{}_L = \sum_\alpha (C_\alpha)^{-n} N^K{}_\alpha N^\alpha{}_L. \quad (6.151)$$

¹¹Ik. *reciprocal triads*

2. Deformatsioonigradiendid avalduvad kujul

$$x^k_{,K} = R^k_L \overset{1}{C}^L_K = R^l_K \overset{-1}{c}^k_l, \quad X^K_{,k} = R^{-1K}_l \overset{1}{c}^k_l = R^L_k \overset{-1}{C}^K_L. \quad (6.152)$$

Viimastest omakorda

$$R^k_K = x^k_{,L} \overset{-1}{C}^L_K \text{ ja } R^{-1K}_k = X^K_{,l} \overset{-1}{c}^k_l. \quad (6.153)$$

Saab näidata, et teiselt poolt $x^k_{,K} = g^{kl} g^L_l (G_{KL} + U_{L;K})$, kust $U_{L;K} = g_{kl} g^L_l x^k_{,K} - G_{KL}$. Arvestades nüüd (6.152)₁, saame, et

$$U_{L;M} = R_{KL} \overset{1}{C}^L_M - G_{KM} = R^L_K \overset{1}{C}^L_{LM} - G_{KM}. \quad (6.154)$$

Lisaks eelnenule saab tõestada seosed tensorite $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ ja \mathbf{R} vahel —

$$R_{KM} = \left(G_{KL} + \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \right) \overset{-1}{C}^L_M. \quad (6.155)$$

Väikeste deformatsioonigradientide puhul saame viimasest

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - G_{KM}, \quad (6.156)$$

6.12. Pöörde põhiteoreem

ning arvestades (6.154) analoogi EK jaoks, et

$$\tilde{R}_{KM} \approx g^k_K g^m_M \tilde{r}_{km}. \quad (6.157)$$

Pöörde põhiteoreem: *Iga joonelemendi deformatsiooni mingis punktis võib vaadelda koosnevana kolmest osast — 1) paralleellükkest, 2) peatelgede järgast pöördest ja 3) pikkuse muudust peatelgede sihis.*

Vaatleme vektorit dX^K \mathbf{X} -s, mis läheb deformatsiooni käigus vektoriks $dx^k = x^k_{,K} dX^K$. Kasutades seoseid (6.152)₁ saame

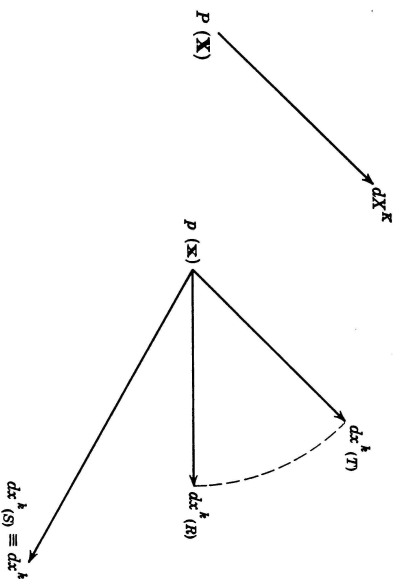
$$dx^k = g^k_L R^L_M \overset{1}{C}^M_K dX^K = \overset{-1}{c}^k_l R^l_m g^m_K dX^K. \quad (6.158)$$

Avaldisele (6.158) saab anda järgmise tõlgenduse (joomis 6.12).

1. Vektori $d\mathbf{X}$ lüke¹² (koos peatelgedega) vektoriks $d\mathbf{x}^{(T)}$.
2. Vektori $d\mathbf{x}^{(T)}$ jäik pööre¹³ (koos peatelgedega) vektoriks $d\mathbf{x}^{(R)}$.

¹²I.k. translation

¹³I.k. rotation



Joonis 6.12: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon

3. Läbi peatelgede pikkuste muutmise¹⁴ muudetakse vektor $d\mathbf{x}_{(R)}$ vektoriks $d\mathbf{x}_{(S)} = d\mathbf{x}$. Täiendavat pöoret ei toimu siin ja ainult siis kui $d\mathbf{X}$ on paralleelne ühega tensori C_{KL} peavektoritest.

Valemites on eelnev esitatav kujul

$$dx^k_{(T)} = g^k{}_K dX^K, \quad dx^k_{(R)} = R^k{}_l dx^l_{(T)}, \quad dx^k = e^{-\frac{1}{2}k}{}_l dx^l_{(R)}. \quad (6.159)$$

¹⁴1.k. stretch

6.12. Pöörde põhiteoreem

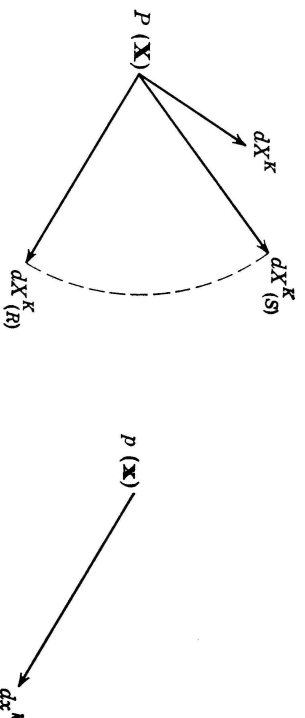
6 - 68

Kui asendame (6.159)₁ → (6.159)₂ → (6.159)₃, siis saame (6.158), mis tõestabki teoreemi.

Joonis 6.13 esitab sama protsessi teises järjekorras: pikenemine, pööre, liike, st.,

$$dX^M_{(S)} = \overset{1}{C}{}^M{}_K dX^K, \quad dX^L_{(T)} = R^L{}_M dX^M_{(S)}, \quad dx^k = g^k{}_L dX^L_{(R)}. \quad (6.160)$$

Seega sellise dekompositsiooni puhul pole operatsioonide järjekord tähtis.



Joonis 6.13: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon

6.13 Kiirus ja kiirendus

6.13.1 Materiaalne tuletis

Materiaalne tuletis vektorist. *Materiaalseks tuletiseks vektorist (aja järgi)* nimetatatakse operatsiooni

$$\dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{\mathbf{X}=\text{const}}. \quad (6.161)$$

Kui vektorfunktsiooni \mathbf{f} argumentideks on LK, siis langevad materiaalne tuletis ja osatuletis aja järgi kokku:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (6.162)$$

Näide: Nii leitakse materiaalsel tuletist liikumisseadusest.

✓

6.13. Kiirus ja kiirendus

6 - 70

Keerukam on lugu siis, kui \mathbf{f} on avaldatud EK-s. Vaatleme vektorfunktsiooni $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f^k \mathbf{g}_k = f_k \mathbf{g}^k$. Nüüd

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f^k \mathbf{g}_k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f^k \mathbf{g}_k) \dot{x}^l, \\ \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f_k \mathbf{g}^k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f_k \mathbf{g}^k) \dot{x}^l. \end{cases} \quad (6.163)$$

kuna baasivektorid \mathbf{g}_k ja \mathbf{g}^k on ajast sõltumatud, saavad valemid (6.163) kuju

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{Df^k}{Dt} \mathbf{g}_k = \frac{Df_k}{Dt} \mathbf{g}^k, \quad (6.164)$$

kus suurus

$$\frac{Df^k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f^k}{\partial t} + f^k \cdot j \dot{x}^j \quad \text{ja} \quad \frac{Df_k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_k}{\partial t} + f_{k;l} \dot{x}^l \quad (6.165)$$

nimetatatakse *materiaalseks tuletiseks vastavalt vektori kontravariantsest ja kovariantsest komponendist.*

✓

Tensorite kovariantsete osatuletised. Enne kui saab asuda materiaalsete tuletiste leidmisele tensoritest tuleb sisse tuua tensorite kovariantsete osatuletised. Need on defineeritud analoogiliselt vektorite kovariantsete osatuletistega (vt. lk. 43) —

$$f^{kl}{}_{;m} = f^{kl}{}_{,m} + f^{nl} \left\{ \begin{matrix} k \\ mn \end{matrix} \right\} + f^{kn} \left\{ \begin{matrix} l \\ mn \end{matrix} \right\} \quad (6.166)$$

on *kontravariantse tensori kovariantne osatuletitis*. Analoogiliselt saab defineerida *kovariantse osatuletise segatensori*

$$f^k{}_{l;m} = f^k{}_{,l,m} + f^n{}_l \left\{ \begin{matrix} k \\ mn \end{matrix} \right\} - f^k{}_n \left\{ \begin{matrix} n \\ lm \end{matrix} \right\} \quad (6.167)$$

ja *kovariantse osatuletise kovariantsest tensorist*

$$f_{kl;m} = f_{kl,m} - f_{nl} \left\{ \begin{matrix} n \\ km \end{matrix} \right\} - f_{kn} \left\{ \begin{matrix} n \\ lm \end{matrix} \right\}. \quad (6.168)$$

Materiaalne tuletis tensoritest. *Materiaalne tuletis tensorite kontravariantsetest, kovariantsetest ja segakomponentidest* on defineeritud järgniselt —

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Df^{kl}}{Dt} = \frac{\partial f^{kl}}{\partial t} + f^{kl}{}_{;m} \dot{x}^m \\ \frac{Df_{kl}}{Dt} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial t} + f_{kl;m} \dot{x}^m \\ \frac{Df^k{}_l}{Dt} = \frac{\partial f^k{}_l}{\partial t} + f^k{}_{l;m} \dot{x}^m \end{array} \right. \quad (6.169)$$

6.13.2 Materiaalse punkti kiirus ja kiirendus

Kiirus

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (6.170)$$

Lagrange'i koordinaadid. Olgu siirdevektor esitatud läbi LK kujul $\mathbf{u} = U^K \mathbf{G}_K$, kus $U^K = U^K(\mathbf{X}, t)$. Nüüd

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial U^K}{\partial t} \mathbf{G}_K, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{v} = V^K \mathbf{G}_K, \quad \text{kus} \quad V^K = \frac{\partial U^K}{\partial t}. \quad (6.171)$$

Viimased avaldised esitavadki *kiiruse (kiirusvektori) Lagrange'i koordinaatides*.

Euleri koordinaadid. Kui siirdevektor on esitatud läbi Euleri koordinaatide, siis $\mathbf{u} = u^k \mathbf{g}_k$, kus $u^k = u^k(\mathbf{x}, t)$. Nüüd saame *kiiruse avaldised Euleri koordinaatides*:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{X}=\text{const}} = \frac{D u^k}{D t} \mathbf{g}_k \equiv \left[\frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k \cdot j v^j \right] \mathbf{g}_k, \\ &\text{ehk} \end{aligned} \quad (6.172)$$

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k, \quad \text{kus} \quad v^k = \frac{D u^k}{D t} \equiv \frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k \cdot j v^j.$$

Seega on kiiruse- ja siirdekomponentide vahelised seosed Euleri koordinaatide puhul ilmutamata kujul.

6.13. Kiirus ja kiirendus

Kiirendus

Materiaalse punkti kiirendus on defineeritud kui tema kiirusvektori esimene tuletis aja järgi —

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (6.173)$$

Lagrange'i koordinaatide puhul

$$\mathbf{a} = A^K \mathbf{G}_K, \quad A^K = \frac{\partial V^K}{\partial t} = \frac{\partial^2 U^K}{\partial t^2} \quad (6.174)$$

ning *Euleri koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{g}_k, \quad a^k = \frac{D v^k}{D t} = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k \cdot j \underbrace{v^j}_{\dot{x}^j} \quad (6.175)$$

Seega avalduvad kiirenduse komponendid nii LK-s kui EK-s ilmutatud kujul.

6.13.3 Deformatsioonikiiruse tensor

Materiaalne tuletis deformatsioonigradiendist $x^k_{,K}$.

$$\frac{D(x^k_{,K})}{Dt} = v^k_{;j} x^j_{,K}. \quad (6.176)$$

Materiaalne tuletis koordinaadi diferentsiaalset.

$$\frac{D(dx^k)}{Dt} = v^k_{;j} dx^j. \quad (6.177)$$

Euleri deformatsioonikiiruse tensor.

$$2d_{ki} = v_{k;i} + v_{i;k}, \quad (6.178)$$

Materiaalne tuletis joonelemendi ruudust

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = 2d_{ki} dx^k dx^i. \quad (6.179)$$

Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor.

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{ki} x^k_{,K} x^i_{,L}. \quad (6.180)$$

6.13. Kiirus ja kiirendus

6.13.4 Elementaarruumala muutumise kiirus

Käesolevas alajaotuses leiame materiaalse tuletise EK-s esitatud elementaarruumalast dv . Alghetkel t_0 on meil tahke keha (ruumipiirkond) B , mida ümbritseb pind A ja mille ruumala on \mathcal{V} . Deformatsiooni käigus $B \rightarrow b$, $A \rightarrow a$ ja $\mathcal{V} \rightarrow v$.

Kasutame tähistusi

✓

$$\begin{aligned} j &= \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \right| = |x^k_{,K}|, & J &= \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = |z^k_{,K}|, \\ g &= |g_{kl}|, & G^{-1} &= |G^{KL}|. \end{aligned} \quad (6.181)$$

Pideva liikumise puhul on koordinaatseisendused $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ja $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ teineteise ühised pöördteisendused ja $j \neq 0$. Köverjoonelised koordinaadid \mathbf{x} ja \mathbf{X} olid sissetoodud läbi DRK. Seega

$$\frac{\partial z^k}{\partial Z^K} = \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial Z^K}$$

ning jakobiaan

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \right| \cdot \left| \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \right| \cdot \left| \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right|. \quad (6.182)$$

...

$$\frac{D J}{D t} = J v^k{}_{;k} \quad (6.183)$$

Kokku saame aga avaldise

$$\frac{D(dv)}{D t} = J v^k{}_{;k} d\mathcal{V} = v^k{}_{;k} dv, \quad (6.184)$$

mis väljendabki *elementaarruumala muutumise kiirust*.

6.13.5 Elementaarpinna muutumise kiirus

Materiaalne tuletis deformatsioonigradiendist $X^K{}_{,k}$:

$$\frac{D(X^K{}_{,k})}{D t} = -X^K{}_{,l} v^l{}_{;k} \quad (6.185)$$

Pinnaelemendi materiaalne tuletis (muutumise kiirus):

$$\frac{D(da_k)}{D t} = v^m{}_{;m} da_k - v^m{}_{;k} da_m. \quad (6.186)$$

6.14. Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

6.14 Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

Joonintegraal. Olgu ϕ mingi funktsioon (näit. massi tihedus või kiirus või elektrijuhetus vms.), mis on defineeritud üle materiaalse joone L . Vastava joonintegraali muutumise kiirus leitakse materiaalse tuletise abil:

$$\begin{aligned} \frac{D}{D t} \int_L \phi dx^k &= \int_L \frac{D}{D t} (\phi dx^k) = \int_L \left[\frac{D\phi}{D t} dx^k + \phi \frac{D}{D t} (dx^k) \right] = \\ &\stackrel{(6.177)}{=} \int_L [\dot{\phi} dx^k + \phi v^k{}_{;j} dx^j]. \end{aligned} \quad (6.187)$$

Pindintegraal. Olgu nüüd suvaline funktsioon ϕ defineeritud üle materiaalse pinna S . Vastava pindintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{D t} \int_S \phi da_k &= \int_S \frac{D}{D t} (\phi da_k) = \int_S \left[\frac{D\phi}{D t} da_k + \phi \frac{D}{D t} (da_k) \right] = \\ &\stackrel{(6.186)}{=} \int_S [\dot{\phi} da_k + \phi (v^l{}_{;j} da_j - v^l{}_{;k} da_l)]. \end{aligned} \quad (6.188)$$

Ruumintegraal. Kui nüüd funktsioon ϕ on defineeritud üle materiaalse mahu \mathcal{V} , siis ruumintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{D\phi}{Dt} dv + \phi \frac{D}{Dt}(dv) \right] \stackrel{(6.184)}{=} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_{;k} v^k \right) dv + \phi v^k_{;k} (dv) \right] = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\phi v^k)_{;k} \right] dv. \end{aligned} \quad (6.189)$$

Kui kasutada Greeni-Gaussi teoreemi¹⁵, siis saame viimasesst

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_s \phi v^k da_k. \quad (6.190)$$

Siin on materiaalne maht \mathcal{V} asendatud fikseeritud ruumimahuga ν , mida ümbritseb pind s ja mis hetkelisel ühtib materiaalse mahuga \mathcal{V} . Seega, mingi füüsikalise suuruse ϕ materiaalses mahus \mathcal{V} muutumise kiirus võrdub selle suurse ϕ muutumise kiiruse ruumilises mahus ν (mis hetkelisel ühtib materiaalse mahuga \mathcal{V}) pluss suuruse ϕv^k voog läbi ruumilist mahtu ν ümbritseva pinna s .

¹⁵ $\int_{\mathcal{V}} u^k_{;k} dv = \int_s u^k da_k$, — tuntud ka kui Gaussi-Ostrogradski teoreem

6.15. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

6 - 80

6.15 Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

6.15.1 Keeriselisus

*(Cauchy) keeriselisuse tensor*¹⁶

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k;l} - v_{l;k}) \equiv v_{[k;l]}. \quad (6.191)$$

Kaldsümmeetrilisest tensorist w_{kl} saab omakorda konstrueerida *keerisvektori*

$$w^k = \epsilon^{kmn} w_{ml} = \epsilon^{klm} v_{m;l} \text{ ehk } \mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}, \quad (6.192)$$

kus

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv \text{rot } \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{v} \text{ ja } \nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (6.193)$$

Keerisvektori kovariantsed komponendid

$$w_k = g_{kl} w^l \quad (6.194)$$

¹⁶Ik. *vorticity tensor*. Kasutatakse ka terminit pöörlemistensor, i.k. vastavalt *spin tensor*.

6.15.2 Deformatsioonitensorite materiaalsed tuletised

Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl}x^k,{}_K x^l,{}_L.$$

Leiame nüüd seose deformatsioonikiiruse tensori d_{kl} ja Euleri deformatsioonitensori materiaalse tuletise \dot{e}_{kl} vahel. Selleks leiame jällegi materiaalse tuletise deformatsiooni moodsust $ds^2 - dS^2$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(ds^2) &= \frac{D}{Dt}(dS^2) \stackrel{(6.74)}{=} 2 \frac{D}{Dt}(e_{kl}dx^k dx^l) \\ &\stackrel{(6.177)}{=} 2(\dot{e}_{kl} + e_{ml}v^{m,}{}_{;k} + e_{km}v^{m,}{}_{;l}) dx^k dx^l. \end{aligned} \quad (6.195)$$

$$d_{kl} = \dot{e}_{kl} + e_{ml}v^{m,}{}_{;k} + e_{km}v^{m,}{}_{;l}. \quad (6.196)$$

Arvestades Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensorite definitsioone ($2e_{kl} = g_{kl} - c_{kl}$ ja $2E_{KL} = C_{KL} - G_{KL}$) saame

$$\dot{c}_{kl} = -2\dot{e}_{kl} \quad \text{ja} \quad \dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}. \quad (6.197)$$

6.16. Mass

Deformeeruva keskkonna dünaamika

6.16 Mass

Pideva keskkonna mehaanika I põhiaksioom — massi jäävuse seadus
 Globaalne massi jäävuse aksioom. Keskkonna kogumass on liikumisel invariante —

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_0 d\mathcal{V} = \int_v \rho dv. \quad (6.198)$$

Kuna $dv = Jd\mathcal{V}$, siis saab viimase võrduse esitada nii LK-s kui EK-s —

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho_0 - \rho J) d\mathcal{V} = 0 \quad \text{või} \quad \int_v (\rho - \rho_0 J^{-1}) dv = 0, \quad (6.199)$$

kus

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}}.$$

Lokaalse massi jäävuse aksioomi saame kui rakendame globaalset massi jäävuse aksioomi materiaalse punkti lõpmata väikeses ümbruses. Valemite (6.199) põhjal saame

$$\rho_o = \rho J = \rho \sqrt{\text{III}_C} \quad \text{või} \quad \rho = \rho_o J^{-1} = \rho_o \sqrt{\text{III}_c}. \quad (6.200)$$

Avaldisi (6.200) nimetatakse *materiaalseteks pidevusvõrranditeks* ja nad esitatakse Lagrange'i koordinaatides (Lagrange'i kirjeldus).

Ruumilise pidevusvõrrandi (Euleri kirjeldus) saame kui esitame globaalse massi jäävuse aksioomi kujul

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv \stackrel{(6.189)}{=} \int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} \right] dv = 0. \quad (6.201)$$

Viimase põhjal avaldub lokaalne massi jäävuse aksiom kujul

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} = 0, \quad (6.202)$$

mis kujutabki endast *ruumilist pidevusvõrrandit*.

6.17. Liikumishulk, kineetiline moment, energia

6 - 84

6.17 Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *liikumishulka*¹⁷ \mathcal{P} avaldub kujul

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} v^k(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) d\mathfrak{M} \quad (6.203)$$

kujuures baasivektorid $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ saab integraali ette tuua vaid sirgjooneliste koordinaatide puhul. Kuna pideva massijaotuse puhul $d\mathfrak{M} = \rho dv$, siis pole oluline, kas integreeritakse üle ruumala või massi. Kui korrutada viimast avaldist skalaarselt $\mathbf{G}^K(\mathbf{X})$ siis saame liikumishulga \mathcal{P} komponendid \mathcal{P}^K LK-s —

$$\mathcal{P}^K(\mathbf{X}, t) = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k(\mathbf{X}, \mathbf{x}) v^k(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M}. \quad (6.204)$$

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetiline moment*¹⁸ \mathcal{H}_o ruumipunkti o suhtes

$$\mathcal{H}_o \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{g}_k \epsilon^{kin} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (6.205)$$

¹⁷Lk. *momentum or linear momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka terminit impulss.

¹⁸Lk. *moment of momentum or angular momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid impulsi moment ja pöördemoment.

analooiliselt eelnevaga saame ka kineetilise momendi komponendid esitada LK-s

$$\mathcal{H}_o^K = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (6.206)$$

Lisaks saab kineetilise momendi avaldada ka bivektori kujul

$$\mathcal{H}_o^{KL} = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k g^L_l (p^k v^l - p^l v^k) d\mathfrak{M}. \quad (6.207)$$

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetiline energia*¹⁹

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} v^2 d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} g_{kl} v^k v^l d\mathfrak{M}. \quad (6.208)$$

Pideva keskkonna mehaanika II põhiaksioom — liikumishulga tasakaalu seadus

Liikumishulga globaalse tasakaalu seadus.

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F} \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k v^k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}^K \quad (6.209)$$

¹⁹Lk. *kinetic energy*

Pideva keskkonna mehaanika III põhiaksioom — kineetilise momendi tasakaalu seadus

Kineetilise momendi globaalse tasakaalu seadus.

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}_o &= \mathcal{M}_o \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_o^K \quad \text{ehk} \\ \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k g^L_l (p^k v^l - p^l v^k) d\mathfrak{M} &= \mathcal{M}_o^{KL}. \end{aligned} \quad (6.210)$$

Valemitega (6.209) ja (6.210) esitatud pideva keskkonna mehaanika põhiaksioome nimetatakse *Euleri liikumisseedusteks*.

Pideva keskkonna mehaanika IV põhiaksioom — energia jäävuse seadus

Samam, mis DRK korral

6.18 Pinge

6.18.1 Cauchy pingehüpotees

$$\mathbf{t}_{(a)} = \mathbf{t}_k \frac{da^k}{da} = \mathbf{t}_k n^k = \mathbf{t}^k n_k, \quad (6.211)$$

6.18.2 Pingetensor

Pingetensori komponent (pingekomponent) t_{kl} on koordinaatpinnal $x^k = \text{const}$ mõjuva pingevektori \mathbf{t}_k l -is komponent, st.,

$$\mathbf{t}_k = t_{kl} \mathbf{g}^l \quad (6.212)$$

Pingevektori $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ saab nüüd avaldada kujul

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = t_k n^k \stackrel{(6.212)}{=} t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \quad (6.213)$$

kust

$$t_{(\mathbf{n})l} = t_{kl} n^k. \quad (6.214)$$

Punkti p läbiaval suvalisel pinnal (normaaliga \mathbf{n}) mõjuv pingevektor $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ avaldub lineaarfunktsioonina vaadeldava punkti pingetensorist t_{kl} .

Meetriliste tensoritega indekseid tõstes saame moodustada kontravariantseid ja segatensoreid, näiteks

$$g^{km} g^{ln} t_{mn} = g^{ln} t^k_n = t^{kl}.$$

6.18. Pinge

6 - 88

Seega, lisaks valemitele (6.212) ja (6.213), on pingevektorite avaldamiseks mitmeid võimalusi — †

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = t^k m_k \mathbf{g}^l = t_j n^l \mathbf{g}_k = t^{lk} n_l \mathbf{g}_k = t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \\ \mathbf{t}^k = t^k_l \mathbf{g}^l = t^{kl} \mathbf{g}_l, \quad \mathbf{t}_k = t_k^l \mathbf{g}_l = t_{kl} \mathbf{g}^l. \end{cases} \quad (6.215)$$

Pingetensori füüsikalised komponendid

Alajaotuses 6.8 (lk. 49) toodud valemite põhjal pingevektor

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = t_j n^l \mathbf{g}_k = t_{(l)}^{(k)} n^{(l)} \mathbf{e}_{(k)}, \quad (6.216)$$

kus

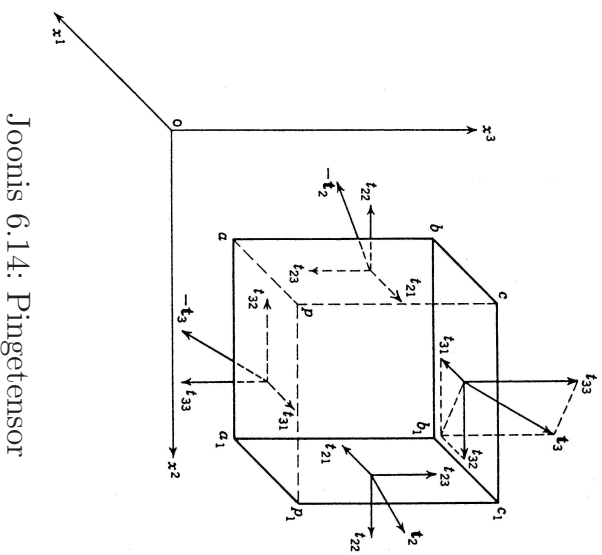
$$\mathbf{e}_{(k)} = \frac{\mathbf{g}_k}{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}}}}, \quad n^{(l)} = n^l \sqrt{g_{\underline{l}\underline{l}}} \quad \text{ja} \quad t_{(l)}^{(k)} = t_j^k \frac{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}}}}{\sqrt{g_{\underline{l}\underline{l}}}}. \quad (6.217)$$

Siinjuures $t_{(l)}^{(k)}$ nimetatakse pingetensori *vasakpoolseteks füüsikalisteks komponentideks*. *Parempoolsed füüsikalised komponendid*

$$t^{(l)}_{(k)} = t^l_k \frac{\sqrt{g_{\underline{l}\underline{l}}}}{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}}}}. \quad (6.218)$$

Sümmeetrilise pingetensori ja ortogonaalsete koordinaatide puhul

$$t^{(k)}_{(l)} = t_{(k)}^{(l)} = t^k_l \sqrt{\frac{g_{\underline{k}\underline{k}}}{g_{\underline{l}\underline{l}}}} = t_k^l \sqrt{\frac{g_{\underline{l}\underline{l}}}{g_{\underline{k}\underline{k}}}} = t^{kl} \sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}} g_{\underline{l}\underline{l}}} = t_{kl} \frac{1}{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}} g_{\underline{l}\underline{l}}}}. \quad (6.219)$$



Joonis 6.14: Pingetensor

6.19 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seaduste tuletuskäik on sama, mis DRK korral, nad omavad kuju

$$\begin{aligned} t^{jk}{}_{;j} + \rho (f^k - a^k) &= 0, \\ \epsilon^{ijk} t_{jk} &= 0 \end{aligned} \quad (6.220)$$

ja neid nimetatakse vastavalt *Cauchy esimeseks ja teiseks liikumisseeduseks*. *

Avaldisest (6.220)₂ järeldub, et pingetensor peab olema sümmeetriline:

$$\epsilon^{ijk} t_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{jk} - t_{kj} = 0, \quad (6.221)$$

Järeldus: Kui liikumishulk on lokaalses tasakaalus (ning mahu- ja pinnamomendid puuduvad), on kineetiline moment lokaalses tasakaalus parajasti siis kui pingetensor on sümmeetriline.

Seega on meil vaadeldaval juhul vaid kuus sõltumatut pingekomponenti: t^{11} , t^{22} , t^{33} , $t^{12} = t^{21}$, $t^{13} = t^{31}$, $t^{23} = t^{32}$, st.,

$$t_{kl} = t_{lk}, \quad t^{kl} = t^{lk}, \quad t^k{}_l = t_l{}^k. \quad (6.222)$$

6.20. Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

6 - 90

Arvestades avaldisi (6.222) ning tõstes ja langetades indekseid, saab anda Cauchy esimesele liikumisseedusele (6.220)₁ alternatiivseid kujusid —

$$\begin{cases} t^{kl}{}_{;l} + \rho (f^k - a^k) = 0, \\ t^l{}_{k;l} + \rho (f_k - a_k) = 0, \\ t_l{}^k{}_{;l} + \rho (f^k - a^k) = 0. \end{cases} \quad (6.223)$$

Enamgi veel, Cauchy liikumisseedusi on võimalik esitada ka füüsikalistes komponentides.

6.20 Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

Cauchy liikumisvõrrandid (6.220) on esitatud EK-s. Lagrange'i kirjelduse jaoks toome sisse pingevektori \mathbf{T}^K ruumipunktis \mathbf{x} , mis vastab deformeerumata pinnale dA materiaalses punktis $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, nii et

$$\mathbf{t}_{(n)} da = \mathbf{t}^k da_k = \mathbf{T}^K dA_K. \quad (6.224)$$

Kuna $da_k = JX^K{}_{,k} dA_K$ ja $dA_K = J^{-1}x^k{}_{,K} da_k$ siis

$$\mathbf{t}^k = J^{-1}x^k{}_{,K} \mathbf{T}^K \quad \text{ja} \quad \mathbf{T}^K = JX^K{}_{,k} \mathbf{t}^k \quad (6.225)$$

Piola (1833, 1836 ja 1848) tõi sisse pseudopinge tensorid T^{Kl} ja T^{KL} nii, et

$$\mathbf{T}^K = T^{Kl} \mathbf{g}_l = T^{KL} x^l, \mathbf{l} \mathbf{g}_l = T^{KL} \mathbf{C}_L. \quad (6.226)$$

Tänapäeval on need tensorid tuntud kui *esimene ja teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor*. ✓

Seosed Cauchy pingetensoriga:

$$\begin{aligned} T^{Kl} &= J X^K_{,k} t^{kl}, & t^{kl} &= J^{-1} x^k_{,K} T^{Kl}, \\ T^{KL} &= T^{Kl} X^L_{,l} = J X^K_{,k} X^L_{,l} t^{kl}, & (6.227) \\ t^{kl} &= J^{-1} x^k_{,K} x^l_{,L} T^{KL}, & T^{Kl} &= x^l_{,L} T^{KL}. \end{aligned}$$

Järgnevalt defineerime *tensori kovariantse täistuletise*. Kui $A^{Kk} = A^{Kk}(\mathbf{X}, \mathbf{x})$, siis kovariantne täistuletis

$$A^{Kk}_{:L} = \underbrace{A^{Kk}_{,L}}_{A^{Kk}_{:L}} + \underbrace{\left\{ \begin{matrix} K \\ ML \end{matrix} \right\}}_{A^{Kk}_{:L}} A^{Mk} + \left(A^{Kk}_{,l} + \underbrace{\left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\}}_{A^{Kk}_{:l}} A^{Km} \right) x^l_{,L}. \quad (6.228)$$

6.20. Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

Nüüd saab avaldada Cauchy esimese liikumisseaduse läbi tensori T^{Kl} —

$$T^{Kk}_{,K} + T^{Km} \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} x^l_{,K} + T^{Kk} \left\{ \begin{matrix} L \\ LK \end{matrix} \right\} + \rho_o (f^k - a^k) = 0 \quad (6.229)$$

ehk

$$T^{Kk}_{:K} + \rho_o (f^k - a^k) = 0.$$

Viimase puhul on arvestatud, et siin $T^{Kk} = T^{Kk}(\mathbf{X})$. Cauchy teine liikumisseadus saab kuju

$$T^{Kk} x^m_{,K} = T^{Km} x^k_{,K}. \quad (6.230)$$

Läbi tensori T^{KL} saavad liikumisseadused (6.229) ja (6.230) kuju

$$\begin{cases} (T^{KL} x^k_{,K})_{,K} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} x^m_{,L} x^l_{,K} + \left\{ \begin{matrix} M \\ MK \end{matrix} \right\} x^k_{,L} T^{KL} + \rho_o (f^k - a^k) = 0, \\ T^{KL} = T^{LK}. \end{cases} \quad (6.231)$$

Energia ja entroopia

6.21 Energia jäävuse seadus

Globaalne energia jäävuse seadus on termodünaamikas tuntud kui termodünaamika esimene seadus ja ta esitatakse kujul

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + Q, \quad (6.232)$$

kus Q on soojuse juurdevool ajaühikus, ja teda mõõdetakse samades ühikutes kui mehaanikalist võimsust \mathcal{W} . Pideva massijaotusega keskkonnas

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \rho v_p v^p dv \quad \text{ja} \quad \mathcal{E} = \int_{\gamma} \rho \varepsilon dv, \quad (6.233)$$

6.21. Energia jäävuse seadus — termodünaamika esimene seadus

6 - 94

kus ε on siseenergia tihedus. Mehaanikaline võimsus

$$\mathcal{W} = \int_S t^{rp} v_p da_r + \int_{\gamma} \rho f^p v_p dv. \quad (6.234)$$

Soojuse juurdevool

$$Q = \int_S q^r da_p + \int_{\gamma} \rho h dv. \quad (6.235)$$

Siin q^p on soojuse juurdevool pinnatühiku kohta ja h — keha siseallikaist toodetud soojus massitühiku kohta.

Avaldame nüüd kõik valemis (6.232) olevad liikmed läbi ruumintegraalide — ✓

$$\dot{\mathcal{K}} = \int_v [\rho a^p v_p dv + \underbrace{\frac{1}{2} v_p v^p \frac{D}{Dt}(\rho dv)}_{=0}], \quad \dot{\mathcal{E}} = \int_v [\rho \dot{\varepsilon} dv + \varepsilon \underbrace{\frac{D}{Dt}(\rho dv)}_{=0}], \quad (6.236)$$

$$\mathcal{W} = \int_v [t^{rp}{}_{;r} v_p + t^{rp} v_{p;r} + \rho f^p v_p] dv, \quad Q = \int_v (q^p{}_{;p} + \rho h) dv. \quad (6.237)$$

Nüüd saame anda *globaalsete energia jäävuse seadusele* kuju

$$\int_v [\rho \dot{\varepsilon} - t^{pr} v_{p;r} - q^p{}_{;p} - \rho h] dv = \int_v v_p (t^{rp}{}_{;r} + \rho f^p - \rho a^p) dv. \quad (6.238)$$

Lokaalse energia jäävuse seaduse saame võrdusest (6.238) kui vaatleme integraalaluseid avaldisi. Selgub, et p.p. olev integraalalune avaldis kujutab endast liikumishulga lokaalse tasakaalu seadust ja on seega võrdne nulliga. Seega, arvestades et $t^{pr}v_{p;r} = t^{pr}d_{pr}$, saame

$$\rho \dot{\varepsilon} = t^{pr}d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h. \quad (6.239)$$

Saadud diferentsiaalvõrrand väljendab *lokaalset energia jäävuse seadust* ja teda nimetatakse ka *energia lokaalse tasakaalu diferentsiaalvõrrandiks*. Viimases avaldises esinevat mehaanikalist energiat

$$\phi = t^{pq}d_{pq} \quad (6.240)$$

nimetatakse *pinge võimsuseks*.

6.22 Potentsiaalne energia

Juhtul, kus välisjõud f_p on stationaarsed saame tuua sisse *potentsiaalse energia*:

$$f_p = -U_{;p}. \quad \mathcal{U} = \int_v \rho U dv. \quad (6.241)$$

6.22. Potentsiaalne energia

Mehaanikalise võimsuse avaldis (6.234) saab nüüd kuju

$$\mathcal{W} = \int_s t^{rp}v_p da_r - \int_v \rho U_{;p}v^p dv. \quad (6.242)$$

Kuna

$$\dot{\mathcal{U}} = \frac{D}{Dt} \int_v \rho U dv = \int_v \rho \dot{U} dv = \int_v \rho U_{;p}v^p dv. \quad (6.243)$$

siis saab avaldis (6.242) omakorda kuju

$$\mathcal{W} = \int_s t^{rp}v_p da_r - \dot{\mathcal{U}} \quad (6.244)$$

ja globaalne energia jäävuse seadus (termodünaamika esimene seadus)

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{U}} = \int_s t^{rp}v_p da_r + Q. \quad (6.245)$$

6.22.1 Entroopia tootmine

Lokaalne entroopia tootmine. Kasutame lokaalset energia jäävuse seadust (6.239) ja järeldust Gibbs'i võrrandist ($de = \vartheta d\eta + \tau^\alpha dv_\alpha$):

$$\rho \dot{e} = t^{pr} d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h, \quad \dot{\varepsilon} = \vartheta \dot{\eta} + \tau^\alpha v_\alpha.$$

Kui elimineerida viimasest $\dot{\varepsilon}$ ning arvestada, et entroopia tootmine on seotud vaid pingetensori dissipatiivse osaga, saame *lokaalse entroopia tootmise võrrandi*

$$\rho \vartheta \dot{\eta} = D t^{pr} d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h - \rho \tau^\alpha v_\alpha. \quad (6.246)$$

Globaalne entroopia tootmine. Vastav võrrand saadakse kui integreerida lokaalset entroopia tootmise avaldist (6.246) (avaldades elnevalt $\rho \dot{\eta}$) üle mahu \mathcal{V} ning kasutada seoseid

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\eta} dv = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \eta dv \doteq \dot{H} \quad (6.247)$$

ja

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\vartheta} q^p{}_{;p} dv = \int_{\mathcal{V}} \left[\left(\frac{q^p}{\vartheta} \right)_{;p} + \frac{q^p \vartheta_{;p}}{\vartheta^2} \right] dv = \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \frac{q^p \vartheta_{;p}}{\vartheta^2} dv. \quad (6.248)$$

6.22. Potentsiaalne energia

6 - 98

Globaalne entroopia tootmise võrrand avaldub seejärel kujul

$$\dot{H} = \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \left(\Delta + \frac{\rho h}{\vartheta} \right) dv, \quad (6.249)$$

kus

$$\Delta = \frac{1}{\vartheta} \left[D t^{pr} d_{rp} + q^p (\ln \vartheta)_{;p} - \rho \tau^\alpha v_\alpha \right]. \quad (6.250)$$

Seega entroopia muutust põhjustavad: 1) entroopia juurdevool q^p/ϑ läbi keha pinda ja 2) entroopia tootmine keha sees.

6.22.2 Entroopia seadus — termodünaamika teine seadus

Globaalne entroopia seadus. Eksperimentaalsete tulemuste põhjal on teada, et soojusallikatest vaba süsteem tarbib mehaanikalist tööd st.,

$$\Delta \geq 0. \quad (6.251)$$

Seega valemite (6.249)–(6.251) põhjal

$$\dot{H} \geq \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho h}{\vartheta} dv. \quad (6.252)$$

Avaldis (6.252) väljendab *globaalset entroopia seadust* — summaarse entroopia juurdekasv on suurem-võrdne läbi keha pinna toimuva entroopia juurdevoolu ja keha siseallikaist toodetud entroopia summast.²⁰

Lokaalne entroopia seadus. Selleks et saada termodünaamika teist seadust lokaalsel kujul, minnakse avaldises (6.252) Greeni-Gaussi teoreemi abil üle ruumintegraalile. Arvestades (6.247)

$$\int_V \left\{ \rho \dot{\eta} - \left(\frac{q^k}{\vartheta} \right)_{;k} - \frac{\rho h}{\vartheta} \right\} dv \geq 0, \quad (6.253)$$

kust globaalse võrratuse lokaliseerimise tulemusena saame *lokaalse entroopia seaduse*

$$\rho \dot{\eta} - \left(\frac{q^k}{\vartheta} \right)_{;k} - \frac{\rho h}{\vartheta} \geq 0. \quad (6.254)$$

Ellimineerime nüüd lokaalse energia jäävuse seaduse abil lokaalsest entroopiaseadusest kehasisest allikast toodetud soojuse h . Kasutades samasusi (6.248) saame

²⁰Eringeni (1962)põhjal nimetatakse (6.252) Clausiuse-Duhemi võrratuseks. Tavaliselt esitatakse nimetatud võrratus siiski lokaalsel kujul.

Clausiuse-Duhemi võrratuse

$$\rho \left(\dot{\eta} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\vartheta} \right) + \frac{1}{\vartheta} t^{kl} d_{kl} + \frac{1}{\vartheta^2} q^k \vartheta_{;k} \geq 0, \quad (6.255)$$

mis väljendab samuti lokaalset entroopia seadust.

Võrratusele (6.255) saab anda alternatiivse kuju, tuues sisse *Helmholtzi vaba energia tiheduse*

$$\psi = \varepsilon - \vartheta \eta. \quad (6.256)$$

Funktsioon ψ väljendab seda osa siseenergiast, mis on võimeline tegema mehaanikalist tööd. Avaldades nüüd avaldisest (6.256) siseenergia tiheduse ε , saame anda võrratusele (6.255) kuju

$$-\rho \left(\dot{\psi} + \eta \dot{\vartheta} \right) + t^{kl} d_{kl} + \frac{1}{\vartheta} q^k \vartheta_{;k} \geq 0. \quad (6.257)$$

Võrratused (6.255) ja (6.257) peavad kehtima kõikide termomehaanikaliste protsesside puhul.