

Peatükk 6

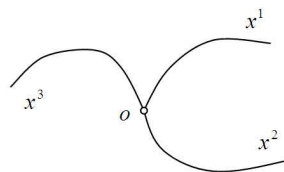
Kovariantsus ja kontravariantsus ehk mis saab siis kui koordinaatideks pole Descartes'i ristkoordinaadid

6.2 Koordinaadid

6.2.1 Euleri koordinaadid

Toome sisse ajas muutumatu kõverjoonelise koordinaatsüsteemi \mathbf{x} , mille suhtes vaadeldakse keskkonna materiaalsete punktide liikumist. Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Euleri koordinaatsüsteemiks ehk ruumiliseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate \mathbf{x} — *Euleri koordinaatideks (EK) ehk ruumilisteks koordinaatideks*. Ühe punktmassi liikumist Euleri koordinaatsüsteemis kirjeldavad kolm võrrandit

$$x^i = f^i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$



Joonis 6.1: Euleri koordinaadid

6.1 Sissejuhatus

Seni oleme kasutanud DRK, kuid üldjuhul ei pruugi koordinaadid olla sirgjoonelised ja/või ortogonaalsed. Lihtsamateks kõverjooneliste koordinaatide näideteks on silindrilised ja sfäärilised koordinaadid. Sellistel juhtudel tulevad sisse ko- ja kontravariantsuse mõisted ning oliliseks muutub see, kas indeksid on kirjutatud alla või üles. Kolmandas peatükis tõime sisse EK ja LK kõverjoonelistena, kuid edaspidi oleme kasutanud vaid DRKe.

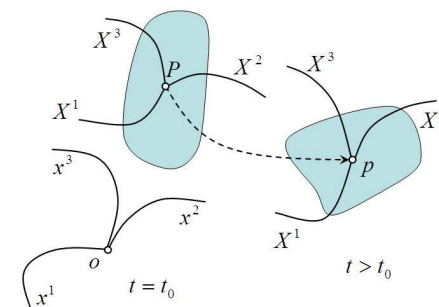
Käesolevas peatükis esitame eelnevates peatükkides tuletatud põhitulemused kõverjoonelistes koordinaatides ja defineerime juurde mõned uued mõisted. Pikkemalt on käesolevas peatükis esitatust võimalik lugeda minu loengukonspektist, mis oli pideva keskkonna mehaanika õpetamisel kasutusel kuni 2008/09 õppeaastani, vt. <http://cens.ioc.ee/~salupere>.

Märkus: Käesolevas peatükis tähistavad j ja J vastavalt (üldistele) kõverjooneliste koordinaatidele ja DRKle vastavaid jakobiaane:

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \right| \quad \text{ja} \quad J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right|.$$

6.2.2 Lagrange'i koordinaadid

Fikseerime ajahetkel $t = t_0$ keskkonna materiaalsete punktide asendi ja seome nendega kõverjoonelise koordinaatsüsteemi \mathbf{X} . Kui nüüd ajahetkel $t > t_0$ keskkond liigub ja muudab kuju, siis liigub ja muudab kuju ka koordinaatsüsteem \mathbf{X} . Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Lagrange'i koordinaatsüsteemiks ehk materiaalseteks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate \mathbf{X} — *Lagrange'i koordinaatideks (LK) ehk materiaalseteks koordinaatideks*.



Joonis 6.2: Lagrange'i koordinaadid

6.2.3 Kõverjooneliste koordinaatide avaldamine Descartes'i ristkoordinaatide kaudu

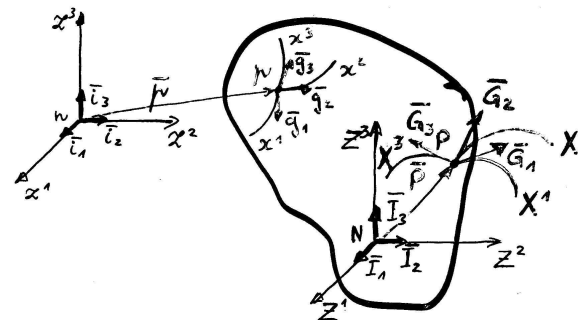
Eukleidilises ruumis E^3 saab alati sisse tuua Descartes'i ristkoordinaadid (DRK). Toome nüüd Euleri kõverjoonelised koordinaadid sisse läbi Euleri Descartes'i ristkoordinaatide (EDRK) $\mathbf{z} \equiv (z^1, z^2, z^3)$. Selleks eeldame, et EDRK \mathbf{z} sõltuvad kolmest Eukleidilise ruumi E^3 muutujast \mathbf{x} , st.,

$$z^k = f^k(\mathbf{x}) = z^k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3, \quad (6.2)$$

kus funktsioonid f^k kuuluvad klassi C^r , $r \geq 1$ (st., nad on pidevad funktsioonid, mis omavad pidevaid osatuletisi kuni järguni r) ja on defineeritud mingis ruumi E^3 piirkonnas. Nüüd tuleb määratleda tingimused, mille puhul õnnestub võrranditest (6.2) avaldada

$$x^k = x^k(\mathbf{z}), \quad k = 1, 2, 3 \quad (6.3)$$

nii, et (6.2) ja (6.3) oleksid teineteise ühesed pöördteisendused.



Joonis 6.3: Kõverjoonelised koordinaadid ja DRK

Matemaatilisest analüüsist tuntud teoreemi (teoreem ilmutamata funktsioonist)¹ põhjal omab teisendus (6.2) punkti p ümbruses δ ühest pöördteisendust (6.3) siis ja ainult siis kui jakobiaan

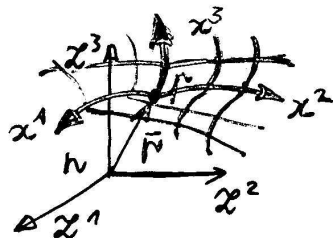
$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| \neq 0; \quad |x^k - x_0^k| < \delta. \quad (6.4)$$

¹Töestust vaata näiteks M.N.L. Narasimhan'i õpikust *Principles of Continuum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New-York et al., 1993. lk. 28-30

Siin x_0^k , $k = 1, 2, 3$, on ruumipunkti p koordinaadid ja

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| = \begin{vmatrix} \partial z^1 / \partial x^1 & \partial z^1 / \partial x^2 & \partial z^1 / \partial x^3 \\ \partial z^2 / \partial x^1 & \partial z^2 / \partial x^2 & \partial z^2 / \partial x^3 \\ \partial z^3 / \partial x^1 & \partial z^3 / \partial x^2 & \partial z^3 / \partial x^3 \end{vmatrix}. \quad (6.5)$$

Kui fikseerime avaldise (6.2) vasakul poolel $(\mathbf{z}) = (z_*^1, z_*^2, z_*^3)$, siis saame kolme lõikuvat pinda võrrandid. Teatavasti esitavad kaks lõikuvat pinda kõvera (kõverjoone) ja kolm lõikuvat pinda punkti. Kui $(\mathbf{z}) = (z_*^1, z_*^2, z_*^3)$ on punkti p koordinaadid, siis paarikaupa lõikuvad pinnad esitavad kolm ruumipunkti p läbivat kõverat. Neid ruumipunkti p läbivat kolme pinda nimetatakse *koordinaatpindadeks* ja kolme kõverat *koordinaatkõverateks*.



Joonis 6.4: Koordinaatkõverad ja koordinaatpinnad

Ajahetkel $t = t_0$ toome analoogiliselt sisse Lagrange'i kõverjoonelised koordinaadid — eeldame, et LDRK \mathbf{Z} on avaldatavad LK \mathbf{X} kaudu kujul

$$Z^K = Z^K(\mathbf{X}), \quad K = 1, 2, 3. \quad (6.6)$$

Vastav pöördteisendus

$$X^K = X^K(\mathbf{Z}), \quad K = 1, 2, 3 \quad (6.7)$$

eksisteerib ja on ühene materiaalse punkti P ümbruses δ parajasti siis kui jakobiaan

$$J_L = \left| \frac{\partial Z^K}{\partial X^L} \right| \neq 0; \quad |X^K - X_0^K| < \delta. \quad (6.8)$$

Avaldise (6.2), (6.3), (6.6) ja (6.7) nimetatakse *koordinaatteisendusteks*, kusjuures (6.2) ja (6.3) kehtivad suvalisel ajahetkel, kuid (6.6) ja (6.7) vaid $t = t_0$ puhul (viimaseid kasutatakse vaid selleks, et LK sisse tuua).

Edaspidises eeldame, et

- kõverjoonelised koordinaatsüsteemid on sisse toodud Descartes'i ristkoordinaatide kaudu (EK kujul (6.2) ja LK kujul (6.6)) selliselt, et jakobiaanid

(6.4) ja (6.8) pole samaselt nullid ruumis E^3 või vähemalt mingis meid huvitavas ruumi E^3 piirkonnas (v.a. mõned singulaarsed punktid, jooned või pinnad);

- üldjuhul on pikkuse mõõtmiseks piki telgi z^k ja Z^K valitud ühtne mastaap.

Märkused:

- Selliselt sisse toodud kõverjoonelised koordinaadid on üldjuhul lokaalsed ja pole üldjuhul ortogonaalsed.
- $J \neq 0 \Rightarrow J > 0$ või $J < 0$ igas ruumipunktis. \checkmark

Näide 6.2.1. *Euleri koordinaatideks x^k on silindrilised koordinaadid. Kas EK on üheselt määratud EDRK kaudu? Millised on koordinaatpinnad ja koordinaatkõverad?*

Defineerime x^k läbi z^k :

$$\begin{cases} z^1 = x^1 \cos x^2 \\ z^2 = x^1 \sin x^2 \\ z^3 = x^3 \end{cases} \quad (6.9)$$

6.3 Liikumise kirjeldamine

Liikumisseaduseks nimetatakse üheparameetristilist koordinaatide teisendust

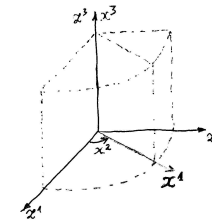
$$x^k = x^k(\mathbf{X}, t) \quad (6.11)$$

$$\text{või} \quad X^K = X^K(\mathbf{x}, t), \quad (6.12)$$

mis siirdab materiaalse punkti \mathbf{X} ruumipunkti \mathbf{x} . Parameetrik on siin aeg t . Alghetkel $t = t_0$ kujutavad teisendused (6.11) ja (6.12) (parameetrist sõltumata) koordinaatteisendusi. Tihti on kasulik kui $t = t_0$ puhul teljestikud x^k ja X^K ühtiksid, st., hetkel $t = t_0$ $x^k = X^K$ kui $k = K$. Sel juhul on materiaalse punkti asukoht alghetkel $t = t_0$ automaatselt teada ning asukoha muutus algasendi suhtes on hetkel $t > t_0$ lihtsalt leitav.

Analoogiliselt eelmise punktiga 6.2.3 tekib ka siin küsimus liikumisseaduse ühesusest, st., teisendused (6.11) ja (6.12) peavad olema teineteise ühesed pöördteisendused. Eeldades, et nii funktsioon (6.11) kui (6.12) kuuluvad klassi C^r , $r \geq 1$, on see tingimus täidetud ruumipunkti p ümbruses δ parajasti siis kui jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \right| \neq 0 \quad |x^k - x_0^k| < \delta. \quad (6.13) \quad \star$$



Joonis 6.5: Silindrilised koordinaadid

Pöördteisendus

$$\begin{cases} x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2} \\ x^2 = \arctan(z^2/z^1) \\ x^3 = z^3 \end{cases} \quad (6.10)$$

Jakobiaan

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| = \dots$$

Järelikult, ühene pöördteisendus eksisteerib ...

Jakobiaan (6.13) väljendab tegelikult pidevuse aksiooni, mille põhjal positiivne \dagger lõplik aine maht ei saa deformeeruda nullmahuks ega lõpmata suureks mahuks² ning ükski ainehulk ei tungi teise ainehulga sisse³ (joon deformeerub jooneks, pind pinnaks ja maht mahuks).

6.4 Skalaar, vektor ja tensor

6.4.1 Skalaar

Vaatleme koordinaatsüsteeme ζ^i ja η^i . Funktsiooni $\varphi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) \equiv \varphi(\zeta)$ nimetatakse (absoluutseks) *skalaariks* kui ta ei muuda koordinaatteisendusega $\zeta^k = \zeta^k(\eta^1, \eta^2, \eta^3) \equiv \zeta^k(\boldsymbol{\eta})$, $k = 1, 2, 3$ oma algväärtust, st.,

$$\varphi(\zeta^1(\boldsymbol{\eta}), \zeta^2(\boldsymbol{\eta}), \zeta^3(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi(\boldsymbol{\eta}) = \varphi(\zeta). \quad (6.14)$$

Seega ei sõltu skalaari väärtus antud punktis koordinaatide valikust.

Näide 6.4.1. *Temperatuur on absoluutne skalaar.*

²ik. *indestructibility of matter*

³ik. *impenetrability of matter*

6.4.2 Kontravariantne vektor

Suursi $\varphi^k(\zeta)$ nimetatakse vektori kontravariantseteks komponentideks ehk lihtsalt kontravariantseteks vektoriks kui koordinaatteisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul muutub ta vastavalt seadusele

$$\varphi^k(\zeta(\eta)) \equiv \psi^k(\eta) = \varphi^m(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.15)$$

Suursi $\psi^k(\eta)$ tuleb siin mõista kui suuruste $\varphi^k(\zeta)$ komponente koordinaatsüsteemis η^i , $i = 1, 2, 3$.

Samuti on siin kasutatud *summeerimiskokkulepet*, mida kõverjoonelistel koordinaatide korral jääme kasutama kujul $\sum_{i=1}^3 a^i b_i \equiv a^i b_i$, st. üks summeerimisindeksitest peab olema all ja teine üleval.

Näide 6.4.2. Diferentsiaal on kontravariantne vektor, sest võttes

$\varphi^k = d\zeta^k$, saame

$$\psi^k = d\eta^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} d\zeta^m \equiv \varphi^m \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}.$$

6.4.4 Kontravariantne, kovariantne ja segatensor

Suursi $\Phi^{kl}(\zeta)$, $\Phi_{kl}(\zeta)$ ja $\Phi^k{}_l(\zeta)$ nimetatakse vastavalt kontravariantseteks-, kovariantseks- ja segatensoriks kui nad koordinaatteisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul teisenevad seaduste

$$\Phi^{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^{kl}(\eta) = \Phi^{mn}(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \eta^l}{\partial \zeta^n}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (6.17)$$

$$\Phi_{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi_{kl}(\eta) = \Phi_{mn}(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (6.18)$$

ja

$$\Phi^k{}_l(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^k{}_l(\eta) = \Phi^m{}_n(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (6.19)$$

järgi.

‡

6.4.3 Kovariantne vektor

Suursi $\varphi_k(\zeta)$ nimetatakse vektori kovariantseteks komponentideks ehk lühidalt kovariantseks vektoriks kui nad koordinaatide teisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul teisenevad vastavalt seadusele

$$\varphi_k(\zeta(\eta)) \equiv \psi_k(\eta) = \varphi_m(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.16)$$

Näide 6.4.3. Osatuletis absoluutsest skalaarist on kovariantne vektor, sest tähistades

$$\varphi_m = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m}$$

kus Φ on absoluutne skalaar, saame

$$\varphi_k(\zeta(\eta)) \equiv \psi_k(\eta) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} = \varphi_m(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

6.5 Baasivektor, meetriline tensor

6.5.1 Kovariantsed baasivektorid

Vaatleme kahte DRK — üks neist on EDRK z^k ja teine LDRK Z^K . Vastavad ühikbaasid tähistame \mathbf{i}_k ja \mathbf{I}_K . Kui eeldame, et pikkuse mastaap piki telgi z^k ja Z^K on sama, siis omavad vektorid \mathbf{i}_k ja \mathbf{I}_K võrdset ühikpikkust. Kõverjoonelised LK tuuakse teatavasti sisse kujul (6.6), st.,

$$Z^K = Z^K(\mathbf{X}), \quad K = 1, 2, 3,$$

ja kõverjoonelised EK kujul (6.2), st.,

$$z^k = z^k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3.$$

Kohavektorid \mathbf{P} ja \mathbf{p} avalduvad läbi LDRK ja EDRK kujul

$$\mathbf{P} = Z^K(\mathbf{X})\mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{p} = z^k(\mathbf{x})\mathbf{i}_k. \quad (6.20)$$

Viimastest leiame kohavektorite \mathbf{P} ja \mathbf{p} diferentsiaalid

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} dX^K = \mathbf{G}_K dX^K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} dx^k = \mathbf{g}_k dx^k, \quad (6.21)$$

kus vektoreid

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M \quad (6.22)$$

ja

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m \quad (6.23)$$

nimetatakse vastavalt kõverjoonelistele koordinaatide X^K ja x^k *kovariantseteks baasivektoriteks*. Nad on suunatud piki koordinaatkõverate puutujaid (vaadeldavas punktis) ja liikumisel ühest punktist teise muutuvad nad üldjuhul nii suuruselt kui suunalt. Seega moodustavad nad vektorvälja.

Loomulikult saab suurusi $d\mathbf{P}$ ja $d\mathbf{p}$ avaldada DRK kaudu kujul

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z^K} dZ^K = \mathbf{I}_K dZ^K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^k} dz^k = \mathbf{i}_k dz^k \quad (6.24)$$

ning DRK baasivektoreid \mathbf{I}_K ja \mathbf{i}_k omakorda baasivektorite \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k kaudu kujul \checkmark

$$\mathbf{I}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z^K} = \frac{\partial X^L}{\partial Z^K} \mathbf{G}_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^k} = \frac{\partial x^l}{\partial z^k} \mathbf{g}_l. \quad (6.25)$$

6.5.2 Kovariantne meetriline tensor

Elementaarpikkuse ruut $ds^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P}$ avaldub lähtudes valemist (6.24) ja (6.21) kujul

$$ds^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = dZ^K \mathbf{I}_K \cdot dZ^L \mathbf{I}_L = dX^K \mathbf{G}_K \cdot dX^L \mathbf{G}_L.$$

Järgnevalt defineerime *kovariantse meetrilise tensori*

$$G_{KL} = G_{LK} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L \stackrel{(6.22)}{=} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M \cdot \frac{\partial Z^N}{\partial X^L} \mathbf{I}_N = \delta_{MN} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \frac{\partial Z^N}{\partial X^L}, \quad (6.26)$$

kus *Kroneckeri delta*

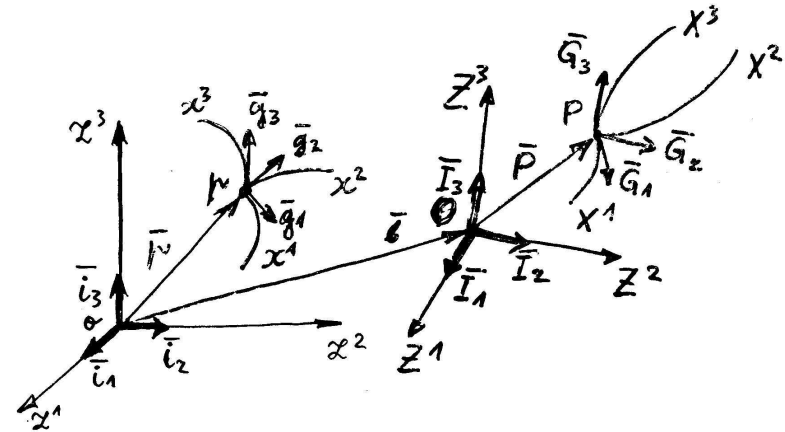
$$\delta_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{I}_L = \begin{cases} 1, & K = L, \\ 0, & K \neq L. \end{cases} \quad (6.27)$$

Arvestades viimaseid avaldisi saame elementaarpikkuse ruudu avaldada kujul

$$ds^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL} dX^K dX^L = \delta_{KL} dZ^K dZ^L. \quad (6.28)$$

Analoogiliselt — elementaarpikkuse ruut

$$ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl} dx^k dx^l = \delta_{kl} dz^k dz^l, \quad \delta_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (6.29)$$



Joonis 6.6: Kovariantsed baasivektorid

ja *kovariantne meetriline tensor* \checkmark

$$g_{kl} = g_{lk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \stackrel{(6.23)}{=} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m \cdot \frac{\partial z^n}{\partial x^l} \mathbf{i}_n = \delta_{mn} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^n}{\partial x^l}. \quad (6.30)$$

Märkus. Suurused ds^2 ja dS^2 on skalaarid ja nende väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi valikust, st., $ds^2(\mathbf{x}) = ds^2(\mathbf{z})$ ja $dS^2(\mathbf{X}) = dS^2(\mathbf{Z})$.

6.5.3 Kontravariantsed baasivektorid ja meetrilised tensorid

Kovariantsete baaside \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k duaalsed⁴ baasid on defineeritud läbi ortonormaalsustingimuse

$$\mathbf{G}^K \cdot \mathbf{G}_L = \delta^K_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_l = \delta^k_l \quad (6.31)$$

Vektoreid \mathbf{G}^K ja \mathbf{g}^k nimetatakse *kontravariantseteks baasivektoriteks* ja nad avalduvad võrrandisüsteemide (6.31) lahendina kujul

$$\mathbf{G}^K = G^{KL} \mathbf{G}_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}^k = g^{kl} \mathbf{g}_l. \quad (6.32)$$

⁴Lad. k. *dualis* — kahene

Viimastes avaldistes esinevad *kontravariantset meetrilised tensorid* avalduvad läbi kovariantsete meetriliste tensorite kujul

$$G^{KL} = \frac{\text{cofactor } G_{KL}}{G} \equiv \frac{(-1)^{K+L} \Delta_{LK}^G}{G} \quad (6.33)$$

ja

$$g^{kl} = \frac{\text{cofactor } g_{kl}}{g} \equiv \frac{(-1)^{k+l} \Delta_{lk}^g}{g}, \quad (6.34)$$

kus

$$G = |G_{KL}| \quad \text{ja} \quad g = |g_{kl}| \quad (6.35)$$

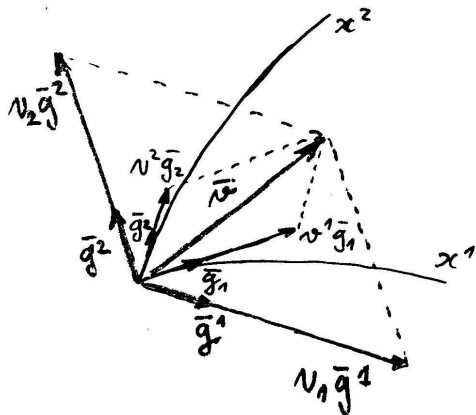
on determinandid ning Δ_{KL}^G ja Δ_{kl}^g on determinantide $|G_{KL}|$ ja $|g_{kl}|$ elemendile indeksipaariga KL või kl vastav miinor. Meetrilised tensorid rahuldavad tingimusi \checkmark

$$G_{KL} G^{LM} = \delta_K^M \quad \text{ja} \quad g_{kl} g^{lm} = \delta_k^m. \quad (6.36)$$

Kuna meetrilised tensorid G_{KL} ja G^{KL} on muutujate X^I ning meetrilised tensorid g_{kl} ja g^{kl} muutujate x^i funktsioonid, siis kujutavad G_{KL} ja G^{KL} endast tensorvälju Lagrange'i koordinaatides X^I ning g_{kl} ja g^{kl} tensorvälju Euleri koordinaatides x^i .

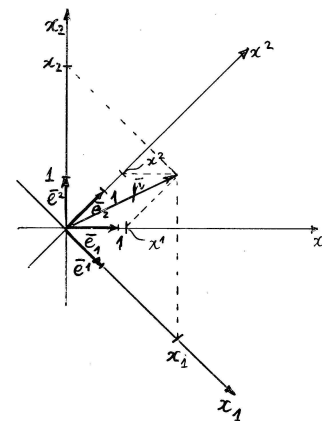
Vt. ka faili kojokoord.pdf

Näide 6.5.2. Vektorite avaldamine kovariantsete ja kontravariantsete baasivektorite kaudu.

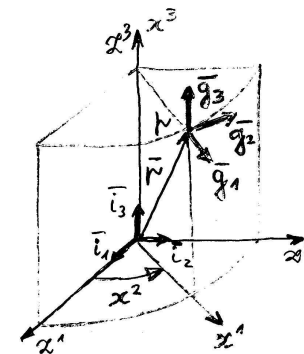


Joonis 6.8:

Näide 6.5.1. Vektorite avaldamine kovariantsete ja kontravariantsete baasivektorite kaudu.



Joonis 6.7:



Joonis 6.9: Silindrilised koordinaadid

Näide 6.5.3. Pöördume tagasi Näite 6.2.1 (lk. 9) juurde. Euleri koordinaatideks x^k on silindrilised koordinaadid, mis on defineeritud läbi DRK järgmiselt:

$$\begin{cases} z^1 = x^1 \cos x^2 \\ z^2 = x^1 \sin x^2 \\ z^3 = x^3 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2} \\ x^2 = \arctan \frac{z^2}{z^1} \\ x^3 = z^3 \end{cases}$$

Vaatleme suvalist punkti p koordinaatidega (\mathbf{x}) ehk kohavektoriga \mathbf{p} . Leida sellele punktile vastavad kovariantsed ja kontravariantsed baasivektorid ning meetrilised tensorid!

Suvaline vektor \mathbf{v} on avaldatav nii kovariantse kui ka kontravariantse baasi kaudu:

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{g}^k = v^k \mathbf{g}_k, \quad (6.37)$$

kus v_k ja v^k on vastavalt vektori \mathbf{v} kovariantsed ja kontravariantsed komponendid, mis ühtivad vaid ortonormeeritud baasi puhul.

Korrutame nüüd avaldist (6.37) kontravariantse baasivektoriga \mathbf{g}^l ✓

$$v_k \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^l = v^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^l.$$

Kuna $v^k \delta_k^l = v^l$, siis $v_k g^{kl} = v^l$, ehk nimetades indeksid ümber,

$$v^k = g^{kl} v_l. \quad (6.38)$$

2. Kui kõverjoonelised koordinaadid on ortogonaalsed, siis $g^{kl} = g_{kl} = 0$ kui $k \neq l$. Näite 6.5.3 puhul see nii oligi. Lisaks olid vektorid \mathbf{g}^k ja \mathbf{g}_k kollineaarsed.

6.5.4 Vahetaja⁵

Seni oleme hoidnud EK ja LK lahus, kuid vahel on vaja ühes koordinaatsüsteemis esitatud vektoreid projekteerida teise koordinaatsüsteemi baasivektoritele. Vaatleme joonist 6.6 (lk. 18) Punktide P ja p kohavektorid

$$\mathbf{P} = P^L \mathbf{G}_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{p} = p^k \mathbf{g}_k.$$

Korrutame neist esimest kontravariantse baasivektoriga \mathbf{G}^K —

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^K = P^L \mathbf{G}_L \cdot \mathbf{G}^K = P^L \delta_L^K = P^K.$$

Seega,

$$P^K = \mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^K \quad \text{ja} \quad p^k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}^k. \quad (6.42)$$

Viimased kujutavad endast vektorite \mathbf{P} ja \mathbf{p} projektsioone vastavalt baasivektorite \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k sihtidele (vt. Näited 6.5.1 ja 6.5.2).

⁵Varasemas konspektis nihutaja, i.k. *shifter*.

Kui korrutada aga avaldist (6.37) kovariantse baasivektoriga \mathbf{g}_l , siis saame analoogiliselt, et

$$v_k = g_{kl} v^l. \quad (6.39)$$

Sellist protseduuri nimetatakse *vektori indeksite tõstmiseks ja langetamiseks*. Seega, meetriliste tensorite abil saab indekseid tõsta ja langetada ehk teisisisõnu — minna kovariantsetelt komponentidelt üle kontravariantsetele ja vastupidi. Lagrange'i koordinaatide puhul analoogiliselt

$$V^K = G^{KL} V_L \quad \text{ja} \quad V_K = G_{KL} V^L \quad (6.40)$$

Märkused:

1. Üldjuhul pole baasivektorid \mathbf{G}^K , \mathbf{G}_K , \mathbf{g}^k ja \mathbf{g}_k ühikvektorid. Nende pikkused avalduvad läbi meetrilise tensori diagonaali elementide —

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}^K| &= \sqrt{G^K \underline{K}}, & |\mathbf{G}_K| &= \sqrt{G_{\underline{K} \underline{K}}}, & K &= \underline{K} \\ |\mathbf{g}^k| &= \sqrt{g^{\underline{k} \underline{k}}}, & |\mathbf{g}_k| &= \sqrt{g_{\underline{k} \underline{k}}}, & k &= \underline{k}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Allkriips tähendab siin seda, et korduva indeksi järgi ei summeerita. Eelnenud näite 6.5.3 puhul $|\mathbf{g}_1| = |\mathbf{g}_3| = 1$ ja $|\mathbf{g}_2| = x^1$.

Oletame nüüd, et tahame viia vektori \mathbf{p} paralleellikkega punkti P ja projekteerida teljestikku X^K , st., baasivektorite \mathbf{G}_K sihile. Tähistame vastava projektsiooni p^K . Nüüd

$$\mathbf{p} = p^K \mathbf{G}_K(\mathbf{X}) = p^k \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \quad (6.43)$$

Korrutame avaldist (6.43) kontravariantse baasivektoriga \mathbf{G}^L

$$p^K \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}^L = p^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}^L.$$

Defineerime nn. *vahetaja* ✓

$$g_k^K \stackrel{\text{def}}{=} g_{\underline{k} \underline{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}^K = \mathbf{G}^K \cdot \mathbf{g}_k. \quad (6.44)$$

Seega, tähistades ümber indeksid $L \rightarrow K$ saame

$$p^K = g_k^K p^k = g_{\underline{k} \underline{K}} p^{\underline{k}}, \quad (6.45)$$

mis esitabki kohavektori \mathbf{p} projektsiooni kovariantse baasivektori \mathbf{G}_K sihil. Korrutades avaldist (6.43) kontravariantse baasivektoriga \mathbf{g}^l ja defineerides *vahetajad*

$$g^k_K \stackrel{\text{def}}{=} g^{\underline{k} \underline{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{G}_K = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{g}^k, \quad (6.46)$$

saame vektori \mathbf{p} tagasi EK-sse:

$$p^k = g^k_K p^K = g_{\underline{K} \underline{k}} p^{\underline{K}}. \quad (6.47)$$

Analoogiliselt eelnevaga saab defineerida vahetajad

$$g_{kK} \stackrel{\text{def}}{=} g_{Kk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}_K = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{g}_k \quad (6.48)$$

ja

$$g^{kK} \stackrel{\text{def}}{=} g^{Kk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{G}^K = \mathbf{G}^K \cdot \mathbf{g}^k. \quad (6.49)$$

Vahetajad g^k_K , g^K_k jne. on nii muutujate \mathbf{X} kui ka \mathbf{x} funktsioonid, sest baasivektorid \mathbf{G}_K ja \mathbf{G}^K sõltuvad Lagrange'i koordinaatidest \mathbf{X} ning baasivektorid \mathbf{g}_k ja \mathbf{g}^k Euleri koordinaatidest \mathbf{x} . Enamgi veel, nad osutuvad nn. kahepunktlisteks tensorväljadeks, sest teisevad kui tensorid mõlemas koordinaatsüsteemis.

Järgnevalt näitame, et

$$g^K_k g^l_K = \delta_k^l. \quad (6.50)$$

Teatavasti

$$v_k = v_K g^K_k = v_l g^l_K g^K_k.$$

Kuna

$$v_k = v_l \delta_k^l,$$

siis peab kehtima võrdus (6.50) ehk vahetajad g^K_k ja g^l_K on teineteise pöördtensorid. analoogiliselt

$$g^K_k g^k_L = \delta^K_L. \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} g^{Kk} &= G^{KL} g^{kl} g_{Ll} \\ g^K_k &= G^{KL} g_{kl} g_L^l \\ g_{Kk} &= G_{KL} g_{kl} g^{Ll} \end{aligned}$$

Näide 6.5.4. Vaatleme juhtu, kus LK ühtib $LDRK$ ning EK ühtib $EDRK$, st., $(\mathbf{X})=(\mathbf{Z})$ ja $(\mathbf{x})=(\mathbf{z})$. Baasivektorid punktides P ja p on avaldiste (6.22) ja (6.23) põhjal

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M = \mathbf{I}_K \quad (6.54)$$

analoogiliselt

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{i}_k \quad (6.55)$$

Antud juhul ühtivad kovariantsed ja kontravariantsed koordinaadid ja baasid, st.,

$$G_{KL} = G^{KL} = \delta_{KL}, \quad (6.56)$$

$$g_{kl} = g^{kl} = \delta_{kl}, \quad (6.57)$$

$$g_{Kk} = g^{Kk} = \delta_{Kk}, \quad (6.58)$$

millest viimane on Kroneckeri delta kui $\mathbf{i}_k \uparrow \uparrow \mathbf{I}_K$.

Teisendame nüüd vahetajad g_{kK} —

$$g_{kK} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}_K \stackrel{(6.23), (6.22)}{=} \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \mathbf{i}_l \cdot \frac{\partial Z^L}{\partial X^K} \mathbf{I}_L = \delta_{lL} \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \frac{\partial Z^L}{\partial X^K}, \quad (6.52)$$

kus

$$\delta_{lL} = \delta_{Ll} = \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{I}_L. \quad (6.53)$$

Suurus δ_{lL} on Kroneckeri delta vaid juhul kui $z^k \uparrow \uparrow Z^K$.

6.5.5 Tensorite indeksite tõstmine ja langetamine

Peale vektorite indeksite saab meetriliste tensorite abil tõsta ja langetada ka tensorite indekseid, näiteks

$$\begin{aligned} C^K_L &= G^{KM} C_{ML} \\ C_L^K &= G^{KM} C_{LM} \\ C^K_L &= G_{LM} C^{KM} \\ C^{KL} &= G^{LM} C^K_M \\ g_K^k &= G_{KL} g^{kl} g^L_l \end{aligned}$$

6.5.6 Gradient

Skalaarse funktsiooni *gradient* on defineeritud järgmiselt —

$$\text{grad } T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n}^\circ, \quad (6.59)$$

kus \mathbf{n}° on normaalsihiline ühikvektor, mis on suunatud funktsiooni T kasvamise suunas. Teisest küljest —

$$\text{grad } T \stackrel{\text{def}}{=} \nabla T = \mathbf{g}^k \frac{\partial T}{\partial x^k}, \quad (6.60)$$

kus *nabla*

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = g^{kl} \mathbf{g}_l \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (6.61)$$

Valemeis (6.60) ja (6.61) peame kasutama kontravariantset baasi, sest osatuletis absoluutsest skalaarist on kovariantne vektor, st., $\partial T / \partial x^k = \Phi_k$. *

6.5.7 Deformatsioonigradient

Deformatsioonigradiendid on defineeritud järgmiselt⁶ :

$$x^k_{,K} = \frac{\partial x^k(\mathbf{X}, t)}{\partial X^K} \quad \text{jä} \quad X^K_{,k} = \frac{\partial X^K(\mathbf{x}, t)}{\partial x^k}, \quad (6.62)$$

Vastavalt liikumisseadustele avalduvad *koordinaatide diferentsiaalid* kujul

$$dx^k = x^k_{,K} dX^K \quad \text{jä} \quad dX^K = X^K_{,k} dx^k. \quad (6.63)$$

Deformatsioonigradientide vahelised seosed

$$x^k_{,K} X^K_{,l} = \delta^k_l \quad \text{jä} \quad X^K_{,k} x^k_{,L} = \delta^K_L \quad (6.64)$$

Valemite (6.21) põhjal avalduvad kohavektorite diferentsiaalid (lõpmata väikesed muudud) läbi baasivektorite \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k . Teisendame neid avaldisi:

$$\begin{cases} d\mathbf{P} = \mathbf{G}_K dX^K \stackrel{(6.63)}{=} \mathbf{G}_K X^K_{,k} dx^k = \mathbf{c}_k dx^k, \\ d\mathbf{p} = \mathbf{g}_k dx^k \stackrel{(6.63)}{=} \mathbf{g}_k x^k_{,K} dX^K = \mathbf{C}_K dX^K, \end{cases} \quad (6.65)$$

⁶Indeks peale koma tähistab siin ja edaspidi osatuletist vastava (kontravariantse) koordinaadi järgi.

Meil oli eeldatud, et $t = t_0$ puhul EK ja LK ühtivad, st., $x^1 = X^1, \dots, x^3 = X^3$. Järelikult alghetkel

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_K(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t)$$

Vaatleme avaldisi (6.65) —

$$d\mathbf{P} = \underbrace{\mathbf{G}_K dX^K}_i = \underbrace{\mathbf{c}_k dx^k}_{ii} \quad \text{jä} \quad d\mathbf{p} = \underbrace{\mathbf{g}_k dx^k}_{iii} = \underbrace{\mathbf{C}_K dX^K}_{iv}. \quad (6.71)$$

i määrab $d\mathbf{P}$ kui $t = t_0$

ii $d\mathbf{P}$ muutumise seadus EK-s

iii määrab $d\mathbf{p}$ igal ajahetkel, sest vastavalt definitsioonile (6.21) ja (6.23) ei muutu $d\mathbf{p}$ ajas

iv määrab muutumatu suuruse $d\mathbf{p}$ muutuvates koordinaatides X^K suvalisel hetkel $t \geq t_0$.

kus suurused

$$\begin{cases} \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} X^K_{,k} = \mathbf{G}_K X^K_{,k} \\ \text{jä} \\ \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} x^k_{,K} = \mathbf{g}_k x^k_{,K} \end{cases} \quad (6.66)$$

on vaadeldavad kui uued, keskkonna deformeeritud olekule vastavad, baasivektorid. Teisisõnu, *keskkonna liikumisel transformeeruvad baasivektorid \mathbf{g}_k ja \mathbf{G}_K + uuteks baasivektoriteks \mathbf{C}_K ja \mathbf{c}_k .*

Järgnevalt avaldame vana baasi \mathbf{G}_K uue baasi \mathbf{c}_k kaudu:

$$(6.66)_1 \cdot x^k_{,L} \rightarrow \dots \Rightarrow \mathbf{G}_K = \mathbf{c}_k x^k_{,K}. \quad (6.67)$$

$$(6.66)_2 \cdot X^K_{,l} \rightarrow \dots \Rightarrow \mathbf{g}_k = \mathbf{C}_K X^K_{,k}. \quad (6.68)$$

Kontravariantsed baasid saadakse ortonormaalsustingimustest

$$\mathbf{c}^k \cdot \mathbf{c}_l = \delta^k_l \quad \text{jä} \quad \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{C}_L = \delta^K_L, \quad (6.69)$$

kust

$$\mathbf{c}^k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}^K(\mathbf{X}) x^k_{,K} \quad \text{jä} \quad \mathbf{C}^K(\mathbf{X}, t) = \mathbf{g}^k(\mathbf{x}) X^K_{,k}. \quad (6.70)$$

6.6 Deformatsioonitensordid

6.6.1 Cauchy ja Greeni deformatsioonitensordid

$$\begin{cases} c_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l \stackrel{(6.66)}{=} G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l} \quad \text{jä} \\ C_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L \stackrel{(6.66)}{=} g_{kl} x^k_{,K} x^l_{,L}. \end{cases} \quad (6.72)$$

Suurust c_{kl} nimetatakse *Cauchy deformatsioonitensoriks* ja suurust C_{KL} *Greeni deformatsioonitensoriks*. Nad on sümmeetrilised ja positiivselt määratud. Tensorid c_{kl} ja C_{KL} võib interpreteerida ka kui meetrilisi tensoreid, sest meetriline tensor $G_{KL}(\mathbf{X})$ transformeerub läbi keskkonna liikumise tensoriks $c_{kl}(\mathbf{x})$ ja $g_{kl}(\mathbf{x}) \rightarrow C_{KL}(\mathbf{X})$. Kovariantsete tensorite c_{kl} ja C_{KL} indekseid saab kontravariantsete meetriliste tensoritega tõsta (\mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K omi ei saanud!). Saadud kontravariantsete tensorite maatriksid $[c^{kl}]$ ja $[C^{KL}]$ ei osutu aga kovariantsete tensorite maatriksite $[c_{kl}]$ ja $[C_{KL}]$ pöördmaatriksiteks (nagu oli g_{kl} ja G_{KL} puhul). Antud juhul tuleb sisse tuua tensorid

$$\begin{cases} {}^{-1}c^{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{c}^l \stackrel{(6.70)}{=} G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L} \quad \text{jä} \\ {}^{-1}C^{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{C}^L \stackrel{(6.70)}{=} g^{kl} X^K_{,k} X^L_{,l} \quad , \end{cases} \quad (6.73)$$

mille puhul $c_{km} \bar{c}^{ml} = \delta_k^l$ ja $C_{KM} \bar{C}^{ML} = \delta_K^L$. Tensorit \bar{c}^{1kl} nimetatakse *Fingeri* † *deformatsioonitensoriks* ja \bar{C}^{1KL} *Piola deformatsioonitensoriks*

6.6.2 Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid

Pöördume tagasi suuruste $d\mathbf{p}$ ja $d\mathbf{P}$ juurde —

$$\begin{cases} dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL} dX^K dX^L = c_{kl} dx^k dx^l, \\ ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl} dx^k dx^l = C_{KL} dX^K dX^L \end{cases}$$

Viimastest leiame *elementaarpiikkuse ruudu muudu*

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL} dX^K dX^L = 2e_{kl} dx^k dx^l, \quad (6.74)$$

kus

$$2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} \text{ ja } 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl}. \quad (6.75)$$

Tensorit $E_{KL} = E_{KL}(\mathbf{X}, t)$ nimetatakse *Lagrange'i deformatsioonitensoriks* ja tensorit $e_{kl} = e_{kl}(\mathbf{x}, t)$ *Euleri deformatsioonitensoriks*.

Siirdevektori \mathbf{u} saab avaldada nii LK kui EK kaudu —

$$\mathbf{u} = U^K \mathbf{G}_K = U_K \mathbf{G}^K = u^k \mathbf{g}_k = u_k \mathbf{g}^k, \quad (6.78)$$

kus $U^K(\mathbf{X}, t)$ ja $u^k(\mathbf{x}, t)$ on vektori \mathbf{u} kontravariantsed komponendid ning $U_K(\mathbf{X}, t)$ ja $u_k(\mathbf{x}, t)$ kovariantsed komponendid vastavalt LK-s ja EK-s.

Ka nende indekseid saab meetriliste tensorite abil tõsta ja langetada —

$$U^K = G^{KM} U_M, \quad U_L = G_{LK} U^K, \quad u^k = g^{km} u_m, \quad u_l = g_{lk} u^k.$$

$$(6.78) \rightarrow U_K \mathbf{G}^K = u_k \mathbf{g}^k \mid \cdot \mathbf{G}_L \Rightarrow \dots = \dots$$

Tähistame indeksid ümber ($L \rightarrow K$) ja saame

$$U_K = g^k_{Kk} u_k \text{ ja } u_k = g^K_{kK} U_K. \quad (6.79)$$

Definitsioonide (6.66) põhjal

$$\mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K}, \quad \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^k}.$$

Kehtivad seosed:

$$E_{KL} = e_{kl} x^k_{,K} x^l_{,L} \text{ ja } e_{kl} = E_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l} \quad (6.76)$$

Valemi (6.76)₁ kasutamise puhul tuleb avaldada $e_{kl}(\mathbf{X}, t)$ ja (6.76)₂ puhul vastupidi $E_{KL}(\mathbf{x}, t)$.

Meetriliste tensorite abil saame leida vastavaid sega- ja kontravariantseid tensorid:

$$\begin{aligned} E^K_L &= G^{KM} E_{ML}, & E^{KL} &= G^{KM} G^{LN} E_{MN} = G^{LM} E^K_M, \\ e^k_l &= g^{km} e_{ml}, & e^{kl} &= g^{km} g^{ln} e_{mn} = g^{lm} e^k_m. \end{aligned}$$

6.7 Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

6.7.1 Vektori kovariantne osatuletis

Kõigepealt püüame siirdevektori \mathbf{u} kaudu avaldada vektorid \mathbf{C}_K ja \mathbf{c}_k .

Kohavektor $\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u}$ (kui LK ja EK nullpunktid ei ühti siis $\mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{P} + \mathbf{u}$). Seega *siirdevektor*

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P}. \quad (6.77)$$

Avaldame valemist (6.77) kohavektorid \mathbf{p} ja \mathbf{P} ning asendame viimastesse avaldistesse. Saame

$$\mathbf{C}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^K} = \mathbf{G}_K + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^K}, \quad \mathbf{c}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = \mathbf{g}_k - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \quad (6.80)$$

Valemite (6.78) põhjal $\mathbf{u} = U^L \mathbf{G}_L = u^l \mathbf{g}_l$ ning (6.80) saab kuju

$$\mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + \frac{\partial}{\partial X^K} (U^L \mathbf{G}_L), \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - \frac{\partial}{\partial x^k} (u^l \mathbf{g}_l). \quad (6.81)$$

Analoogilised avaldised siirdevektori kovariantsete komponentide jaoks:

$$\mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + \frac{\partial}{\partial X^K} (U_L \mathbf{G}^L), \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - \frac{\partial}{\partial x^k} (u_l \mathbf{g}^l). \quad (6.82)$$

Järgnevalt püüame leida avaldistes (6.81) ja (6.82) olevaid osatuletisi

$$\frac{\partial}{\partial X^K} (U^L \mathbf{G}_L) = \frac{\partial U^L}{\partial X^K} \mathbf{G}_L + U^L \frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K}, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (u^l \mathbf{g}_l) = \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \mathbf{g}_l + u^l \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k}, \quad (6.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^K} (U_L \mathbf{G}^L) = \frac{\partial U_L}{\partial X^K} \mathbf{G}^L + U_L \frac{\partial \mathbf{G}^L}{\partial X^K}, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (u_l \mathbf{g}^l) = \frac{\partial u_l}{\partial x^k} \mathbf{g}^l + u_l \frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial x^k}. \quad (6.84)$$

Esimeste liidetavate leidmine pole probleemiks — see on lihtne. Teiste liidetavatega on lugu keerukam, sest osatuletisi tuleb leida baasivektoritest $\mathbf{G}_L, \dots, \mathbf{g}^l$.

Vastavalt definitsioonidele (6.22) ja (6.23)

$$\mathbf{G}_L = \frac{\partial Z^N}{\partial X^L} \mathbf{I}_N \rightarrow \mathbf{I}_N = \frac{\partial X^L}{\partial Z^N} \mathbf{G}_L, \quad \mathbf{g}_l = \frac{\partial z^n}{\partial x^l} \mathbf{i}_n \rightarrow \mathbf{i}_n = \frac{\partial x^l}{\partial z^n} \mathbf{g}_l.$$

Seega osatuletised võrrande (6.83)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K} = \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \mathbf{I}_N = \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \mathbf{G}_M, \\ \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \mathbf{i}_n = \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial z^n} \mathbf{g}_m. \end{cases} \quad (6.85)$$

Võtame kasutusele *Christoffeli teist liiki sümbolid*

$$\left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \quad \text{ja} \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial z^n}. \quad (6.86)$$

Valemid (6.85) saavad nüüd kuju

$$\frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K} = \left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} \mathbf{G}_M \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k} = \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} \mathbf{g}_m. \quad (6.87)$$

analoogiliselt saab näidata, et

$$\frac{\partial \mathbf{G}^L}{\partial X^K} = - \left\{ \begin{matrix} L \\ KM \end{matrix} \right\} \mathbf{G}^M \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial x^k} = - \left\{ \begin{matrix} l \\ km \end{matrix} \right\} \mathbf{g}^m. \quad (6.88)$$

indeksite K ja L (k ja l) suhtes:

$$\left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} M \\ LK \end{matrix} \right\}, \quad [KL, M] = [LK, M], \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \\ lk \end{matrix} \right\}, \quad [kl, m] = [lk, m]. \quad (6.91)$$

NB! *Christoffeli sümbolid pole tensorid!*

Tuleme tagasi valemite (6.83) ja (6.84) juurde ning esitame nad kujul

$$\frac{\partial}{\partial X^K} (U^L \mathbf{G}_L) = U^M{}_{;K} \mathbf{G}_M, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (u^l \mathbf{g}_l) = u^m{}_{;k} \mathbf{g}_m, \quad (6.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^K} (U_L \mathbf{G}^L) = U_{M;K} \mathbf{G}^M, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (u_l \mathbf{g}^l) = u_{m;k} \mathbf{g}^m, \quad (6.93)$$

Siin

$$U^M{}_{;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U^M}{\partial X^K} + \left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} U^L, \quad u^m{}_{;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} u^l \quad (6.94)$$

on *kontravariantsete vektorite kovariantsed osatuletised* ning

$$U_{M;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U_M}{\partial X^K} - \left\{ \begin{matrix} L \\ MK \end{matrix} \right\} U_L, \quad u_{m;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_m}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} l \\ mk \end{matrix} \right\} u_l \quad (6.95)$$

on *kovariantsete vektorite kovariantsed osatuletised*.

Christoffeli esimest liiki sümbolid on defineeritavad kahel moel.

i) Läbi Christoffeli teist liiki sümbolite

$$\begin{cases} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} G_{MN} \left\{ \begin{matrix} N \\ KL \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} = G^{MN} [KL, N], \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} g_{mn} \left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} = g^{mn} [kl, n]. \end{cases} \quad (6.89)$$

ii) Arvestades meetriliste tensorite definitsioone (6.26) ja (6.30),

$$G_{KL} = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L = \delta_{MN} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \frac{\partial Z^N}{\partial X^L}, \quad g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l = \delta_{mn} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^n}{\partial x^l},$$

saame

$$\begin{cases} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{KM}}{\partial X^L} + \frac{\partial G_{LM}}{\partial X^K} - \frac{\partial G_{KL}}{\partial X^M} \right), \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \end{cases} \quad (6.90)$$

Väga tihti defineeritaksegi Christoffeli esimest liiki sümbolid kujul (6.90).

Valemeist (6.86) ja (6.90) järeldub, et Christoffeli sümbolid on sümmeetrilised

Suurused $U^M{}_{;K}$ ja $u^m{}_{;k}$ on segatensordid ning $U_{M;K}$ ja $u_{m;k}$ kovariantsed tensorid. •

Meetriliste tensoritega saab teostada üleminekuid (6.94) \rightarrow (6.95) ja vastupidi:

$$\begin{cases} U^L{}_{;K} = G^{LM} U_{M;K} & U_{L;K} = G_{LM} U^M{}_{;K} \\ u^l{}_{;k} = g^{lm} u_{m;k} & u_{l;k} = g_{lm} u^m{}_{;k} \end{cases}$$

Kovariantse osatuletise geomeetriline interpretatsioon. Kovariantse osatuletise avaldised (6.94) ja (6.95) koosnevad kahest osast. Neist esimene iseloomustab vektori \mathbf{u} muutumist kui muutub koordinaat X^K (või x^k) ning teine \mathbf{u} muutumist kui seoses X^K (või x^k) muutumisega muutub baas \mathbf{G}_M (või \mathbf{g}_m).

Sirgjooneliste koordinaatide puhul on Christoffeli sümbolid samaselt nullid ja see-ga kovariantne osatuletis on võrdne "hariliku" osatuletisega. *

Pöördume nüüd tagasi uute baasivektorite \mathbf{C}_K ja \mathbf{c}_k avaldiste (6.81) ja (6.82) juurde. Arvestades avaldise (6.92) ja (6.93) saame

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + U^M{}_{;K} \mathbf{G}_M, \\ \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - u^m{}_{;k} \mathbf{g}_m, \end{cases} \quad (6.96)$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + U_{M;K} \mathbf{G}^M, \\ \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - u_{m;k} \mathbf{g}^m. \end{cases} \quad (6.97)$$

Avaldame nüüd Greeni ja Cauchy deformatsioonitensorid läbi siirete võttes arvesse valemeid (6.96) —

$$C_{KL} = \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L \stackrel{(6.96)}{=} \dots$$

=

=

Kokku saame

$$\begin{cases} C_{KL} = G_{KL} + U_{K;L} + U_{L;K} + U_{N;K}U^N{}_{;L}, \\ c_{kl} = g_{kl} - u_{k;l} - u_{l;k} + u_{n;k}u^n{}_{;l}. \end{cases} \quad (6.98)$$

Arvestades Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorite definitsioone (6.75) saame omakorda

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K} + U_{M;K}U^M{}_{;L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{k;l} + u_{l;k} - u_{m;k}u^m{}_{;l}. \end{cases} \quad (6.99)$$

Need võrrandid on PKM ühed põhivõrrandid, mis seovad omavahel Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid ning materiaalsete punktide siirded \mathbf{u} .

- meetriline tensor

$$g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \Rightarrow g_{kl} = 0 \text{ kui } k \neq l; \quad (6.103)$$

- elementaarpiikkuse ruut

$$ds^2 = g_{kl}dx^k dx^l = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2; \quad (6.104)$$

- determinant

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}; \quad (6.105)$$

- kontravariantne meetriline tensor †

$$g^{k\ k} = 1/g_{k\ k}; \quad (6.106)$$

- kontravariantne baas

$$\mathbf{g}^k = g^{k\ k} \mathbf{g}_k, \quad k = \underline{k}; \quad (6.107)$$

- Christoffeli teist liiki sümboolid ‡

Sirgjooneliste koordinaatide puhul $U_{M;K} \equiv U_{M,K}$ jne.

DRK puhul lisaks eelnevale $U^M{}_{;L} \equiv U_{M,K}$ jne. ning võrrandid (6.99) saavad kuju

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L;K} + U_{K;L} + U_{M;K}U_{M;L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{l;k} + u_{k;l} - u_{m;k}u_{m;l}. \end{cases} \quad (6.100)$$

Avaldame kohavektorite \mathbf{P} ja \mathbf{p} lõpmata väikesed muudud $d\mathbf{P}$ ja $d\mathbf{p}$ läbi siirete. Valemite (6.65) põhjal

$$d\mathbf{P} = \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t)dx^k \text{ ja } d\mathbf{p} = \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t)dX^K.$$

Asendades siia \mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K valemeist (6.96) ja (6.97) saame

$$d\mathbf{P} = (\mathbf{g}_k - u^m{}_{;k}\mathbf{g}_m)dx^k, \quad d\mathbf{p} = (\mathbf{G}_K + U^M{}_{;K}\mathbf{G}_M)dX^K, \quad (6.101)$$

$$d\mathbf{P} = (\mathbf{g}_k - u_{m;k}\mathbf{g}^m)dx^k, \quad d\mathbf{p} = (\mathbf{G}_K + U_{M;K}\mathbf{G}^M)dX^K. \quad (6.102)$$

Märkused:

1. Ortogonaalse kõverjoonelise koordinaatsüsteemi puhul lihtsustuvad mõned avaldised tunduvalt:

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ \underline{k} \ \underline{k} \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{\underline{l}\ \underline{l}}} \frac{\partial g_{\underline{k} \ \underline{k}}}{\partial x^l}, \quad l \neq \underline{k}; \quad (6.108)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k} \ l \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^l} \ln \sqrt{g_{\underline{k} \ \underline{k}}}, \quad l \neq \underline{k}; \quad (6.109)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k} \ \underline{k} \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^{\underline{k}}} \ln \sqrt{g_{\underline{k} \ \underline{k}}}; \quad (6.110)$$

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ lm \end{matrix} \right\} = 0, \quad l \neq k \neq m. \quad (6.111)$$

2. Alghetkel $t = t_0$ toome sisse Lagrange'i koordinaadid (mis võivad kuid ei pruugi ühtida Euleri koordinaatidega). Sel hetkel loeme keskkonna deformatsioonid ja siirded nulliks ning ütleme, et keskkond on *loomulikult olekus*.
3. Siirete ja deformatsioonide määramiseks hetkel $t = t_1$ on vaja teada liikumisseadust, st., ajast kui parameetrist sõltuvat koordinaatteisendust. Kui meid ei huvita kuidas deformatsioon toimus, siis piisab tegelikult sellest kui me teame liikumisseadust esitavat koordinaatteisendust vaid kahel ajahetkel: $t = t_0$ ja $t = t_1$.
4. Suurusi $u_{l;k}$, $u^m{}_{;l}$ jne. nimetatakse *siirdegradientideks*.

6.8 Vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid

Vektorite ja tensoritega opereerides ei pöörata tavaliselt tähelepanu dimensioonile — erinevad komponendid on sageli erineva dimensiooniga (näiteks silindrilised koordinaadid). Et sellest füüsikaliselt vastuvõtmatus olukorrast puhtalt välja tulla, tuuakse sisse vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid. Teatavasti pole baasivektorid kõverjoonelise koordinaatsüsteemi puhul üldjuhul ühikvektorid ja valemite (6.41) põhjal on nende pikkused määratud meetrilise tensori diagonaalelementidega

$$|\mathbf{g}_k| = \sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}}} \quad \text{ja} \quad |\mathbf{g}^k| = \sqrt{g^{\underline{k}\underline{k}}} \quad \text{kui} \quad k = \underline{k}. \quad (6.112)$$

Defineerime ühikvektorid

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{g}_k}{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}}}} \quad \text{ja} \quad \mathbf{e}^k = \frac{\mathbf{g}^k}{\sqrt{g^{\underline{k}\underline{k}}}}, \quad k = \underline{k}. \quad (6.113)$$

Nüüd

$$\mathbf{u} = u^k \mathbf{g}_k = u^{(k)} \mathbf{e}_k = u_k \mathbf{g}^k = u_{(k)} \mathbf{e}^k, \quad (6.114)$$

kus $u^{(k)}$ ja $u_{(k)}$ on vektori \mathbf{u} *kontra- ja kovariantsed füüsikalised komponendid*. Valemite (6.113) ja (6.114) põhjal vektori füüsikalised komponendid

$$u^{(k)} = u^k \sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}}} \quad \text{ja} \quad u_{(k)} = u_k \sqrt{g^{\underline{k}\underline{k}}}. \quad (6.115)$$

6.9 Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

6.9.1 Lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid

Hüljates kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed, saame *lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid*⁷

$$\begin{cases} 2\tilde{E}_{KL} = 2\tilde{E}_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L;K} + U_{K;L}, \\ 2\tilde{e}_{kl} = 2\tilde{e}_{lk} = c_{kl} - g_{kl} = u_{l;k} + u_{k;l}. \end{cases} \quad (6.118)$$

Selliseid deformatsioonitensoreid kasutatakse klassikalises lineaarses teoorias.

6.9.2 Pöördetensorid ja pöördevektorid

$$\tilde{R}_{KL} = \frac{1}{2}(U_{K;L} - U_{L;K}) \quad \text{ja} \quad \tilde{r}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k;l} - u_{l;k}). \quad (6.119)$$

Viimased on *klassikalise lineaarse teooria pöördetensorid*. On selge, et tegu on kaldsümmeetriliste tensoritega, st., $\tilde{R}_{KL} = -\tilde{R}_{LK}$ ja $\tilde{r}_{kl} = -\tilde{r}_{lk}$. Pöördetensorite indekseid saab meetriliste tensoritega tõsta ja langetada.

⁷Neid nimetatakse ka lihtsalt väikeste deformatsioonide tensoriteks “unustades” sõna *lõpmata* lisamata.

Ortogonaalse baasi puhul $g_{\underline{k}\underline{k}} = 1/g^{\underline{k}\underline{k}}$, järelikult on kovariantne füüsikaline komponent leitav kovariantse meetrilise tensori abil:

$$u_{(k)} = \frac{u_k}{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}}}}. \quad (6.116)$$

analoogiliselt saab defineerida tensorite füüsikalised komponendid. Näiteks ortogonaalse baasi puhul

$$t^{(k)}_{(l)} = t^k_l \sqrt{\frac{g_{\underline{k}\underline{k}}}{g_{\underline{l}\underline{l}}}} \dots \quad (6.117)$$

Märkused

1. Tavaliselt lahendatakse ülesanded ko- ja kontravariantsetes tensorites ning lõpus minnakse üle füüsikalistele komponentidele.

2. DRK puhul $\mathbf{g}_k \equiv \mathbf{g}^k \equiv \mathbf{e}_k \equiv \mathbf{e}^k$.

Näide 6.8.1. *Leida ühikbaas ja siirdevektori füüsikalised komponendid silindriliste koordinaatide jaoks*

Järgnevalt toome sisse Lagrange'i ja Euleri *lineaarsed pöördevektorid* $\tilde{\mathbf{R}}^K$ ja $\tilde{\mathbf{r}}^k$:

$$\tilde{\mathbf{R}}^K = \frac{1}{2}\epsilon^{KLM}\tilde{R}_{ML}, \quad \text{ja} \quad \tilde{\mathbf{r}}^k = \frac{1}{2}\epsilon^{klm}\tilde{r}_{ml}, \quad (6.120)$$

kus ϵ^{KLM} ja ϵ^{klm} on *permutatsioonisümbolid*.

Permutatsioonisümbolid⁸

$$\begin{cases} \epsilon^{klm} = \frac{e^{klm}}{\sqrt{g}}, \\ \epsilon_{klm} = e_{klm}\sqrt{g}, \quad g = |g_{kl}|, \end{cases} \quad (6.121)$$

kus⁹

$$e^{klm}, e_{klm} = \begin{cases} 1 & \text{kui } klm \text{ on } 123 \text{ paaris permutatsioon,} \\ -1 & \text{kui } klm \text{ on } 123 \text{ paaritu permutatsioon,} \\ 0 & \text{muudel juhtudel.} \end{cases} \quad (6.122)$$

⁸Tuud ka kui Levi-Civita tensor või Levi-Civita permutatsioonitensor.

I.k. on kasutusel ka nimetused *Levi-Civita symbol, permutation symbol, antisymmetric symbol, alternating symbol*. Tullio Levi-Civita (29. 03. 1873 – 29. 12. 1941) oli Itaalia matemaatik.

⁹Vt. ka 2. ptk. lk. 13

Näide 6.9.1. Avaldame pöördevektorid $\tilde{\mathbf{r}}^1, \tilde{\mathbf{r}}^2$ ja $\tilde{\mathbf{r}}^3$ siirdegradientide kaudu. Valemite (6.120) ja (6.121) põhjal

$$\tilde{\mathbf{r}}^k = \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{klm} \tilde{r}_{ml},$$

Seega

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{r}}^1 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [\dots\dots\dots + \dots\dots] = \dots\dots \\ \frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{3;2} - u_{2;3}) \\ \tilde{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [\dots\dots\dots + \dots\dots] = \dots\dots \\ \frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{1;3} - u_{3;1}) \\ \tilde{\mathbf{r}}^3 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [\dots\dots\dots + \dots\dots] = \dots\dots \\ \frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{2;1} - u_{1;2}) \end{array} \right. \quad (6.123)$$

Lagrange'i koordinaadid. Pikenemiskoeffitsendid ja suhteline pikenemine koordinaatkõvera X^K puutuja sihis (\mathbf{N} on koordinaatkõvera X^K puutuja sihis):

$$\Lambda_{(K)} = \sqrt{\frac{C_{\underline{K}\underline{K}}}{G_{\underline{K}\underline{K}}}} = \sqrt{1 + \frac{2E_{\underline{K}\underline{K}}}{G_{\underline{K}\underline{K}}}}, \quad E_{(K)} = \sqrt{1 + \frac{2E_{\underline{K}\underline{K}}}{G_{\underline{K}\underline{K}}}} - 1. \quad (6.126)$$

Et anda füüsikalist tõlgendust deformatsioonitensorite komponentidele, esitatakse viimased valemid sageli kujul

$$\frac{C_{\underline{K}\underline{K}}}{G_{\underline{K}\underline{K}}} = \Lambda_{(K)}^2, \quad \frac{2E_{\underline{K}\underline{K}}}{G_{\underline{K}\underline{K}}} = \Lambda_{(K)}^2 - 1 = (1 + E_{(K)})^2 - 1. \quad (6.127)$$

Euleri koordinaadid. Lähtudes avaldistest (6.124)₂ saame tuletada analoogilised valemid EK jaoks —

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{(k)} = \sqrt{\frac{g_{\underline{k}\underline{k}}}{c_{\underline{k}\underline{k}}}} = \left(1 - \frac{2e_{\underline{k}\underline{k}}}{g_{\underline{k}\underline{k}}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad e_{(k)} = \left(1 - \frac{2e_{\underline{k}\underline{k}}}{g_{\underline{k}\underline{k}}}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1, \\ \frac{c_{\underline{k}\underline{k}}}{g_{\underline{k}\underline{k}}} = \lambda_{(k)}^{-2}, \quad \frac{2e_{\underline{k}\underline{k}}}{g_{\underline{k}\underline{k}}} = 1 - \lambda_{(k)}^{-2} = 1 - (1 + e_{(k)})^{-2} \end{array} \right. \quad (6.128)$$

6.10 Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensorite geomeetriline tõlgendus

6.10.1 Pikenemine, pikenemiskoeffitsendid ja suhteline pikenemine

Pikenemiskoeffitsient suunas \mathbf{N} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{dS^2}} = \sqrt{\frac{C_{KL}dX^KdX^L}{dS^2}} = \sqrt{C_{KL}N^KN^L}, \\ \lambda_{(\mathbf{n})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{dS^2}} = \sqrt{\frac{ds^2}{c_{kl}dx^kdx^l}} = \frac{1}{\sqrt{c_{kl}n^kn^l}}. \end{array} \right. \quad (6.124)$$

Füüsikaliselt on suurused $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ ja $\lambda_{(\mathbf{n})}$ samad — esimene on vaid esitatud LK-s, teine EK-s.

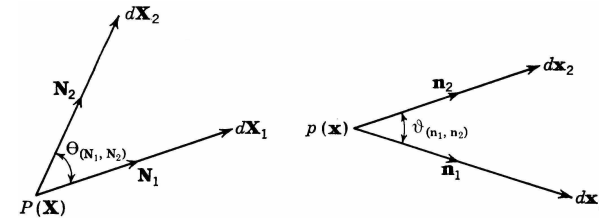
*Suhteline pikenemine*¹⁰ (suunas \mathbf{N}) esitatakse kujul

$$E_{(\mathbf{N})} = e_{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1 \equiv \lambda_{(\mathbf{n})} - 1. \quad (6.125)$$

¹⁰I.k. *extension*

6.10.2 Nurga muutus ja nihkedeformatsioon

Vaatleme kahte lõpmata väikest vektorit $d\mathbf{X}_1$ ja $d\mathbf{X}_2$, mille vaheline nurk on $\Theta \equiv \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}$ ja mis deformeeruvad vektoriteks $d\mathbf{x}_1$ ja $d\mathbf{x}_2$, mille vaheline nurk on $\vartheta \equiv \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}$.



Joonis 6.10: Nurga muutus

Nurkade koosinused

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} \stackrel{(6.21)}{=} \frac{G_{KL}dX_1^KdX_2^L}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} = G_{KL}N_1^KN_2^L \quad (6.129)$$

ja

†

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_1| |d\mathbf{x}_2|} \stackrel{(6.65)}{=} \frac{C_{KL} dX_1^K dX_2^L}{\sqrt{C_{MN} dX_1^M dX_1^N} \sqrt{C_{RS} dX_2^R dX_2^S}} = \dots \\ &\dots \stackrel{(6.124)}{=} \frac{C_{KL} N_1^K N_2^L}{\Lambda_{(\mathbf{N}_1)} \Lambda_{(\mathbf{N}_2)}} \stackrel{\text{tähistame}}{=} H. \end{aligned} \quad (6.130)$$

Nihe ehk nihkedeformatsioon ehk nihkenurk vektoritega \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_2 määratud pinnal on defineeritud kui algse nurga Θ muut —

$$\Gamma_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)} = \gamma_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} = \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)} - \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}. \quad (6.131)$$

Võtame viimase avaldise vasakust ja paremast pooldest siinuse

$$\begin{aligned} \sin \Gamma &= \sin(\Theta - \vartheta) = \dots \\ &\dots \stackrel{(6.130)}{=} H \sin \Theta - \sqrt{1 - H^2} \cos \Theta. \end{aligned} \quad (6.132)$$

EK-s saavad viimased valemid kuju

$$\begin{cases} \cos \vartheta_{(kl)} = \frac{g_{kl}}{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}} g_{\underline{l}\underline{l}}}}, \\ \cos \Theta_{(kl)} = \frac{c_{kl}}{\sqrt{c_{\underline{k}\underline{k}} c_{\underline{l}\underline{l}}}} = \frac{g_{kl} - 2e_{kl}}{\sqrt{(g_{\underline{k}\underline{k}} - 2e_{\underline{k}\underline{k}})(g_{\underline{l}\underline{l}} - 2e_{\underline{l}\underline{l}})}}. \end{cases} \quad (6.136)$$

Kuna LK ja EK on valitavad sõltumatult, siis üldjuhul ei õnnestu siduda nihkeid $\Gamma_{(KL)}$ ja $\gamma_{(kl)}$. Nurkadele $\Theta_{(KL)} = \pi/2$ ja $\vartheta_{(kl)} = \pi/2$ vastavad nihked on määratud järgmiselt:

$$\begin{cases} \sin \Gamma_{(KL)} = \frac{1}{\Lambda_{(K)} \Lambda_{(L)}} \frac{C_{KL}}{\sqrt{G_{\underline{K}\underline{K}} G_{\underline{L}\underline{L}}}}, \\ \sin \gamma_{(kl)} = -\lambda_{(k)} \lambda_{(l)} \frac{c_{kl}}{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}} g_{\underline{l}\underline{l}}}}. \end{cases} \quad (6.137)$$

Kui X^K on DRK, siis ...

Kui $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_2$, siis saame viimasest, et

$$\sin \Gamma = H \stackrel{(6.130)}{=} \frac{C_{KL} N_1^K N_2^L}{\Lambda_{(\mathbf{N}_1)} \Lambda_{(\mathbf{N}_2)}}. \quad (6.133)$$

Seega, kaks algselt ristuvat vektorit jäävad ka peale deformatsiooni risti parajasti siis kui

$$C_{KL} dX_1^K dX_2^L = 0. \quad (6.134)$$

Kui valida suunad \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_2 piki koordinaatkõverate X^K puutujaid, siis saab nurgamuutuste hindamiseks kasutada baasivektoreid \mathbf{G}_K ja \mathbf{C}_K (kuigi nad pole ühikvektorid) —

$$\begin{cases} \cos \Theta_{(KL)} = \frac{G_{KL}}{\sqrt{G_{\underline{K}\underline{K}} G_{\underline{L}\underline{L}}}}, \\ \cos \vartheta_{(KL)} = \frac{C_{KL}}{\sqrt{C_{\underline{K}\underline{K}} C_{\underline{L}\underline{L}}}} = \frac{G_{KL} + 2E_{KL}}{\sqrt{(G_{\underline{K}\underline{K}} + 2E_{\underline{K}\underline{K}})(G_{\underline{L}\underline{L}} + 2E_{\underline{L}\underline{L}})}}. \end{cases} \quad (6.135)$$

6.11 Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

Tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$(C^K{}_L - C\delta^K{}_L) N^L = 0. \quad (6.138)$$

Viimasel eksisteerib mittetriviaalne lahend juhul kui tema *karakteristlik determinant* on null, st.,

$$|C^K{}_L - C\delta^K{}_L| = 0. \quad (6.139)$$

Selle determinandi arendamise tulemusena saadakse *karakteristlik võrrand* (mis kujutab endast kuupvõrrandit)

$$-C^3 + I_C C^2 - II_C C + III_C = 0 \quad (6.140)$$

tundmatu C määramiseks. Kogu protseduur on tegelikult analoogiline DKR korral käsitletule.

Invariantide III_C ja III_c geomeetiline tõlgendus. Maatriksite teooriast on teada, et determinant maatriksite korrutisest on võrdne korrutatavate maatriksite

determinantide korrutisega, st., $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Meil

$$C^K{}_L = G^{KM} C_{ML} \stackrel{(6.72)}{=} G^{KM} g_{kl} x^k{}_{,M} x^l{}_{,L}. \quad (6.141)$$

Invariandi III_C definitsiooni põhjal

$$\text{III}_C = |C^K{}_L| \stackrel{(6.141)}{=} |G^{RS}| |g_{mn}| |x^k{}_{,K}|^2 = \frac{g}{G} j^2 = J^2, \quad (6.142)$$

kus J on teisenduse $z^k = z^k(Z^K, t)$ jakobiaan fikseeritud ajahetkel t ja mis on leitav järgmiselt:

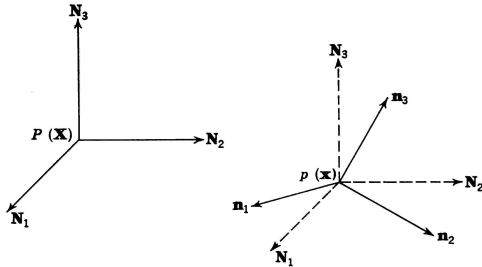
$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \right| \left| \frac{\partial x^m}{\partial X^N} \right| \left| \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right| = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} j. \quad (6.143)$$

Vaatleme peatelgede sihilisi joonelemente ds_α ja dS_α . Elementaarruumalad $d\mathcal{V} = dS_1 dS_2 dS_3$ ja $dv = ds_1 ds_2 ds_3$. Kuna

$$\frac{ds_\alpha}{dS_\alpha} = \Lambda_\alpha = \lambda_\alpha,$$

siis

$$\frac{dv}{d\mathcal{V}} = \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{dS_1 dS_2 dS_3} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \sqrt{\text{III}_C} \stackrel{(6.142)}{=} J.$$



Joonis 6.11: Peatelgede siire koos pöördega

Siin $\overset{-1}{\mathbf{R}}$ on tensori \mathbf{R} pöördtensor (duaalne tensor): \mathbf{R} pöörab $\mathbf{N}_\alpha \rightarrow \mathbf{n}_\alpha$ ja vastupidi — $\overset{-1}{\mathbf{R}}$ pöörab $\mathbf{n}_\alpha \rightarrow \mathbf{N}_\alpha$ tagasi. Tensor

$$R^k{}_K = R^k{}_m g^m{}_K = R^L{}_K g^k{}_L \quad (6.146)$$

esitab siiret $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$ koos järgneva pöördega.

Defineerime nüüd vektorite kolmikud \mathbf{N}^α ja \mathbf{n}^α —

$$N^\alpha{}_K N^L{}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \delta^L{}_K, \quad n^\alpha{}_k n^l{}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \delta^l{}_k, \quad (6.147)$$

Seega

$$dv = \sqrt{\text{III}_C} d\mathcal{V} \quad \text{ja} \quad d\mathcal{V} = \sqrt{\text{III}_c} dv. \quad (6.144)$$

Kokkuvõttes — *invariandid III_C ja III_c iseloomustavad ruumala muutust.*

6.12 Pöörde põhiteoreem

Fikseeritud kiu lokaalse pöörde määramiseks toome sisse pöördetensori. Olgu vektorid \mathbf{N}_α peatelgede sihilised ortogonaalsed ühikvektorid \mathbf{X} -s. Peale deformatsiooni on see kolmik pööratud ortogonaalseks kolmikuks \mathbf{n}_α koordinaatides \mathbf{x} . Kui vahetada (siirata) kolmik \mathbf{N}_α ruumipunkti $p(\mathbf{x})$ siis saab defineerida ühese ortogonaalse tensori \mathbf{R} , mida nimetatakse *pöördetensoriks* ja mis pöörab vahetatud \checkmark kolmiku \mathbf{N}_α kolmikuks \mathbf{n}_α .

$$\begin{cases} n^k{}_\alpha = R^k{}_m g^m{}_K N^K{}_\alpha = g^k{}_L R^L{}_K N^K{}_\alpha = R^k{}_K N^K{}_\alpha \\ N^K{}_\alpha = g^K{}_m \overset{-1}{R}{}^m{}_k n^k{}_\alpha = \overset{-1}{R}{}^K{}_L g^L{}_k n^k{}_\alpha = \overset{-1}{R}{}^K{}_k n^k{}_\alpha \end{cases} \quad (6.145)$$

st., (vektorite) kolmikud \mathbf{N}^α ja \mathbf{n}^α ning \mathbf{N}_α ja \mathbf{n}_α teineteise pöördkolmikud¹¹. Maatrikskirjaviisis tähendaks eelnev seda, et $[N^\alpha{}_K][N^L{}_\alpha] = \mathbf{I}$, kus \mathbf{I} on ühikmaatriks. Korrutame avaldise (6.145) vastavalt vektoritega $N^\alpha{}_L$ ja $n^\alpha{}_l$. Arvestades definitsioone (6.147) saame pöördetensorite määramiseks valemid

$$R^k{}_K = n^k{}_\alpha N^\alpha{}_K \quad \text{ja} \quad \overset{-1}{R}{}^K{}_k = N^K{}_\alpha n^\alpha{}_k. \quad (6.148)$$

Pöördeta deformatsiooni (deformatsiooni, kus peateljed ei pöördu) puhul, seega

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \text{ehk} \quad R^k{}_l = \delta^k{}_l; \quad R^k{}_K = g^k{}_K; \dots \quad (6.149)$$

Toupin (1956) tõestas, et

1. Greeni ja Cauchy deformatsioonitensorite n -ndad astmed on seotud \checkmark järgmiselt

$$\overset{-n}{C}{}^K{}_L = \overset{-1}{R}{}^K{}_k \overset{n}{c}{}^k{}_l R^l{}_L, \quad \overset{-n}{c}{}^k{}_l = R^k{}_K \overset{n}{C}{}^K{}_L \overset{-1}{R}{}^L{}_l \quad (6.150)$$

ning lisaks veel, et

$$\overset{-n}{C}{}^K{}_L = \sum_{\alpha} (C_\alpha)^{-n} N^K{}_\alpha N^\alpha{}_L. \quad (6.151)$$

¹¹I.k. *reciprocal triads*

2. Deformatsioonigradiendid avalduvad kujul

$$x^k_{,K} = R^k_L \tilde{C}^L_K = R^l_K \tilde{c}^k_l, \quad X^K_{,k} = \tilde{R}^K_l \tilde{c}^l_k = \tilde{R}^L_k \tilde{C}^K_L. \quad (6.152)$$

Viimastest omakorda

$$R^k_K = x^k_{,L} \tilde{C}^L_K \quad \text{ja} \quad \tilde{R}^K_k = X^K_{,l} \tilde{c}^l_k. \quad (6.153)$$

Saab näidata, et teiselt poolt $x^k_{,K} = g^{kl} g^L_l (G_{KL} + U_{L;K})$, kust $U_{L;K} = g_{kl} g^l_L x^k_{,K} - G_{KL}$. Arvestades nüüd (6.152)₁, saame, et

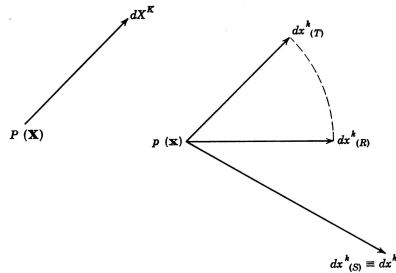
$$U_{L;M} = R_{KL} \tilde{C}^L_M - G_{KM} = R_K^L \tilde{C}^L_{LM} - G_{KM}. \quad (6.154)$$

Lisaks eelnenule saab tõestada seosed tensorite $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ ja \mathbf{R} vahel —

$$R_{KM} = \left(G_{KL} + \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \right) \tilde{C}^L_M. \quad (6.155)$$

Väikeste deformatsioonigradiendid puhul saame viimasest

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - G_{KM}, \quad (6.156)$$



Joonis 6.12: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon

3. Läbi peatelgede pikkuste muutmise¹⁴ muudetakse vektor $d\mathbf{x}_{(R)}$ vektoriks $d\mathbf{x}_{(S)} = d\mathbf{x}$. Täiendavat pööret ei toimu siin siis ja ainult siis kui $d\mathbf{X}$ on paralleelne ühega tensori C_{KL} peavektoritest.

Valemities on eelnev esitatav kujul

$$dx^k_{(T)} = g^k_K dX^K, \quad dx^k_{(R)} = R^k_l dx^l_{(T)}, \quad dx^k = \tilde{c}^k_l dx^l_{(R)}. \quad (6.159)$$

¹⁴I.k. *stretch*

ning arvestades (6.154) analoogi EK jaoks, et

$$\tilde{R}_{KM} \approx g^k_K g^m_M \tilde{r}_{km}. \quad (6.157)$$

Pöörde põhiteoreem: Iga joonelemendi deformatsiooni mingis punktis võib vaadelda koosnevana kolmest osast — 1) paralleellusest, 2) peatelgede jäigast pöördest ja 3) pikkuse muutust peatelgede sihis.

Vaatleme vektorit dX^K \mathbf{X} -s, mis läheb deformatsiooni käigus vektoriks $dx^k = x^k_{,K} dX^K$. Kasutades seoseid (6.152)₁ saame

$$dx^k = g^k_L R^L_M \tilde{C}^M_K dX^K = \tilde{c}^k_l R^l_m g^m_K dX^K. \quad (6.158)$$

Avaldisele (6.158) saab anda järgmise tõlgenduse (joonis 6.12).

1. Vektori $d\mathbf{X}$ lüke¹² (koos peatelgedega) vektoriks $d\mathbf{x}_{(T)}$.
2. Vektori $d\mathbf{x}_{(T)}$ jäik pööre¹³ (koos peatelgedega) vektoriks $d\mathbf{x}_{(R)}$.

¹²I.k. *translation*

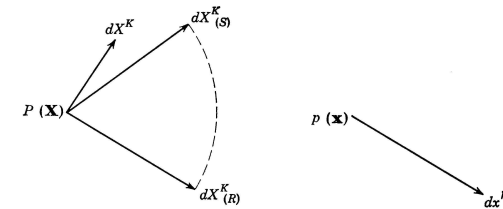
¹³I.k. *rotation*

Kui asendame (6.159)₁ → (6.159)₂ → (6.159)₃, siis saame (6.158), mis tõestabki teoreemi.

Joonis 6.13 esitab sama protsessi teises järjekorras: pikenemine, pööre, lüke, st.,

$$dX^M_{(S)} = \tilde{C}^M_K dX^K, \quad dX^L_{(T)} = R^L_M dX^M_{(S)}, \quad dx^k = g^k_L dX^L_{(R)}. \quad (6.160)$$

Seega sellise dekompositsiooni puhul pole operatsioonide järjekord tähtis.



Joonis 6.13: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon

6.13 Kiõrus ja kiõrendus

6.13.1 Materiaalne tuletis

Materiaalne tuletis vektorist. *Materiaalseks tuletiseks vektorist (aja jãrgi)* nimetatakse operatsiooni

$$\dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{\mathbf{x}=\text{const}}. \quad (6.161)$$

Kui vektorfunktsiooni \mathbf{f} argumentideks on LK, siis langevad materiaalne tuletis ja osatuletis aja jãrgi kokku:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (6.162)$$

Nãide: Nii leitakse materiaalselt tuletist liikumisseadusest. ✓

Tensorite kovariantset osatuletised. Enne kui saab asuda materiaalselt tuletiste leidmisele tensoritest tuleb sisse tuua tensorite kovariantset osatuletised. Need on defineeritud analoogiliselt vektorite kovariantsete osatuletistega (vt. lk. 43) —

$$f^{kl}{}_{;m} = f^{kl}{}_{,m} + f^{nl} \left\{ \begin{matrix} k \\ nm \end{matrix} \right\} + f^{kn} \left\{ \begin{matrix} l \\ nm \end{matrix} \right\} \quad (6.166)$$

on *kontravariantse tensori kovariantne osatuletis*. Analoogiliselt saab defineerida *kovariantse osatuletise segatensorist*

$$f^k{}_{l;m} = f^k{}_{l,m} + f^n{}_l \left\{ \begin{matrix} k \\ mn \end{matrix} \right\} - f^{kn} \left\{ \begin{matrix} n \\ lm \end{matrix} \right\} \quad (6.167)$$

ja *kovariantse osatuletise kovariantsest tensorist*

$$f_{kl;m} = f_{kl,m} - f_{nl} \left\{ \begin{matrix} n \\ km \end{matrix} \right\} - f_{kn} \left\{ \begin{matrix} n \\ lm \end{matrix} \right\}. \quad (6.168)$$

Keerukam on lugu siis, kui \mathbf{f} on avaldatud EK-s. Vaatleme vektorfunktsiooni $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f^k \mathbf{g}_k = f_k \mathbf{g}^k$. Nõõd

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f^k \mathbf{g}_k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f^k \mathbf{g}_k) \dot{x}^l, \\ \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f_k \mathbf{g}^k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f_k \mathbf{g}^k) \dot{x}^l. \end{cases} \quad (6.163)$$

kuna baasivektorid \mathbf{g}_k ja \mathbf{g}^k on ajast sõltumatud, saavad valemid (6.163) kuju

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{Df^k}{Dt} \mathbf{g}_k = \frac{Df_k}{Dt} \mathbf{g}^k, \quad (6.164)$$

kus suurusi

$$\frac{Df^k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f^k}{\partial t} + f^{k;l} \dot{x}^l \quad \text{ja} \quad \frac{Df_k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_k}{\partial t} + f_{k;l} \dot{x}^l \quad (6.165)$$

nimetatakse *materiaalseks tuletiseks vastavalt vektori kontravariantsest ja kovariantsest komponendist*. ✓

Materiaalne tuletis tensoritest. *Materiaalne tuletis tensorite kontravariantsetest, kovariantsetest ja segakomponentidest* on defineeritud jãrgmiselt —

$$\begin{cases} \frac{Df^{kl}}{Dt} = \frac{\partial f^{kl}}{\partial t} + f^{kl}{}_{;m} \dot{x}^m \\ \frac{Df_{kl}}{Dt} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial t} + f_{kl;m} \dot{x}^m \\ \frac{Df^k{}_l}{Dt} = \frac{\partial f^k{}_l}{\partial t} + f^k{}_{l;m} \dot{x}^m \end{cases} \quad (6.169)$$

6.13.2 Materiaalse punkti kiirus ja kiirendus

Kiirus

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (6.170)$$

Lagrange'i koordinaadid. Olgu siirdevektor esitatud läbi LK kujul $\mathbf{u} = U^K \mathbf{G}_K$, kus $U^K = U^K(\mathbf{X}, t)$. Nüüd

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial U^K}{\partial t} \mathbf{G}_K, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{v} = V^K \mathbf{G}_K, \quad \text{kus} \quad V^K = \frac{\partial U^K}{\partial t}. \quad (6.171)$$

Viimased avaldised esitavadki *kiiruse (kiirusvektori) Lagrange'i koordinaatides*.

Euleri koordinaadid. Kui siirdevektor on esitatud läbi Euleri koordinaatide, siis $\mathbf{u} = u^k \mathbf{g}_k$, kus $u^k = u^k(\mathbf{x}, t)$. Nüüd saame *kiiruse avaldised Euleri koordinaatides*:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{x}=\text{const}} = \frac{Du^k}{Dt} \mathbf{g}_k \equiv \left[\frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k_{;l} v^l \right] \mathbf{g}_k, \quad (6.172)$$

ehk

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k, \quad \text{kus} \quad v^k = \frac{Du^k}{Dt} \equiv \frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k_{;l} v^l.$$

Seega on kiiruse- ja siirdekomponentide vahelised seosed Euleri koordinaatide puhul ilmutamata kujul.

6.13.3 Deformatsioonikiiruse tensor

Materiaalne tuletis deformatsioonigradiendist $\mathbf{x}^k_{;K}$.

$$\frac{D(x^k_{;K})}{Dt} = v^k_{;l} x^l_{;K}. \quad (6.176)$$

Materiaalne tuletis koordinaadi diferentsiaalid.

$$\frac{D(dx^k)}{Dt} = v^k_{;l} dx^l. \quad (6.177)$$

Euleri deformatsioonikiiruse tensor.

$$2d_{kl} = v_{k;l} + v_{l;k}, \quad (6.178)$$

Materiaalne tuletis joonelemendi ruudust

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = 2d_{kl} dx^k dx^l. \quad (6.179)$$

Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor.

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L}. \quad (6.180)$$

Kiirendus

Materiaalse punkti kiirendus on defineeritud kui tema kiirusvektori esimene tuletis aja järgi —

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (6.173)$$

Lagrange'i koordinaatide puhul

$$\mathbf{a} = A^K \mathbf{G}_K, \quad A^K = \frac{\partial V^K}{\partial t} = \frac{\partial^2 U^K}{\partial t^2} \quad (6.174)$$

ning *Euleri koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{g}_k, \quad a^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k_{;l} \underbrace{v^l}_{\dot{x}^l} \quad (6.175)$$

Seega avalduvad kiirenduse komponendid nii LK-s kui EK-s ilmutatud kujul.

6.13.4 Elementaaruumala muutumise kiirus

Käesolevas alajaotuses leiame materiaalse tuletise EK-s esitatud elementaaruumalast dv . Alghetkel t_0 on meil tahke keha (ruumipiirkond) B , mida ümbritseb pind A ja mille ruumala on \mathcal{V} . Deformatsiooni käigus $B \rightarrow b$, $A \rightarrow a$ ja $\mathcal{V} \rightarrow v$. Kasutame tähistusi

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \right| = |x^k_{;K}|, \quad J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = |z^k_{;K}|, \quad (6.181)$$

$$g = |g_{kl}|, \quad G^{-1} = |G^{KL}|.$$

Pideva liikumise puhul on koordinaatteisendused $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ja $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ teineteise ühesed pöördteisendused ja $j \neq 0$. Kõverjoonelised koordinaadid \mathbf{x} ja \mathbf{X} olid sissetoodud läbi DRK. Seega

$$\frac{\partial z^k}{\partial Z^K} = \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial Z^K}$$

ning jakobiaan

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \right| \cdot \left| \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \right| \cdot \left| \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right|. \quad (6.182)$$

...

$$\frac{DJ}{Dt} = Jv^k{}_{;k} \quad (6.183)$$

Kokku saame aga avaldise

$$\frac{D(dv)}{Dt} = Jv^k{}_{;k}d\mathcal{V} = v^k{}_{;k}dv, \quad (6.184)$$

mis väljendabki *elementaarruumala muutumise kiirust*.

6.13.5 Elementaarpinna muutumise kiirus

Materiaalne tuletis deformatsioonigradiendist $\mathbf{X}^K{}_{,k}$:

$$\frac{D(X^K{}_{,k})}{Dt} = -X^K{}_{,l}v^l{}_{;k} \quad (6.185)$$

Pinnaelemendi materiaalne tuletis (muutumise kiirus):

$$\frac{D(da_k)}{Dt} = v^m{}_{;m}da_k - v^m{}_{;k}da_m. \quad (6.186)$$

Ruumintegraal. Kui nüüd funktsioon ϕ on defineeritud üle materiaalse mahu \mathcal{V} , siis ruumintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{D\phi}{Dt} dv + \phi \frac{D}{Dt}(dv) \right] \stackrel{(6.184)}{=} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_{;k}v^k \right) dv + \phi v^k{}_{;k}(dv) \right] = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\phi v^k)_{;k} \right] dv. \end{aligned} \quad (6.189)$$

Kui kasutada Greeni-Gaussi teoreemi¹⁵, siis saame viimasest

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv = \int_v \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_s \phi v^k da_k. \quad (6.190)$$

Siin on materiaalne maht \mathcal{V} asendatud fikseeritud ruumimahuga v , mida ümbritseb pind s ja mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga \mathcal{V} . Seega, mingi füüsikalise suuruse ϕ materiaalses mahus \mathcal{V} muutumise kiirus võrdub selle suuruse ϕ muutumise kiirus ruumilises mahus v (mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga \mathcal{V}) pluss suuruse ϕv^k voog läbi ruumilist mahtu v ümbritseva pinna s .

¹⁵ $\int_{\mathcal{V}} v^k{}_{;k} dv = \int_S u^k da_k$, $da_k = n_k da$ — tuntud ka kui Gaussi-Ostrogradski teoreem

6.14 Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

Joonintegraal. Olgu ϕ mingi funktsioon (näit. massi tihedus või kiirus või elekt-rijuhtivus vms.), mis on defineeritud üle materiaalse joone L . Vastava joonintegraali muutumise kiirus leitakse materiaalse tuletise abil:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_L \phi dx^k &= \int_L \frac{D}{Dt}(\phi dx^k) = \int_L \left[\frac{D\phi}{Dt} dx^k + \phi \frac{D}{Dt}(dx^k) \right] = \\ &\stackrel{(6.177)}{=} \int_L \left[\dot{\phi} dx^k + \phi v^k{}_{;l} dx^l \right]. \end{aligned} \quad (6.187)$$

Pindintegraal. Olgu nüüd suvaline funktsioon ϕ defineeritud üle materiaalse pinna S . Vastava pindintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_S \phi da_k &= \int_S \frac{D}{Dt}(\phi da_k) = \int_S \left[\frac{D\phi}{Dt} da_k + \phi \frac{D}{Dt}(da_k) \right] = \\ &\stackrel{(6.186)}{=} \int_S \left[\dot{\phi} da_k + \phi (v^l{}_{;l} da_k - v^l{}_{;k} da_l) \right]. \end{aligned} \quad (6.188)$$

6.15 Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

6.15.1 Keeriselisus

(Cauchy) keeriselisuse tensor¹⁶

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k;l} - v_{l;k}) \equiv v_{[k;l]}. \quad (6.191)$$

Kaldsümmeetrilisest tensorist w_{kl} saab omakorda konstrueerida *keerisvektori*

$$w^k = \epsilon^{klm} w_{ml} = \epsilon^{klm} v_{m;l} \text{ ehk } \mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}, \quad (6.192)$$

kus

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv \text{rot } \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{v} \text{ ja } \nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (6.193)$$

Keerisvektori kovariantsed komponendid

$$w_k = g_{kl} w^l. \quad (6.194)$$

¹⁶I.k. *vorticity tensor*. Kasutatakse ka terminit pöörlemistensor, i.k. vastavalt *spin tensor*.

6.15.2 Deformatsioonitensorite materiaalsed tuletised

Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}.$$

Leiame nüüd seose deformatsioonikiiruse tensori d_{kl} ja Euleri deformatsioonitensori materiaalse tuletise \dot{e}_{kl} vahel. Selleks leiame jällegi materiaalse tuletise deformatsiooni moodust $ds^2 - dS^2$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(ds^2) &= \frac{D}{Dt}(ds^2 - dS^2) \stackrel{(6.74)}{=} 2 \frac{D}{Dt}(e_{kl}dx^k dx^l) \\ &\stackrel{(6.177)}{=} 2(\dot{e}_{kl} + e_{ml}v^m{}_{;k} + e_{km}v^m{}_{;l}) dx^k dx^l. \end{aligned} \quad (6.195)$$

$$d_{kl} = \dot{e}_{kl} + e_{ml}v^m{}_{;k} + e_{km}v^m{}_{;l}. \quad (6.196)$$

Arvestades Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensorite definitsioone ($2e_{kl} = g_{kl} - c_{kl}$ ja $2E_{KL} = C_{KL} - G_{KL}$) saame

$$\dot{c}_{kl} = -2\dot{e}_{kl} \text{ ja } \dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}. \quad (6.197)$$

kus

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}}.$$

Lokaalse massi jäävuse aksiomi saame kui rakendame globaalset massi jäävuse aksiomi materiaalse punkti lõpmata väikeses ümbruses. Valemite (6.199) põhjal saame

$$\rho_o = \rho J = \rho \sqrt{\text{III}_C} \text{ või } \rho = \rho_o J^{-1} = \rho_o \sqrt{\text{III}_c}. \quad (6.200)$$

Avaldisi (6.200) nimetatakse *materiaalseteks pidevusvõrranditeks* ja nad esitatakse Lagrange'i koordinaatides (Lagrange'i kirjeldus).

Ruumilise pidevusvõrrandi (Euleri kirjeldus) saame kui esitame globaalse massi jäävuse aksiomi kujul

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv \stackrel{(6.189)}{=} \int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} \right] dv = 0. \quad (6.201)$$

Viimase põhjal avaldub lokaalne massi jäävuse aksiom kujul

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} = 0, \quad (6.202)$$

mis kujutabki endast *ruumilist pidevusvõrrandit*.

Deformeeruva keskkonna dünaamika

6.16 Mass

Pideva keskkonna mehaanika I põhiaksioom — massi jäävuse seadus

Globaalne massi jäävuse aksiom. Keskkonna kogumass on liikumisel invariantne —

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_o d\mathcal{V} = \int_v \rho dv. \quad (6.198)$$

Kuna $dv = Jd\mathcal{V}$, siis saab viimase võrduse esitada nii LK-s kui EK-s —

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho_o - \rho J) d\mathcal{V} = 0 \text{ või } \int_v (\rho - \rho_o J^{-1}) dv = 0, \quad (6.199)$$

6.17 Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *liikumishulk*¹⁷ \mathcal{P} avaldub kujul

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} v^k(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) d\mathfrak{M} \quad (6.203)$$

kusjuures baasivektorid $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ saab integraali ette tuua vaid sirgjooneliste koordinaatide puhul. Kuna pideva massijaotuse puhul $d\mathfrak{M} = \rho dv$, siis pole oluline, kas integreeritakse üle ruumala või massi. Kui korrutada viimast avaldist skalaarselt $\mathbf{G}^K(\mathbf{X})$ siis saame liikumishulga \mathcal{P}^K komponendid LK-s —

$$\mathcal{P}^K(\mathbf{X}, t) = \int_{\mathfrak{M}} g^K{}_k(\mathbf{X}, \mathbf{x}) v^k(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M}. \quad (6.204)$$

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetiline moment*¹⁸ \mathcal{H}_o ruumipunkti o suhtes

$$\mathcal{H}_o \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{g}_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (6.205)$$

¹⁷I.k. *momentum or linear momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka terminit impulss.

¹⁸I.k. *moment of momentum or angular momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid impulsi moment ja pöördeimpulss.

analoogiliselt eelnevaga saame ka kineetilise momendi komponendid esitada LK-s

$$\bar{\mathcal{H}}_o^K = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (6.206)$$

Lisaks saab kineetilise momendi avaldada ka bivectori kujul

$$\mathcal{H}_o^{KL} = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k g^L_l (p^k v^l - p^l v^k) d\mathfrak{M}. \quad (6.207)$$

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetilise energia*¹⁹

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} v^2 d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} g_{kl} v^k v^l d\mathfrak{M}. \quad (6.208)$$

Pideva keskkonna mehaanika II põhiaksioom — liikumishulga tasakaalu seadus

Liikumishulga globaalse tasakaalu seadus.

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F} \text{ ehk } \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k v^k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}^K \quad (6.209)$$

¹⁹I.k. *kinetic energy*

6.18.2 Pingetensor

Pingetensori komponent (pingekomponent) t_{kl} on koordinaatpinnal $x^k = \text{const}$ mõjuva pingevektori \mathbf{t}_k l -is komponent, st.,

$$\mathbf{t}_k = t_{kl} \mathbf{g}^l \quad (6.212)$$

Pingevektori $\mathbf{t}_{(n)}$ saab nüüd avaldada kujul

$$\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{t}_k n^k \stackrel{(6.212)}{=} t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \quad (6.213)$$

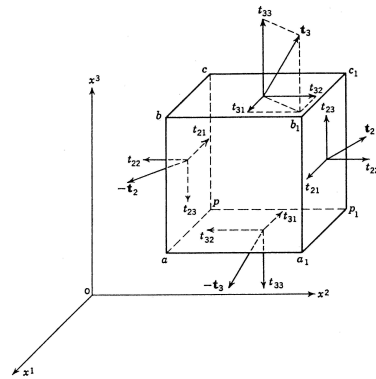
kust

$$t_{(n)l} = t_{kl} n^k. \quad (6.214)$$

Punkti p läbival suvalisel pinnal (normaaliga \mathbf{n}) mõjuv pingevektor $\mathbf{t}_{(n)}$ avaldub lineaarfunktsioonina vaadeldava punkti pingetensorist t_{kl} .

Meetriliste tensoritega indekseid tõstes saame moodustada kontravariantseid ja segatensoreid, näiteks

$$g^{km} g^{ln} t_{mn} = g^{ln} t^k_n = t^{kl}.$$



Joonis 6.14: Pingetensor

Pideva keskkonna mehaanika III põhiaksioom — kineetilise momendi tasakaalu seadus

Kineetilise momendi globaalse tasakaalu seadus.

$$\dot{\mathcal{H}}_o = \mathcal{M}_o \text{ ehk } \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_o^K \text{ ehk} \quad (6.210)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k g^L_l (p^k v^l - p^l v^k) d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_o^{KL}.$$

Valemitega (6.209) ja (6.210) esitatud pideva keskkonna mehaanika põhiaksioome nimetatakse *Euleri liikumisseadusteks*.

Pideva keskkonna mehaanika IV põhiaksioom — energia jäävuse seadus

Sama, mis DRK korral

6.18 Pinge

6.18.1 Cauchy pingehüpootees

$$\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{t}_k \frac{da^k}{da} = \mathbf{t}_k n^k = \mathbf{t}^k n_k, \quad (6.211)$$

Seega, lisaks valemile (6.212) ja (6.213), on pingevektorite avaldamiseks mitmeid võimalusi —

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{(n)} = t^k_l n_k \mathbf{g}^l = t^k_l n^l \mathbf{g}_k = t^{lk} n_l \mathbf{g}_k = t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \\ \mathbf{t}^k = t^k_l \mathbf{g}^l = t^{kl} \mathbf{g}_l, \quad \mathbf{t}_k = t_k^l \mathbf{g}_l = t_{kl} \mathbf{g}^l. \end{cases} \quad (6.215)$$

Pingetensori füüsikalised komponendid

Alajaotuses 6.8 (lk. 49) toodud valemite põhjal pingevektor

$$\mathbf{t}_{(n)} = t_l^k n^l \mathbf{g}_k = t_{(l)}^{(k)} n^{(l)} \mathbf{e}_{(k)}, \quad (6.216)$$

kus

$$\mathbf{e}_{(k)} = \frac{\mathbf{g}_k}{\sqrt{g_{k\ k}}}, \quad n^{(l)} = n^l \sqrt{g_{l\ l}} \quad \text{ja} \quad t_{(l)}^{(k)} = t_l^k \frac{\sqrt{g_{k\ k}}}{\sqrt{g_{l\ l}}}. \quad (6.217)$$

Siinjuures $t_{(l)}^{(k)}$ nimetatakse pingetensori *vasakpoolseteks füüsikalisteks komponentideks*. *Parempoolsed füüsikalised komponendid*

$$t^{(l)}_{(k)} = t^l_k \frac{\sqrt{g_{l\ l}}}{\sqrt{g_{k\ k}}}. \quad (6.218)$$

Sümmeetrilise pingetensori ja ortogonaalsete koordinaatide puhul

$$t^{(k)}_{(l)} = t_{(k)}^{(l)} = t^k_l \sqrt{\frac{g_{k\ k}}{g_{l\ l}}} = t_k^l \sqrt{\frac{g_{l\ l}}{g_{k\ k}}} = t^{kl} \sqrt{g_{k\ k} g_{l\ l}} = t_{kl} \frac{1}{\sqrt{g_{k\ k} g_{l\ l}}}. \quad (6.219)$$

6.19 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seaduste tuletuskäik on sama, mis DRK korral, nad omavad kuju

$$\begin{aligned} t^{jk}_{;j} + \rho (f^k - a^k) &= 0, \\ \epsilon^{ijk} t_{jk} &= 0 \end{aligned} \quad (6.220)$$

ja neid nimetatakse vastavalt *Cauchy esimeseks ja teiseks liikumisseaduseks*. *

Avaldisest (6.220)₂ järeldub, et pingetensor peab olema sümmeetriline:

$$\epsilon^{ijk} t_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{jk} - t_{kj} = 0, \quad (6.221)$$

Järeldus: Kui liikumishulk on lokaalses tasakaalus (ning mahu- ja pinnamomendid puuduvad), on kineetiline moment lokaalses tasakaalus parajasti siis kui pingetensor on sümmeetriline.

Seega on meil vaadeldaval juhul vaid kuus sõltumatut pingekomponenti: $t^{11}, t^{22}, t^{33}, t^{12} = t^{21}, t^{13} = t^{31}, t^{23} = t^{32}$, st.,

$$t_{kl} = t_{lk}, \quad t^{kl} = t^{lk}, \quad t^k_l = t_l^k. \quad (6.222)$$

Piola (1833, 1836 ja 1848) tõi sisse pseudopinge tensorid T^{Kl} ja T^{KL} nii, et

$$\mathbf{T}^K = T^{Kl} \mathbf{g}_l = T^{KL} x^l_{,L} \mathbf{g}_l = T^{KL} \mathbf{C}_L. \quad (6.226)$$

Tänapäeval on need tensorid tuntud kui *esimene ja teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor*. ✓

Seosed Cauchy pingetensoriga:

$$\begin{aligned} T^{Kl} &= JX^K_{,k} t^{kl}, & t^{kl} &= J^{-1} x^k_{,K} T^{Kl}, \\ T^{KL} &= T^{Kl} X^L_{,l} = JX^K_{,k} X^L_{,l} t^{kl}, & \\ t^{kl} &= J^{-1} x^k_{,K} x^l_{,L} T^{KL}, & T^{Kl} &= x^l_{,L} T^{KL}. \end{aligned} \quad (6.227)$$

Järgnevalt defineerime *tensori kovariantse täistuletise*. Kui $A^{Kk} = A^{Kk}(\mathbf{X}, \mathbf{x})$, siis kovariantne täistuletis

$$A^{Kk}_{;L} = \underbrace{A^{Kk}_{,L} + \left\{ \begin{matrix} K \\ ML \end{matrix} \right\} A^{Mk}}_{A^{Kk}_{;L}} + \underbrace{\left(A^{Kk}_{,l} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} A^{Kl} \right)}_{A^{Kk}_{;l}} x^l_{,L}. \quad (6.228)$$

Arvestades avaldisi (6.222) ning tõstes ja langetades indekseid, saab anda Cauchy esimesele liikumisseadusele (6.220)₁ alternatiivseid kujusid —

$$\begin{cases} t^{kl}_{;l} + \rho (f^k - a^k) = 0, \\ t^l_{k;l} + \rho (f_k - a_k) = 0, \\ t^k_{l;l} + \rho (f^k - a^k) = 0. \end{cases} \quad (6.223)$$

Enamgi veel, Cauchy liikumisseadusi on võimalik esitada ka füüsikalistes komponentides.

6.20 Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

Cauchy liikumisvõrrandid (6.220) on esitatud EK-s. Lagrange'i kirjelduse jaoks toome sisse pingevektori \mathbf{T}^K ruumipunktis \mathbf{x} , mis vastab deformeerumata pinnale dA materiaalses punktis $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, nii et

$$\mathbf{t}_{(n)} da = \mathbf{t}^k da_k = \mathbf{T}^K dA_K. \quad (6.224)$$

Kuna $da_k = JX^K_{,k} dA_K$ ja $dA_K = J^{-1} x^k_{,K} da_k$ siis

$$\mathbf{t}^k = J^{-1} x^k_{,K} \mathbf{T}^K \quad \text{ja} \quad \mathbf{T}^K = JX^K_{,k} \mathbf{t}^k \quad (6.225)$$

Nüüd saab avaldada Cauchy esimese liikumisseaduse läbi tensori T^{Kl} —

$$T^{Kk}_{,K} + T^{Kl} \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} x^l_{,K} + T^{Kk} \left\{ \begin{matrix} L \\ LK \end{matrix} \right\} + \rho_0 (f^k - a^k) = 0 \quad (6.229)$$

ehk

$$T^{Kk}_{;K} + \rho_0 (f^k - a^k) = 0.$$

Viimase puhul on arvestatud, et siin $T^{Kk} = T^{Kk}(\mathbf{X})$. Cauchy teine liikumisseadus saab kuju

$$T^{Kk} x^m_{,K} = T^{Kl} x^k_{,K}. \quad (6.230)$$

Läbi tensori T^{KL} saavad liikumisseadused (6.229) ja (6.230) kuju

$$\begin{cases} (T^{KL} x^k_{,K})_{,K} + \left(\left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} x^m_{,L} x^l_{,K} + \left\{ \begin{matrix} M \\ MK \end{matrix} \right\} x^k_{,L} \right) T^{KL} + \rho_0 (f^k - a^k) = 0, \\ T^{KL} = T^{LK}. \end{cases} \quad (6.231)$$

Energia ja entroopia

6.21 Energia jäävuse seadus

Globaalne energia jäävuse seadus on termodünaamikas tuntud kui termodünaamika esimene seadus ja ta esitatakse kujul

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + Q, \quad (6.232)$$

kus Q on soojuste juurdevool ajaühikus, ja teda mõõdetakse samades ühikutes kui mehaanikalist võimsust \mathcal{W} . Pideva massijaotusega keskkonnas

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho v_p v^p dv \quad \text{ja} \quad \mathcal{E} = \int_V \rho \varepsilon dv, \quad (6.233)$$

6.22. Potentsiaalne energia

6 - 95

Lokaalse energia jäävuse seaduse saame võrdusest (6.238) kui vaatleme integraaliluseid avaldise. Selgub, et p.p. olev integraalilune avaldis kujutab endast liikumishulga lokaalse tasakaalu seadust ja on seega võrdne nulliga. Seega, arvestades et $t^{pr} v_{p;r} = t^{pr} d_{pr}$, saame

$$\rho \dot{\varepsilon} = t^{pr} d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h. \quad (6.239)$$

Saadud diferentsiaalvõrrand väljendab *lokaalset energia jäävuse seadust* ja teda nimetatakse ka *energia lokaalse tasakaalu diferentsiaalvõrrandiks*. Viimases avaldises esinevat mehaanikalist energiat

$$\phi = t^{pq} d_{pq} \quad (6.240)$$

nimetatakse *pinge võimsuseks*.

6.22 Potentsiaalne energia

Juhtul, kus välisjõud f_p on statsionaarsed saame tuua sisse *potentsiaalse energia*:

$$f_p = -U_{;p}. \quad \mathcal{U} = \int_V \rho U dv. \quad (6.241)$$

kus ε on siseenergia tihedus. Mehaanikaline võimsus

$$\mathcal{W} = \int_S t^{rp} v_p da_r + \int_V \rho f^p v_p dv. \quad (6.234)$$

Soojuste juurdevool

$$Q = \int_S q^p da_p + \int_V \rho h dv. \quad (6.235)$$

Siin q^p on soojuste juurdevool pinnaühiku kohta ja h — keha siseallikaist toodetud soojuste massiühiku kohta.

Avaldame nüüd kõik valemis (6.232) olevad liikmed läbi ruumintegraalide — ✓

$$\dot{\mathcal{K}} = \int_V [\rho a^p v_p dv + \underbrace{\frac{1}{2} v_p v^p \frac{D}{Dt}(\rho dv)}_{=0}], \quad \dot{\mathcal{E}} = \int_V [\rho \dot{\varepsilon} dv + \underbrace{\varepsilon \frac{D}{Dt}(\rho dv)}_{=0}], \quad (6.236)$$

$$\mathcal{W} = \int_V [t^{rp}{}_{;r} v_p + t^{rp} v_{p;r} + \rho f^p v_p] dv, \quad Q = \int_V (q^p{}_{;p} + \rho h) dv. \quad (6.237)$$

Nüüd saame anda *globaalsete energia jäävuse seaduste* kuju

$$\int_V [\rho \dot{\varepsilon} - t^{pr} v_{p;r} - q^p{}_{;p} - \rho h] dv = \int_V v_p (t^{rp}{}_{;r} + \rho f^p - \rho a^p) dv. \quad (6.238)$$

6.22. Potentsiaalne energia

6 - 96

Mehaanikalise võimsuse avaldis (6.234) saab nüüd kujul

$$\mathcal{W} = \int_S t^{rp} v_p da_r - \int_V \rho U_{;p} v^p dv. \quad (6.242)$$

Kuna

$$\dot{\mathcal{U}} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho U dv = \int_V \rho \dot{U} dv = \int_V \rho U_{;p} v^p dv. \quad (6.243)$$

siis saab avaldis (6.242) omakorda kujul

$$\mathcal{W} = \int_S t^{rp} v_p da_r - \dot{\mathcal{U}} \quad (6.244)$$

ja globaalne energia jäävuse seadus (termodünaamika esimene seadus)

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{U}} = \int_S t^{rp} v_p da_r + Q. \quad (6.245)$$

6.22.1 Entroopia tootmine

Lokaalne entroopia tootmine. Kasutame lokaalset energia jäävuse seadust (6.239) ja järeldust Gibbs'i võrrandist ($d\varepsilon = \vartheta d\eta + \tau^\alpha d\nu_\alpha$):

$$\rho \dot{\varepsilon} = t^{pr} d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h, \quad \dot{\varepsilon} = \vartheta \dot{\eta} + \tau^\alpha \dot{\nu}_\alpha.$$

Kui elimineerida viimasest $\dot{\varepsilon}$ ning arvestada, et entroopia tootmine on seotud vaid pingetensori dissipatiivse osaga, saame *lokaalse entroopia tootmise võrrandi*

$$\rho \vartheta \dot{\eta} = {}_D t^{pr} d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h - \rho \tau^\alpha \dot{\nu}_\alpha. \quad (6.246)$$

Globaalne entroopia tootmine. Vastav võrrand saadakse kui integreerida lokaalset entroopia tootmise avaldist (6.246) (avaldades elnevalt $\rho \dot{\eta}$) üle mahu \mathcal{V} ning kasutada seoseid

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\eta} dv = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \eta dv \doteq \dot{H} \quad (6.247)$$

ja

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\vartheta} q^p{}_{;p} dv = \int_{\mathcal{V}} \left[\left(\frac{q^p}{\vartheta} \right)_{;p} + \frac{q^p \vartheta_{;p}}{\vartheta^2} \right] dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \frac{q^p \vartheta_{;p}}{\vartheta^2} dv. \quad (6.248)$$

Avaldis (6.252) väljendab *globaalset entroopia seadust* — summaarse entroopia juurdekasv on suurem-võrdne läbi keha pinna toimuva entroopia juurdevoolu ja keha siseallikaist toodetud entroopia summast.²⁰

Lokaalne entroopia seadus. Selleks et saada termodünaamika teist seadust lokaalsel kujul, minnakse avaldises (6.252) Greeni-Gaussi teoreemi abil üle ruumintegraalile. Arvestades (6.247)

$$\int_{\mathcal{V}} \left\{ \rho \dot{\eta} - \left(\frac{q^k}{\vartheta} \right)_{;k} - \frac{\rho h}{\vartheta} \right\} dv \geq 0, \quad (6.253)$$

kust globaalse võrratuse lokaliseerimise tulemusena saame *lokaalse entroopia seaduse*

$$\rho \dot{\eta} - \left(\frac{q^k}{\vartheta} \right)_{;k} - \frac{\rho h}{\vartheta} \geq 0. \quad (6.254)$$

Ellimineerime nüüd lokaalse energia jäävuse seaduse abil lokaalsest entroopiaseadusest kehasisest allikast toodetud soojuse h . Kasutades samasusi (6.248) saame

²⁰Eringeni (1962)põhjal nimetatakse (6.252) Clausiuse-Duhemi võrratuseks. Tavaliselt esitatakse nimetatud võrratus siiski lokaalsel kujul.

Globaalne entroopia tootmise võrrand avaldub seejärel kujul

$$\dot{H} = \int_{\mathcal{S}} \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \left(\Delta + \frac{\rho h}{\vartheta} \right) dv, \quad (6.249)$$

kus

$$\Delta = \frac{1}{\vartheta} \left[{}_D t^{pr} d_{rp} + q^p (\ln \vartheta)_{;p} - \rho \tau^\alpha \dot{\nu}_\alpha \right]. \quad (6.250)$$

Seega entroopia muutust põhjustavad: 1) entroopia juurdevool q^p/ϑ läbi keha pinna ja 2) entroopia tootmine keha sees.

6.22.2 Entroopia seadus — termodünaamika teine seadus

Globaalne entroopia seadus. Eksperimentaalsete tulemuste põhjal on teada, et soojusallikatest vaba süsteem tarbib mehaanikalist tööd st.,

$$\Delta \geq 0. \quad (6.251)$$

Seega valemite (6.249)–(6.251) põhjal

$$\dot{H} \geq \int_{\mathcal{S}} \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho h}{\vartheta} dv. \quad (6.252)$$

Clausiuse-Duhemi võrratuse

$$\rho \left(\dot{\eta} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\vartheta} \right) + \frac{1}{\vartheta} t^{kl} d_{kl} + \frac{1}{\vartheta^2} q^k \vartheta_{;k} \geq 0, \quad (6.255)$$

mis väljendab samuti lokaalset entroopia seadust.

Võrratusele (6.255) saab anda alternatiivse kuju, tuues sisse *Helmholtzi vaba energia tiheduse*

$$\psi = \varepsilon - \vartheta \eta. \quad (6.256)$$

Funktsioon ψ väljendab seda osa siseenergiast, mis on võimeline tegema mehaanikalist tööd. Avaldades nüüd avaldisest (6.256) siseenergia tiheduse ε , saame anda võrratusele (6.255) kuju

$$-\rho \left(\dot{\psi} + \eta \dot{\vartheta} \right) + t^{kl} d_{kl} + \frac{1}{\vartheta} q^k \vartheta_{;k} \geq 0. \quad (6.257)$$

Võrratused (6.255) ja (6.257) peavad kehtima kõikide termomehaanikaliste protsesside puhul.