

# Peatükk 6

## Olekuvõrrandid

### 6.1 Sissejuhatus

Vastavalt pideva keskkonna neljale põhiaksioomile oleme saanud põhivõrrandite süsteemi, mis koosneb kaheksast sõltumatust võrrandist<sup>1</sup>.

1. *Massi jäävuse seadus* võib olla esitatud ruumilise pidevusvõrrandi (4.7) abil — 1 võrrand

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0. \quad (6.1)$$

<sup>1</sup>Käesolevas peatükis on taas kasutusel DRK ja seega ei eristata ko- ja kontravariantseid koordinaate.

#### 6.1. Sissejuhatus

#### 6 - 2

2. *Cauchy esimene liikumisseadus ehk liikumishulga tasakaalu seadus*, näiteks kujul (4.35)<sub>1</sub> — 3 võrrandit

$$t_{j;k;j} + \rho (f_k - a_k) = 0. \quad (6.2)$$

3. *Cauchy teine liikumisseadus ehk kinetilise momendi tasakaalu seadus*, näiteks kujul (4.35)<sub>2</sub> — 3 võrrandit

$$t_{k;l} = t_{lk}. \quad (6.3)$$

4. *Energia jäävuse seadus*, näiteks kujul (5.11) — 1 võrrand

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{pr} d_{rp} + q_{p,p} + \rho h. \quad (6.4)$$

Ülaltoodud 8 võrrandit kehtivad iga mehaanikalise keskkonna (tahke keha, vedelik, gaas) puhul. Kuid sama geometria ja/või massi puhul võivad erinevast materjalist kehad või keskkonnad käituda sama välismõju all erinevalt. Mõõduka suurusega välisjõu toimeel enamuse tahkestest deformeerub kergelt, kuid vedelik hakkab voolama; puudust ja metallist kehad käituvad sama geometria ja sama välismõju korral erinevalt; jne.

Kui läheneda võrrandele (6.1)–(6.4) matemaatiliselt, siis tuleb konstanteerida järgmist fakti: selleks, et võrrandisüsteemil eksisteeriks ühene lahend, peab tundmatute arv ja võrrandite arv olema võrdne. Meil on kaheksa võrrandit. Tundmatute arv on aga paraku tunduvalt suurem. Näiteks kui eeldame, et  $f_k$ ,  $\rho$  ja  $h$  on antud, siis on tundmatuid kuusteist:  $v_k$ ,  $t_{kl}$ ,  $q_k$  ja  $\varepsilon$ . Kui tuua mängu veel entroopia ja temperatuur ning elektrilisi ja keemilisi muutujaid, läheb asi aina hullumaks ning on selgemast selgem, et kaheksa võrrandiga pole neid võimalik üheselt määrata ning on tarvis sisse tuua täiendavaid võrrandeid.

On selge, et erinevate materjalide erinev käitumine on määratud nende materjalide sisemise struktuuriga ja selleks, et me saaks seda arvesse võtta on vaja sisse tuua vastavad võrrandid. Eesti keeles nimetatakse selliseid võrrandeid *olekuvõrranditeks*<sup>2</sup> ja nad seovad omavahel pingetensori ja deformatsioonitensori. Teisisõnu, *olekuvõrrandid esitavad pingete ja deformatsioonide vahelisi seoseid*. Pideva keskkonna mehaanika raames võib enimtuntud olekuvõrrandiks pidada (üldistatud) Hooke'i seadust, mida kasutatakse nii lineaarses elastsusteoorias kui tugevusõpetuses.

---

<sup>2</sup>I. k. *constitutive equations*

Oma olemuselt on olekuvõrrandid materjalide käitumist kirjeldavad matemaatilised mudelid, mille kehtivust on kontrollitud eksperimentaalselt. Olekuvõrrandite tuletamisel arvestatakse materjali (aine) omadusi, kuid neid ei tuletata otseselt mitte ühestki füüsikaseadusest. Samas peavad olekuvõrrandid täitma teatavaid reegleid ning olema kooskõlas tuntud füüsikaseadustega. Nende tuletamiseks on kasutatud/kasutatatakse mitmeid lähenemisviise.

**Puhmatemaatiline viis** lähtub ideest, et nn. täielik võrrandisüsteem määrab ✓ füüsikalise nähtuse üheselt. See lähenemine võib aga viia ummikusse, sest (i) matemaatilised tingimused (alg- ja rajatingimused) aproksimeerivad mingit füüsikalist nähtust, kuid ilma füüsikalise põhjendusega ei saa seda teha; (ii) ühese tulemuse (väljundi) nõudest ei järeldu ühene tulesande formuleering. Seega ei pruugi saadud olekuvõrrandid olla ühesed.

**Statistilisel mehaanikal põhinev viis.** Kõik keskkonnad koosnevad osakestest — molekulidest, aatomitest jne. — mille vahel on sidemed. Rakendades mehaanika seadusi neile osakestele saadakse statistiline mehaanika. Nimetatud teooria puuduseks on see, et juba molekulide vaheliste jõudude olemus on üllikeerukas ja seega on täpse mudeli koostamine samuti “pisut tülikas”.

**Termodünaamiline viis** arvestab soojuse ja temperatuuri mõju. Keerukaks võib siin osutuda tugevalt mittelineaarsete või tugevalt dissipatiivsete protsesside kirjeldamine.

**Pideva keskkonna füüsikast** lähtuv suund tähendab endas kõiki eeltoodud meetodeid. Ei piüta luua ühte üldist ja kõigile materjalidele ning situatsioonidele ühist olekuõrrandit. Võimalikud on siiski teatavad grupeeringud ja üldistused (ideaalselt elastne keha, mähuga materjalid jne.)

## 6.2 Olekuõrrandite invarianssus

Olekuõrrand defineerib idealiseeritud materjali (keskkonna). Et selline ideaalne materjal kirjeldaks füüsikalist materjali adekvaatselt, peab ta rahuldama teatavaid füüsikalisi printsiipe.

**1. Välistamise (hülgamise) printsiibid.** Ükski olekuõrrand ei suuda siduda kõiki olekuparameetreid ja funktsionaale. Alati tuleb midagi hiljata. Vaadeldavad printsiibid määravad mida ja millal hiljata võib. Järgnevalt vaatleme mõnd neist.

---

### 6.2. Olekuõrrandite invarianssus

### 6 - 6

**1a. Mälu (pärikkuse) arvestamine** — materjali käitumine ajahetkel  $t$  on määratud tema minevikuga kuni selle ajahetkeni (mälu). See on teatavas vastulus klassikalise Newtoni mehaanikaga, kus algtingimusega ( $t = 0$ ) on nii minevik kui tulevik täielikult määratud. Antud printsiibist lähtudes saame tingimused, et hiljata olekuõrrandist järgnevad ajahetked.

**1b. Ümbruse printsiip** — hetkel  $t$  ruumipunktis  $\mathbf{x}$  asuva materiaalse punkti  $\mathbf{X}$  käitumine on määratud vaadeldava materiaalse punkti  $\mathbf{X}$  suvalise väikese ümbruse käitumisega.

1a. ja 1b. kokku annavad **determinismi printsiibi** — Hetkel  $t$  ruumipunktis  $\mathbf{x}$  asuva materiaalse punkti  $\mathbf{X}$  käitumine on määratud vaadeldava materiaalse punkti  $\mathbf{X}$  ümbruse käitumise (liikumise) ajalooga.

**1c. Võrdse kohaloleku printsiip ehk sõltumatute olekuparameetrite vailiku ühesuse printsiip** — ühe teooria raames peavad sama materjali kõik olekuõrrandid sisaldama samu sõltumatuid olekuparameetreid.

**1d. Unifitseerimise printsiip** — erinevad olekuparameetrid, mis iseloomustavad erinevaid materjale võivad esineda kõigi materjalide olekuõrrandites. (Kasutatakse juhul kui tahetakse luua ühist olekuteooriat erinevatele materjalidele.)

**2. Invarianssus koordinaatseisenduste suhtes** nõuab, et olekufunktsioonid oleksid absoluutsed tensorfunktsioonid oma argumentidest — seega et nad oleksid invariantsed koordinaatseisenduste suhtes.

**3. Ruumiline invarianssus.** Olekuvõrrandid peavad olema invariantsed ruumikoordinaatide jäiga liikumise suhtes. Füüsikaliselt tähendab see seda, et olekuvõrrandid ei tohi sõltuda vaatlaja asukohast. St., et kui üks liikumine toimub teljestikus  $\mathbf{x}$  hetkel  $t$  ja teine teljestikus  $\mathbf{x}'$  hetkel  $t'$  siis olekuvõrrandeis olevad † funktsioonid  $f_{k,l}(\mathbf{x}, t)$  ja  $f_{k,l}(\mathbf{x}', t')$  oleksid samad (langeksid kokku).

**4. Materiaalne invarianssus (materiaalne isomorfism).** Kui olekuvõrrandid on invariantsed mingi materiaalse koordinaatide teisenduse rühma suhtes, siis öeldakse, et olekuvõrrandid omavad materiaalselt sümmeetriat vaadeldava teiseiduse rühma suhtes. Näiteks peegeldused, pöörded. Materjali sümmeetriat on kasulik ette teada, sest see lihtsustab olekuvõrrandeid. Näiteks on metallide elastised omadused antud punktis invariantsed igas suunas. Sellist materjali omadust nimetatakse *isotroopsuseks*. Selle vastand on *anisotroopne* materjal. On aineid, millel näiteks mehaanikalised omadused on isotroopsed, kuid elektrilised anisotroopsed. Teine tähtis materjali omadus siin on homogeensus. Materjali, mille omadused ei sõltu materiaalsest koordinaadist, nimetatakse *homogeenseks* materjaliks. Vastu-

---

6.3. *Ideaalset elastse keskkonna olekuvõrrandid — Greeni meetod*

pidisel juhul nimetame aga materjali *mittehomogeenseks* ehk *heterogeenseks*.

**5. Mõõtühikutest sõltumatu printsiip ehk dimensionaalne invariant-sus.** Olekuvõrranditesse kuuluvad materjalikonstandid või moodulid peavad olema mõõtühikute suhtes invariantsed.

**6. Sobivuse printsiip.** Kõik olekuvõrrandid peavad olema vastavuses massi, liikumishulga, energia jt. füüsikaliste suuruste kohta kehtivate seaduste, aksioomide ja põhiprintsiipidega.

## 6.3 Ideaalset elastse keskkonna olekuvõrrandid — Greeni meetod

*Ideaalset elastne keha (keskkond) on keha, kus pinge sõltub vaid deformatsioonist.*

Täpsemalt öeldes, ideaalselt elastse keha korral (i) eeldatakse, et väliskoorrmuse mõjul ei toimu mitte mingeid elektrilisi, keemilisi ja termodünaamilisi nähtusi; (ii) keha jaoks defineeritakse *loomulik olek*, kus deformatsioonid ja pinged puuduvad, temperatuur ja teised väljad on konstantsed ja ühesugused igas punktis ning eeldatakse, et kui välisjõud eemaldada, siis keha loomulik olek taastub. See-ga hüljatakse temperatuur ja kõik teised väljad, eeldades, et nad väliskoorrmuse

mõjul ei muutu. Järelikult on tegu nullise dissipatsiooniga ja järelikult kogu energia, mis kuulub deformatsiooniks, saab välisjõu eemaldamisel tagasi. Sellisel juhul saab olekuvõrrandi tuletamiseks kasutada *Greeni meetodit*, mille puhul eeldatakse, et sisenergia on deformatsiooni funktsioon. Selliseid kehi nimetatakse tihti *hüperelastseteks kehadeks*.

**Definitsioon:** Keha nimetatakse hüperelastseks kui ta omab deformatsiooni-energiat kujul

$$\rho_0 \varepsilon \equiv \Sigma = \Sigma (X_K, x_k, \delta_{kK}, \rho, \mathbf{I}_K, x_{k,K}), \quad (6.5)$$

ni et

$$\frac{\rho}{\rho_0} \dot{\Sigma} = t_{ki} d_{ik}. \quad (6.6)$$

Valemi (6.5) põhjal võib vaadeldav materjal olla mittehomogeenne ja anisotroopne, gradiendid  $x_{i,K}$  toovad sisse ümbruse printsibi.  $\Sigma$  sõltub vaid konfiguratsioonist hetkel  $t$  ja mitte minevikust. Seega on tegu nn. *lihtsa materjaliga*, mille mälu piir-dub vaid algolekuga (loomuliku olekuga). Valemi (6.6) põhjal pole antud keskkond soojust juhtiv ning talle ei ole rakendatud jõupaare.

---

### 6.3. Ideaalselt elastise keskkonna olekuvõrrandid — Greeni meetod

6 - 10

Lähtudes massi jäävuse seadusest ( pidevuse võrrand), invariantse nõuetest ja tensoranalüüsist saab funktsiooni  $\Sigma$  avaldisest (6.5) elimineerida mitmeid argumente ning näidata, et avaldis (6.5) on ekvivalentne avaldisega

$$\Sigma = \Sigma (X_K, \mathbf{I}_K, C_{KL}), \quad (6.7)$$

mida käsitletakse kui deformatsioonenergia funktsiooni üldist kuju. Teame, et deformatsioonitensori  $C_{KL}$  jaoks saab leida peaväärtused  $C_1, C_2, C_3$  ning, et viimased on funktsioonid invariantidest  $I_C, II_C$  ja  $III_C$ . Seega saab deformatsioonienergia funktsiooni esitada kujul

$$\Sigma = \Sigma (X_K, \mathbf{I}_K, C_1, C_2, C_3). \quad (6.8)$$

või

$$\Sigma = \Sigma (X_K, \mathbf{I}_K, I_C, II_C, III_C). \quad (6.9)$$

Oleme eelnevalt esitanud seosed erinevate deformatsioonitensorite ja nende invariantide vahel. Seega pole tegelikult vahet, millist deformatsioonitensorit tema invariante või peaväärtusi kasutame:

$$\Sigma = \Sigma (\mathbf{X}, \mathbf{I}_K, \mathbf{C}) = \Sigma (\mathbf{X}, \mathbf{I}_K, \mathbf{E}) = \Sigma (\mathbf{X}, \mathbf{I}_K, \mathbf{c}) = \Sigma (\mathbf{X}, \mathbf{I}_K, \mathbf{c}^{-1}) \dots \quad (6.10)$$

**Kokkuvõttes:** hüperelastset keha saab kirjeldada deformatsioonienergia funktsiooniga  $\Sigma$ , mis on ühene funktsioon materiaalsetest koordinaatidest  $\mathbf{X}$ , baasvektoritest  $\mathbf{I}_K$  ja ühest materiaalselt või ruumilisest deformatsioonitensorist.

Homogeense anisotroopse materjali puhul saame valemist (6.7)

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{I}_K, C_{KL}), \quad (6.11)$$

mittehomogeense isotroopse materjali puhul

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{X}_K, C_{KL}) \quad (6.12)$$

ja isotroopse homogeense materjali puhul

$$\Sigma = \Sigma(C_{KL}). \quad (6.13)$$

Loomulikult võib ka avaldistes (6.11)–(6.13) kasutada  $C_{KL}$  asemel teisi deformatsioonitensoreid, nende peaväärtusi või invariante.

Asendades erinevate argumentidega deformatsioonienergia funktsioonid avaldisest (6.10) (või nende modifikatsioonidest (6.11)–(6.13)) avaldisse (6.6) saame erinevaid materjalimudeleid kirjeldavad olekuvõrrandid.

### 6.3. Ideaalselt elastise keskkonna olekuvõrrandid — Greeni meetod

### 6 - 12

#### 6.3.1 Näiteid erinevatest materjalimudelitest

**Boussinesq'i mudel [1870, 1872].** Deformatsioonienergia  $\Sigma$  argumentiks on kas  $C_{KL}$  või  $E_{KL}$ . Valmist (6.6) saame nüüd

$$t_{kl}d_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} x_{k,K} x_{l,L} d_{kl}. \quad (6.14)$$

Kuna viimane peab kehtima iga  $d_{kl}$  puhul, siis

$$t_{kl} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} x_{k,K} x_{l,L} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} x_{k,K} x_{l,L}. \quad (6.15)$$

**Kelvini-Cosserat' mudel (Kelvin [1863], Cosserat [1896]).** Kasutab Piola-Kirchhoffi pseudopinge tenseoreid. Valemite (6.6) põhjal saadakse

$$T_{Kl} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KN}} x_{l,N} \quad \text{ja} \quad T_{KL} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}}. \quad (6.16)$$

**Neumann-Kirchhoffi mudel.** Siin valitakse sõltumatuteks muutujateks deformatsioonigradiendid  $x_{k,K}$  ning lähtutakse Boussinesq'i mudelist (6.15). Avaldist

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,M}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} \frac{\partial E_{KL}}{\partial x_{k,M}} \quad (6.17)$$

teisendades saadakse sellest Neumanni mudelile ([1860]) vastav olekuvõrrand

$$t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{l,K}} x_{k,K}. \quad (6.18)$$

Kui tuua sisse tensor  $T_{Kl}$ , siis saame Kirchhoffi mudeli [1852]

$$T_{Kl} = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{l,K}}. \quad (6.19)$$

Need avaldised kehtivad kokkusurutava keskkonna kohta. Kokkusurumatu materjali puhul võime ilma energia balansi rikkumata lisada olekuvõrrandisse (6.18) m. surveliikme, saades **Poincaré mudeli** [1892]

✓

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{l,K}} x_{k,K}. \quad (6.20)$$

**Hameli ruumiline mudel [1912]**. Antud juhul on sõltumatuteks muutujateks deformatsioonigradientid  $X_{K,k}$ . Kõigepealt esitame valemi (6.6) kujul

$$t_{kl}v_{l,k} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial X_{K,k}} \frac{D}{Dt} (X_{K,k}) = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial X_{K,k}} X_{K,l}v_{l,k}. \quad (6.21)$$

---

### 6.3. Ideaalseth elastise keskkonna olekuvõrrandid — Greeni meetod

Kuna viimane peab kehtima suvalise  $v_{l,k}$  jaoks, siis

$$t_{kl} = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial X_{K,k}} X_{K,l}. \quad (6.22)$$

**Murnaghan'i ruumilised mudelid [1937]**. Esitab ruumilised mudelid lähtudes deformatsioonitensoreist  $C_{KL}^{-1}$ ,  $c_{kl}$ ,  $C_{kl}$  ja  $e_{kl}$  kui sõltumatutest muutujatest. Tulenused on järgmised:

$$\begin{aligned} t_{kl} &= -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KM}^{-1}} \frac{\partial C_{KM}^{-1}}{\partial X_{L,l}} X_{L,k}, \\ t_{kl} &= -\frac{2\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{km}} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{km}} = -\frac{2\rho}{\rho_0} c_{km} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{lm}} = \frac{\rho}{\rho_0} (\delta_{km} - 2e_{km}) \frac{\partial \Sigma}{\partial e_{lm}}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

**Märkus.** Kõik eeltoodud mudelid kehtivad ka anisotroopsete kehade puhul kui eeldada, et  $\Sigma$  sõltub lisaks veel ka baasivektoritest  $\mathbf{I}_K$ .

## 6.4 Elastse keskkonna olekuvõrrandid — Cauchy meetod

*Cauchy meetodi* korral eldatakse, et pinge on deformatsiooni funktsioon. Teda võib käsitleda kui alternatiivi Greeni meetodile. Ta kehtib ideaalselt elastsete kehade jaoks kuid on laiendatav ka dissipatiivsetele süsteemidele, kus Greeni meetod ei tööta. Seega on Cauchy meetod tildisem kui Greeni meetod. Lõpmata väikeste deformatsioonide puhul annavad mõlemad meetodid sama tulemuse.

Eeldame, et materjal on homogeenne ja anisotroopne ning pingekomponendid on ühised funktsioonid deformatsioonigradientidest  $x_{n,K}$ , st.

$$t_{kl} = f_{kl}(x_{n,K}). \quad (6.24)$$

Kuna käesolevas kursuses vaatleme nn. mittepolaarset juhtu (momentpinge puudub), siis  $t_{kl} = t_{lk}$  ja järelikult ka  $f_{kl} = f_{lk}$  ning tegu on vaid 6 funktsiooniga. Pärast invariantusuüete täitmist saame pingekomponentide jaoks avaldise

$$t_{rs} = F_{RS} X_{R,r} X_{S,s}, \quad F_{RS}(\mathbf{C}) = \delta_{kM} \delta_{lN} C_{MR}^{1/2} C_{NS}^{1/2} f_{kl}(\mathbf{C}) \quad (6.25)$$

kus  $F_{RS}(\mathbf{C})$  on sümmeetriline materiaalne tensor (funktsioon), mille komponendid avalduvad LK-s ja mida nim *mõjufunktsiooniks*<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Lk. response function

Tensori  $C_{KL}$  asemel võib ka siin kasutada peaväärtusi  $C_1, C_2, C_3$  või invariante  $I_C, II_C, III_C$ . Seega võib mõjufunktsioon omada näiteks kuju

$$F_{RS} = F_{RS}(I_C, II_C, III_C). \quad (6.26)$$

Kokkusurumatu materjali puhul asendatakse  $t_{rs}$  summaga  $t_{rs} + p\delta_{rs}$  (kus  $p$  on *hüdrostaatiline surve* ning valem (6.25) saab kuju

$$t_{rs} = -p\delta_{rs} + F_{RS} X_{R,r} X_{S,s}. \quad (6.27)$$

Kuna antud juhul  $III_C = 1$ , siis saame tumber defneerida ka mõjufunktsiooni (6.26)

$$F_{RS} = F_{RS}(I_C, II_C). \quad (6.28)$$

Kui materjal on anisotroopne, siis lisandub veel argument  $I_K$ , kui aga mittehomogeenne, siis  $\mathbf{X}$ .

Analoogiliselt Greeni meetodile saab anda olekuvõrrandile (6.25) alternatiivseid kujusid kui kasutada teisi deformatsioonitensoreid  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{e} \dots$



## 6.5 Isotroopse ideaalselt elastse tahke keha olekvõrrandid

### 6.5.1 Greeni meetod

Rakendame Greeni meetodit ning eeldame, et isotroopne ideaalselt elastne keha omab deformatsioonienergiat ehk elastse pinge potentsiaali kujul

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{X}, \text{I}, \text{II}, \text{III}), \quad (6.29)$$

kus I, II, III on invariantid tihest deformatsioonitensorist  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{E}$  jne. Lähtume Murnaghan'i mudelist (6.23)<sub>2</sub> —

$$t_{kl} = -\frac{2\rho}{\rho_0} c_{km} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{lm}}. \quad (6.30)$$

Osatuletis

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial c_{lm}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} \frac{\partial \text{I}}{\partial c_{lm}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \frac{\partial \text{II}}{\partial c_{lm}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}} \frac{\partial \text{III}}{\partial c_{lm}}. \quad (6.31)$$

---

### 6.5. Isotroopse ideaalselt elastse tahke keha olekvõrrandid

Kasutades invariantide I<sub>c</sub>, II<sub>c</sub> ja III<sub>c</sub> (tegelikult determinantide) arvutusvalemeid, saame avaldada osatuletised invariantidest kujul

$$\frac{\partial \text{I}_c}{\partial c_{lm}} = \delta_{ml}, \quad \frac{\partial \text{II}_c}{\partial c_{lm}} = \text{I}_c \delta_{ml} - c_{ml}, \quad \frac{\partial \text{III}_c}{\partial c_{lm}} = c_{mn} c_{nl} - \text{I}_c c_{ml} + \text{II}_c \delta_{ml}. \quad (6.32)$$

Kuna  $\rho/\rho_0 = 1/j = \sqrt{\text{III}_c}$ , siis tähistades

$$\begin{cases} a_0(\mathbf{X}, \text{I}_c, \text{II}_c, \text{III}_c) = -2 (\text{III}_c)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_c}, \\ a_1(\mathbf{X}, \text{I}_c, \text{II}_c, \text{III}_c) = -2\sqrt{\text{III}_c} \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c} + \text{I}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} \right), \\ a_2(\mathbf{X}, \text{I}_c, \text{II}_c, \text{III}_c) = 2\sqrt{\text{III}_c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} \end{cases} \quad (6.33)$$

ja kasutades valemeid (6.31) ja (6.32) saame anda avaldisele (6.30) kujul

$$t_{kl} = a_0 \delta_{kl} + a_1 c_{kl} + a_2 c_{km} c_{ml}. \quad (6.34)$$

Et saada lahti  $c_{km}c_{mn}$  tüüpi liikmetest kasutatakse Cayley-Hamiltoni teoreemi maatriksi  $[c_{kl}]$  jaoks<sup>4</sup> ning elimineerime selle abil  $c_{km}c_{ml}$  valemis (6.34). Tulemusena saame pinge-deformatsiooni seose, mis on tuntud kui *Fingeri [1894] olekuvõrrand* —

$$t_{kl} = b_{-1}^{-1} c_{kl} + b_0 \delta_{kl} + b_1 c_{kl}, \quad (6.35)$$

kus

$$\begin{cases} b_{-1} = 2(\text{III}_c)^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c}, \\ b_0 = -2\sqrt{\text{III}_c} \left( \text{II}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} + \text{III}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_c} \right), \\ b_1 = -2\sqrt{\text{III}_c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c}. \end{cases} \quad (6.36)$$

Kokkusurumatu materjali puhul  $\text{III}_c = 1$  ja lisandub hüdrosstaatiline surve  $p$  —

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}^c} c_{kl} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-1}^c} c_{kl}. \quad (6.37)$$

Viimane on tuntud kui *Arriano [1939] ja Rivlini [1948] olekuvõrrand*.

<sup>4</sup>Maatriks  $[c_{kl}]$  rahuldab karakteristlikku võrrandit  $c_{km}c_{mn}c_{nl} - \text{I}_c c_{km}c_{ml} + \text{II}_c c_{kl} - \text{III}_c \delta_{kl} = 0$

### 6.5. Isotroopse ideaalselt elastse tahke keha olekuvõrrandid

### 6 - 20

Loomulikkus olekus on keskkond pinge- ja deformatsioonivaba. Pannes tingimuse  $t_{kl} = 0$  olekuvõrrandisse (6.35), saame täiendava tingimuse deformatsioonienergia funktsioonile  $\Sigma$  —

$$\left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}^c} \right)_0 + 2 \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-1}^c} \right)_0 + \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_{-1}^c} \right)_0 = 0. \quad (6.38)$$

Võrrandi (6.35) saab esitada ka läbi peapikenemiste ja peapingete:

$$t_\alpha = b_{-1} \lambda_\alpha^2 + b_0 + b_1 \lambda_\alpha^{-2}. \quad (6.39)$$

On loomulik eeldada, et

$$t_\alpha \geq t_\beta \quad \text{alati kui} \quad \lambda_\alpha \geq \lambda_\beta. \quad (6.40)$$

Avaldades valemities (6.36) invariantid peapikenemiste  $\lambda_\alpha$  kaudu, saame võrratusest (6.40) (kasutades (6.39)) lisatingimused olekuvõrranditele

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}^c} + \lambda_\alpha^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-1}^c} \geq 0 \quad (6.41)$$

Samad tingimused (6.41) kehtivad ka kokkusurumatu materjali jaoks.

### 6.5.2 Cauchy meetod

Lähtudes paragrahvis 6.4 toodud mudelist on võimalik jõuda olekvõrrandini

$$t_{kl} = g_0 \delta_{kl} + g_1 c_{kl}^{-1} + g_2 c_{km}^{-1} c_{ml}^{-1}, \quad (6.42)$$

kus  $g_\alpha$  sõltuvad vaid deformatsioonitensori invariantidest. Rakendades viimasele avaldisele Cayley-Hamiltoni teoreemi saame olekvõrrandi

$$t_{kl} = h_{-1} c_{kl}^{-1} + h_0 \delta_{kl} + h_1 c_{kl}, \quad (6.43)$$

kus

$$h_{-1} = g_1 + g_2 \mathbf{I}_{-1}^{-1}, \quad h_0 = g_0 - g_2 \mathbf{II}_{-1}^{-1}, \quad h_1 = g_2 \mathbf{III}_{-1}^{-1} \quad (6.44)$$

ja mis on kujult sama, mis Greeni mudelile vastav olekvõrrand (6.35). Greeni meetodi elastsuskonstandid  $b_\alpha$  avaldusid läbi potentsiaali  $\Sigma$ . Konstantide  $h_\alpha$  seos selle potentsiaaliga vajab selgitamist. Nimelt, saab näidata, et kui  $h_\alpha$  rahuldavad tingimusi

✓

---

6.6. Isotroopsete ideaalselt elastsete tahkete kehade olekvõrrandite approksimatsioonid

6 - 22

$$\begin{cases} \frac{\partial h_{-1}}{\partial \mathbf{I}_c} = -\mathbf{II}_c \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{II}_c}, \\ \frac{h_1}{2} + \mathbf{III}_c \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{III}_c} = \frac{\partial h_0}{\partial \mathbf{I}_c} + \frac{\mathbf{II}_c}{\mathbf{III}_c} \frac{\partial h_{-1}}{\partial \mathbf{I}_c}, \\ h_{-1} - \mathbf{III}_c \frac{\partial h_{-1}}{\partial \mathbf{III}_c} = h_{-1} + \mathbf{II}_c \frac{\partial h_{-1}}{\partial \mathbf{II}_c} + \mathbf{III}_c \frac{\partial h_0}{\partial \mathbf{II}_c}, \end{cases} \quad (6.45)$$

siis leidub deformatsioonenergia funktsioon  $\Sigma$  nii, et Greeni meetodil saadud olekvõrrandid (6.35) tilgivad Cauchy meetodil saadud võrranditega (6.43). Seega tõepoolest on Cauchy meetod tildisem.

## 6.6 Isotroopsete ideaalselt elastsete tahkete kehade olekvõrrandite approksimatsioonid

Lõpmata väikeste deformatsioonide puhul annab Cauchy meetod 36 elastsuskonstanti, Greeni meetod aga 21. Nii 21 kui 36 konstanti on liiga palju. Katseliselt pole neid võimalik määrata. Seega on vaja asendada olekvõrrandid teiste, neist vähe erinevate võrranditega. Selleks on vaja matemaatilisi ja füüsikalisi lisaeldusi, mis mudelit lihtsustaksid.

Näiteks:

1) Materjali deformatsioonipiirkond enne purunemist on piiratud — osa materjale puruneb juba väikeste deformatsioonide puhul.

2) Kokkusurumatu materjali mudel — osadel kehaldel muutub maht väga vähe.

### Polinomiaalne approksimatsioon deformatsioones<sup>5</sup>

Iga (meid huvitav) funktsioon on arendatav astmeritta. Olgu potentsiaal  $\Sigma$  funktsioon mingist deformatsiooni mõõdust. Arendame ta ritta nn. loomuliku oleku suhtes. Olgu näiteks  $\Sigma = \Sigma(E_{KLL})$  või  $\Sigma = \Sigma(e_{kl})$  ja arendame nad astmeritta koha  $C_{KLL} = \delta_{KLL}$  või  $c_{kl} = \delta_{kl}$  ümbruses. Säilitades liikmed vaid teatud astmeteni, saame kaks enamlevinud approksimatsiooni

$$\Sigma = \alpha_E \mathbf{I}_E + \frac{1}{2} (\lambda_E + 2\mu_E) (\mathbf{I}_E)^2 + 2\mu_E \mathbf{II}_E + l_E (\mathbf{I}_E)^3 + m_E \mathbf{I}_E \mathbf{II}_E + n_E \mathbf{III}_E \dots \quad (6.46)$$

ja

$$\Sigma = \alpha_e \mathbf{I}_e + \frac{1}{2} (\lambda_e + 2\mu_e) (\mathbf{I}_e)^2 + 2\mu_e \mathbf{II}_e + l_e (\mathbf{I}_e)^3 + m_e \mathbf{I}_e \mathbf{II}_e + n_e \mathbf{III}_e \dots \quad (6.47)$$

Kasutades  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{e}$  invariantide vahelisi seoseid saab tuletada vastavate konstantide vahelised seosed (mida siin ei esita).

<sup>5</sup>Täpsemalt öeldes kasutatakse siin Lagrange'i ja Euleri deformatsioontensoorite komponente

### 6.6. Isotroopsete ideaalselt elustsete tahkete kehade olekuõrrandide approksimatsioonid

Kelvini-Cosserat' mudeli (6.16)<sub>2</sub>, s.o.

$$T_{KL} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}}$$

põhjal saame nüüd

$$\begin{aligned} T_{KL} = & \left[ \alpha_E + \lambda_E \mathbf{I}_E + (3l_E + m_e) (\mathbf{I}_E)^2 + (m_E + n_E) \mathbf{II}_E + \dots \right] \delta_{KLL} + \\ & + [2\mu_E - (m_E + n_E) \mathbf{I}_E + \dots] E_{KLL} + (n_E + \dots) E_{KML} E_{ML}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Murnaghan'i ruumilisest mudelist (6.23)<sub>2</sub> s.o.

$$t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} (\delta_{klm} - 2e_{klm}) \frac{\partial \Sigma}{\partial e_{lm}},$$

aga saame

$$\begin{aligned} t_{kl} = & \left[ \alpha_e + (\lambda_e - \alpha_e) \mathbf{I}_e + \left( 3l_e + m_e - \lambda_e - \frac{\alpha_e}{2} \right) (\mathbf{I}_e)^2 + (m_e + n_e - 2\alpha_e) \mathbf{I}_e + \right. \\ & + \dots \left. \right] \delta_{kl} + [2(\mu_e - \alpha_e) - (m_e + n_e + 2\lambda_e + 2\mu_e - 2\alpha_e) \mathbf{I}_e + \dots] e_{kl} + \\ & + (-4\mu_e + n_e + \dots) e_{klm} e_{ml}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Nii võrrandis (6.48) kui ka (6.49) on piiratud deformatsioonikomponentide ruutudega — kõrgemat järku liikmed on hüljatud.

Loomulik olekus  $\mathbf{E} = \mathbf{e} = 0$  ja seega  $T_{KL} = \alpha_E \delta_{KL}$  ja  $t_{kl} = \alpha_e \delta_{kl}$ , mis esitab hidrostaatilist survet  $p = -\alpha_E = -\alpha_e$ . Kui loomulik olek on pingevaba, siis  $\alpha_E = \alpha_e = 0$ .

Nn. esimest järku teooria annab vtl. juhul olekuvõrrandid

$$\begin{cases} T_{KL} = \lambda_E I_E \delta_{KL} + 2\mu_E E_{KL} \\ t_{kl} = \lambda_e I_e \delta_{kl} + 2\mu_e e_{kl} \end{cases} \quad (6.50)$$

See pole aga mitte midagi muud kui *üldistatud Hooke'i seadus*<sup>6</sup> klassikalise (st. linearse) isotroopse elastusteooria jaoks ja konstandid  $\lambda$  ja  $\mu$  on tuntud kui *Lamé konstandid ehk Lamé koefitsendid*<sup>7</sup>, mille seos tugevusõpetusest tuntud Youngi mooduli  $E$ , Poissoni teguri  $\nu$  ning nihkeelastsusmooduliga  $G$  on järgmine:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G. \quad (6.51)$$

<sup>6</sup>Eringeni põhjal on see tuntud ka kui Hooke'i-Cauchy' seadus.

<sup>7</sup>Elastusteoorias on kombeks nimetada valemities (6.48) ja (6.49) esinevaid konstante järgmiselt  $\alpha$  — esimest järku elastuskonstant;  $\lambda, \mu$  — teist järku elastuskonstandid;  $l, m, n$  — kolmandat järku elastuskonstandid.

### 6.6. Isotroopsete ideaalselt elastsete tahkete kehade olekuvõrrandite approksimatsioonid

### 6 - 26

Selle teooria puhul on deformatsioonid nii väikesed, et erinevus  $E_{KL}$  ja  $e_{kl}$  vahel kaob ning  $e_{kl}$  asemel vaadeldakse lõpmata väikeste deformatsioonide tensorit

$$\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (6.52)$$

Pannes (6.52) ja (6.50)<sub>2</sub> Cauchy esimesse liikumiseadusse, saame võrrandi

$$(\lambda_e + \mu_e) u_{k,kl} + \mu_e u_{l,kk} + \rho (f_i - \ddot{u}_i) = 0, \quad (6.53)$$

mis on tuntud kui *Navier' võrrand* ning mängib fundamentaalset rolli klassikalises homogeensete isotroopsete elastsete kehade elastusteoorias.

Kokkusurumatu materjali jaoks kasutatakse tavaliselt *Mooney-Rivlini arendust*, mis on leitud olevat mugavam —

$$\Sigma = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{rs} \left( \mathbf{I}_{-1} - 3 \right)^r \left( \mathbf{II}_{-1} - 3 \right)^s, \quad (6.54)$$

Tavaliselt kasutatakse siin varianti, mille korral jäävad alles vaid liikmed, kus  $r = 0, s = 1$  ja  $r = 1, s = 0$ , st.,

$$\Sigma = \alpha \left( \mathbf{I}_{-1} - 3 \right) + \beta \left( \mathbf{II}_{-1} - 3 \right), \quad (6.55)$$

kus  $\alpha \geq 0$  ja  $\beta \geq 0$  on tarvilik ja piisav, et  $\Sigma \geq 0$ .

## Polinomiaalne aproksimatsioon sirdegradientides

Deformatsioonenergia funktsiooni on võimalik avaldada kui polinoomi sirdegradientidest  $U_{K;L}$  või  $u_{k;l}$  —

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_N \quad (6.56)$$

Kus  $\Sigma_M$  on  $M$  astme homogeenne polinoom gradientidest  $U_{K;L}$ . Kui loomulik† olek on pingevaba, siis  $\Sigma_1 = 0$ , ülejäänud sõltuvad  $E_{KL}$ -st. Teist järku aproksimatsiooni jaoks näiteks  $\Sigma = \Sigma_2 = A_{KLMN} E_{KL} E_{MN}$ , kus materjalikonstandid  $A_{KLMN}$  peavad rahuldama tingimusi  $A_{KLMN} = A_{LKMN} = A_{KLNM} = A_{MNKL}$ , mis tagab, et  $\Sigma \geq 0$ .

---

## 6.7. Elastusteooria põhivõrrandite süsteem

### 6.7 Elastusteooria põhivõrrandite süsteem

Elastusteooria ülesannete lahendamiseks tuleb koostada võrrandisüsteem, mille lahend peab olema ühene. Selleks tuleb kasutada jäävusseadusi, olekuvõrrandeid, geomeetrilisi ja kinemaatilisi seoseid, alg- ja rajatingimusi ning vajadusel ka pidevustingimusi. Käesolevas paragrahvis esitame elastusteooria põhivõrrandite süsteemi<sup>8</sup> tahkiste jaoks ja järgmises vaatlеме vedelikke. Lihtsuse mõttes piirdume ka tahkiste korral Euleri koordinaatidega.

#### 1. Massi jäävuse seadus.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{\text{III}_c} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_{-1}}}. \quad (6.57)$$

#### 2. Cauchy I ja II liikumisseadus.

$$\begin{cases} t_{kl,l} + \rho (f_k - a_k) = 0, \\ t_{kl} = t_{lk}. \end{cases} \quad (6.58)$$

---

<sup>8</sup>Võib öelda ka elastusteooria fundamentaalne võrrandisüsteem. Tihti öeldakse ka, et tegu on nn. kinnise võrrandisüsteemiga (i.k. *closed system*). Viimase all mõistetakse peaaegu alikult just seda, et võrrandisüsteem oleks selline, millel on ühene lahend.

### 3. Keskonna olekvõrrandid (isotroopne keskkond).

a) kokkusurutav — näiteks Fingeri olekvõrrand (6.35)

$$t_{kl} = b_{-1}^{-1} c_{kl} + b_0 \delta_{kl} + b_1 c_{kl}, \quad (6.59)$$

$$\begin{cases} b_{-1} = 2(\text{III}_c)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c}, \\ b_0 = -2\sqrt{\text{III}_c} \left( \text{II}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} + \text{III}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_c} \right), \\ b_1 = -2\sqrt{\text{III}_c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c}. \end{cases} \quad (6.60)$$

b) kokkusurumatu — näiteks Ariano-Rivlini olekvõrrand (6.37)

$$t_{kl} = -p \delta_{kl} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}^{-1}} c_{kl} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-1}^{-1}} c_{kl}. \quad (6.61)$$

Olekvõrrandid peavad rahuldama lisatingimusi (6.41)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}^{-1}} + \lambda^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_{-1}^{-1}} \geq 0. \quad (6.62)$$

### 6.7. Elastusteooria põhivõrrandite süsteem

## 4. Geomeetrilised ja kinemaatilised seosed.

Deformatsioonitensordid —

$$c_{kl} = X_{K,k} X_{L,l}, \quad c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,L}. \quad (6.63)$$

Kiirus ja kiirendus —

$$v_k = \frac{D u_k}{D t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u_{k,l} v_l, \quad a_k = \frac{D v_k}{D t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v_{k,l} v_l. \quad (6.64)$$

5. Alg- ja rajatingimused. Algingimused kirjeldavad olukorda mahus  $\mathcal{V}$  alg- hetkel  $t = 0$  —

$$x_k(\mathbf{X}, 0) = x_{0k}, \quad \dot{x}_k(\mathbf{X}, 0) = v_{0k}. \quad (6.65)$$

Kui keha pinnal (keskkonna piiril)  $S$  on pinged  $t_{(\mathbf{n})k}$  teada, siis

$$t_{(\mathbf{n})k} = t_{lk} n_l = s_k, \quad \text{pinnal } S. \quad (6.66)$$

Kui teame pinna  $S$  siirdeid, siis võime kirjeldada kas  $x_k$  või  $u_k$  pinnal  $S$ .

Võimalik on ka nn. segarajatingimuste juht, kus osal rajapinnal on antud siirded, osal pinged.

6. Sobivus- ehk pidevustingimused. Juhul kui põhimuutuajateks on deformatsioonid või pinged, või kui teoorias esineb olulisi lihtsustusi (näiteks plaatide ja koorikute teoorias), läheb tildjuhul vaja veel nn. sobivus- ehk pidevustingimusi.

## 6.8 Vedelike dünaamika

### 6.8.1 Stokesi vedelik ja Newtoni vedelik

Elmistes alajaotustes vaatlesime elastseid materjale, st. materjale, kus pinge sõltus vaid deformatsioonist. Taoliste materjalide puhul on tähtis teatud deformatsioonimata olek, mida nimetatakse loomulikkuks olekuks. Selline käitumine on tavaliselt omane tahkistele (tahketele kehadele).

Teise tähtsa materjalide klassi moodustavad vedelikud. Tegelikult on kõik vedelikud *kokkusurutavad ja viskoossed*. Kuna aga nimetatud omadused varieeruvad vedelike puhul väga suurtel piirides, siis on väga tihti võimalik vähemalt üht neist hüljata. Väga suur osa vedelikest on praktiliselt kokkusurumatud. Edaspidises piirdumegi vaid kokkusurumatute vedelikega.

*Viskoosete vedelike* puhul on leitud, et pinged sõltuvad deformatsiooni kiirusest. Täpsemalt öeldes, pingetensor sõltub deformatsiooni kiiruse tensorist. Sellist vedeliku nimetatakse *Stokesi vedelikuks*. Vedeliku, mille korral viskoossed efektid on hüljatud, nimetatakse *ideaalseks vedelikuks*.

---

### 6.8. Vedelike dünaamika

Stokesi vedeliku olekuvõrrand on esitatav kujul

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + Dt_{kl}(d_{qs}), \quad Dt_{kl}(0) = 0. \quad (6.67)$$

kus  $p$  on hüdrostaatiline surve ja  $Dt_{kl}$  viskoossusest põhjustatud dissipatiivne pinge. Kui deformatsiooni kiirus on null, on null ka vastav dissipatiivne pinge. Kui kokkusurumatu vedeliku olekuvõrrand on esitatud kujul

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\mu d_{kl}, \quad (6.68)$$

st., pinge  $Dt_{kl}$  ja deformatsiooni kiiruse  $d_{kl}$  vaheline seos on lineaarne, siis nimetatakse teda *Newtoni vedelikuks*. Viimases nimetatakse kordajat  $\mu \geq 0$  *viskoossuskoeffitsiendiks*.

### 6.8.2 Vedelike dünaamika põhivõrrandite süsteem

Vedelike dünaamika põhivõrrandite süsteem on oma olemuselt analoogiline elastusteooria põhivõrrandite süsteemiga, koosnedes jäävusseadustest, olekuvõrrandest, kinemaatilistest (geomeetrilistest) seostest ning raja- ja algtingimustest.

#### 1. Massi jäävuse seadus:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0. \quad (6.69)$$



## 2. Cauchy I ja II liikmissesadus:

$$\begin{cases} t_{k,l} + \rho (f_k - a_k) = 0, \\ t_{kl} = t_{lk}. \end{cases} \quad (6.70)$$

## 3. Olekuvõrrandid (kokkusuurumatu Stokesi vedelik):

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + Dt_{kl}(d_{qs}), \quad Dt_{kl}(0) = 0. \quad (6.71)$$

Aproksimatsioonid

1) Lineaarne (Newtoni vedelik)

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\mu d_{kl}. \quad (6.72)$$

2) Ruutpolünoom

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \alpha_1 d_{kl} + \alpha_2 d_{km} d_{ml}, \quad (6.73)$$

kus kordajad

$$\alpha_\gamma = \alpha_\gamma (\mathbb{II}_d, \mathbb{III}_d), \quad \gamma = 1, 2 \quad (6.74)$$

peavad rahuldama tingimusi

$$-2\alpha_1 \mathbb{II}_d + \alpha_2 \mathbb{III}_d \geq 0. \quad (6.75)$$

## 6.8. Vedelike dünaamika

## 4. Kinemaatilised seosed:

Deformatsioonikiiruse tensor

$$2d_{kl} = v_{k,l} + v_{l,k} \quad (6.76)$$

kiirus ja kiirendus

$$v_k = \frac{Dx_k}{Dt}, \quad a_k = \frac{Dv_k}{Dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l} v^l. \quad (6.77)$$

## 5. Raja- ja algtingimused:

Kui pinge  $t_{(n)k}$  on ette antud pinnal  $S$ , siis rajatingimused esitatakse kujul

$$t_{(n)k} = t_k n_l = s_k, \quad \text{pinnal } S. \quad (6.78)$$

Lamb tõestas, et vabal vedeliku pinnal või eri vedelike kontaktpinnal peab pingevektor olema pidev funktsioon. Siit järeldub kiirusvektori pidevus vaadeldaval pinnal.

Tahke keha ja vedeliku kontaktpinna puhul on vaidlusaluseks küsimuseks olnud hõõrde arvesse võtmine. Klassikalises teoorias hõõret ei arvetata, st. kiiruste erinevus vedeliku ja tahke keha pinnal

$$\Delta \mathbf{v} = 0. \quad (6.79)$$

Levinuim kompromiss —

$$\Delta \mathbf{v}_n = 0, \quad \Delta \mathbf{v}_t = \kappa \mathbf{t}_t, \quad (6.80)$$

kus indeksid  $n$  ja  $t$  tähistavad kiirus- ja pingevektori normaali ja puutujasuunalisi komponente. Koeffitsent  $\kappa$  sõltub termodünaamilistest muutujatest. Üldiselt on  $\kappa$  väärtaus nulli lähedane, v.a. väikestel survetel.

Algtingimustega antakse ette kiiruste väli  $\mathbf{v}$  kogu vedeliku mahu  $\mathcal{V}$  ulatuses, st.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \quad (6.81)$$

Seega määratlevad alg- ja rajatingimused vedeliku oleku vastavalt alghetkel ja vaadeldavat mahtu  $\mathcal{V}$  imbritseval pinnal  $S$ . Nad peavad olema sellised, et võrrandisüsteemi lahend oleks ühene.

Ülaltoodud võrranditele ja seostele võib sõltuvalt ülesande iseloomust lisanduda näiteks energia jäävuse seadus, Fourier' soojusjuhtivuse seadus jne., jne.

### 6.8. Vedelike dünaamika

#### 6.8.3 Navier'-Stokesi võrrandid

Kui asendame pingetensori olekuvõrrandist (6.68) Cauchy esimesse liikumisseadusesse (liikumishulga tasakaalu seadus)

$$t_{k,l} + \rho(f_k - a_k) = 0$$

ning arvestame, et deformatsioonikiiruse tensor

$$2d_{k,l} = (v_{k,l} + v_{l,k}),$$

siis saame kuulsa *Navier'-Stokesi võrrandid* kokkusurumatu materjali jaoks —

$$\rho \left( \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l} v_l \right) = \rho f_k - p_{,k} + \mu (v_{k,l} + v_{l,k})_{,l}. \quad (6.82)$$

Kokkusurumatuse tingimust võib vaadelda kui tiheduse  $\rho$  konstantsust ajas  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  ja ruumis  $\nabla \cdot \rho \equiv \rho_{,k} = 0$ . Seega, lokaalse massi jäävuse seaduse põhjal

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + (\rho v_k)_{,k} = \underbrace{\rho_{,k}}_{=0} v_k + \rho v_{k,k} = \rho v_{k,k} = 0.$$

Seega on vedeliku kokkusurumatuse tingimus väljendatav kujul

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = v_{k,k} = 0. \quad (6.83)$$

Teisisõnu, kokkusurumatu vedeliku puhul on kiiruse divergents null. Vedelike korral on tingimust (6.83) mugav kasutada, sest nende käitumise uurimisel ongi peatähelepanu pööratud kiirusele  $\mathbf{v}$ .

Arvestades kokkusurumatuse tingimust (6.83) on võrrandi (6.82) p.p. viimane liige  $v_{l,k} = (v_{l,l})_{,k} = 0$  ja Navier'-Stokesi võrrandid (6.82) saavad kuju

$$\rho \left( \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l} v_l \right) = \rho f_k - p_{,k} + \mu v_{k,ll}. \quad (6.84)$$

Viimased võrrandid võib esitada ka n. vektorkujul:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (6.85)$$

### 6.8. Vedelike dünaamika

Kui kasutada nn. klassikalist DRK tähistust (koordinaadid  $x, y, z$ , massijõud  $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ , ja kiirus  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ) siis saavad Navier'-Stokesi võrrandid (6.84) kuju

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{array} \right. \quad (6.86)$$

## 6.9 Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine

### 6.9.1 Sissejuhatus

Klassikalises elastusteoorias vaadeldakse homogeenseid isotroopseid lineaarselt elastseid kehasid ja kasutatakse kahte materjalikonstanti —  $m$ . Lamé konstanti<sup>9</sup> —  $\lambda_e$  ja  $\mu_e$  ning olekuvõrrandina tildistatud Hooke'i seadust

$$t_{kl} = \lambda_e \tilde{e}_{mm} \delta_{kl} + 2\mu_e \tilde{e}_{kl}. \quad (6.87)$$

Nende konstantide määramine on suhteliselt lihtne. On vaja sooritada vaid kaks eksperimenti — tõmme ja nihke. Mittelinearse teooria olekuvõrrandid homogeen- sele isotroopsele materjalile omavad aga tunduvalt keerukamat kuju. Kokkusu- rru- tava materjali puhul näiteks

$$t_{kl} = b_{-1} c_{kl}^{-1} + b_0 \delta_{kl} + b_1 c_{kl},$$

kus konstandid  $b_\alpha$  sõltuvad deformatsioonitensori invariantidest I, II ja III. Elastuskonstantide määramine on siin tunduvalt keerulisem, sest keskkonna mit- telinearsuse tõttu ei saa kasutada superpositsiooni printsiipi. Koeffitsendid  $b_\alpha$

<sup>9</sup>Võib loomulikult kasutada ka tugevusõpetusest rohkem tuntud kahte konstanti — Youngi moodulit  $E$  ja nihkeelastuskonstanti  $G$ .

---

### 6.9. Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine

6 - 40

piütakse määrata läbi potentsiaali  $\Sigma$ . See lihtsustab küll asja, kuid kokkusu- rutavate materjalide puhul on praktiliste tulemuste saamine, vähemalt Eringeni andmeil, ülimalt keeruline.

Alljärgnevalt vaatleme kokkusu- rumatuid materjale, mille olekuvõrrandid avaldu- vad kujul.

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial I} c_{kl} - 2\frac{\partial\Sigma}{\partial II} c_{kl}, \quad (6.88)$$

kus invariantid vastavad deformatsioonitensorile  $c_{kl}^{-1}$ ,  $\Sigma = \Sigma(I, II)$  ja III = 1. Kuna deformeerumata olekus I = II = 3, siis on leitud, et potentsiaali  $\Sigma$  võib esitada järgmise rea kujul

$$\Sigma = \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn} (\mathbf{I} - 3)^m (\mathbf{II} - 3)^n, \quad (6.89)$$

kus  $\alpha_{mn}$  on konstandid ja  $\alpha_{00} = 0$ . Kuna väikeste deformatsioonide puhul on suurused I – 3 ja II – 3 väikesed, siis piirduetakse reaga

$$\Sigma = \alpha_{10} (\mathbf{I} - 3) + \alpha_{01} (\mathbf{II} - 3). \quad (6.90)$$

Kummilaadsete materjalide puhul kasutatakse potentsiaali

$$\Sigma = \alpha_{10} (\mathbf{I} - 3). \quad (6.91)$$

Selliseid materjale võiks eesti keeles nimetada (inglise keele eeskujul) *uus-Hooke'i materjalideks* või *neo-Hooke'i materjalideks*<sup>10</sup>. Kui (6.91) ei rahulda siis kasutatakse ka potentsiaali

$$\Sigma = \alpha_{10}(\mathbf{I} - 3) + f(\mathbf{II} - 3), \quad (6.92)$$

kus  $f$  sõltub vaid argumentidest II.

Järgnevalt esitatakse ülevaade mõningatest eksperimentidest, mis algselt on teostatud Rivlini ja Sandersi poolt. Nimetatud teadlased korraldasid terve rea eksperimente „kummist lehega”, kus tekitati selliseid homogenseid deformatsioone, kus üks invariandidest I või II omas fikseeritud väärtust. Eksperimentideseeria tulemusena saadi olekuparameetrite  $\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{I}}$  ja  $\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{II}}$  ning invariantide I ja II vahelised sõltuvused. Nii suurte kui väikeste deformatsioonide puhul ilmes eksperimentaalseid ebatäpsusi, näiteks kui invariantid I ja II olid viiest väiksemad, muutusid tulemused väga tundlikuks eksperimenti vigade suhtes. Olekuvõrrandis (6.88) esinev tundmatu rõhk  $p$  määrati rajatingimustest.

<sup>10</sup>I. k. *neo-Hookean materials*. Materjale, mille korral materjali käitumine on kirjeldatav Hooke'i seaduse abil nimetatakse inglise keeles *Hookean materials*.

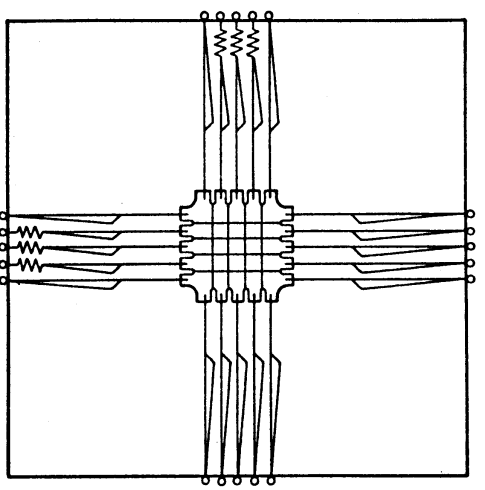
### 6.9. Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine

6 - 42

#### 6.9.2 Puhas homogeenne deformatsioon (kokkusurumatu lehe ühtlane laienemine)

Katse skeem on kujutatud joonisel 6.1. Ruudukujulist õhukest kummist lehte tõmmatakse risti külgedega. Pikenemiskoeffitsientide  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  arvutamiseks tuleb mõõta lehele joonistatud ruutude külgede pikkused deformeerunud olekus. Ruudu külgede pikkusühiku kohta mõjuvad jõud  $t_1$  ja  $t_2$  saadakse mõõtes vedrudes mõjuvad jõud.

Lähtume Fingeri olekuvõrrandeist (6.36), mis puhta homogense deformatsiooni korral saavad kuju<sup>11</sup>



$$t_{kk} = -p + 2\lambda_k^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{I}} - \frac{2}{\lambda_k^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{II}}. \quad (6.93)$$

Joonis 6.1: Puhata homogeenne deformatsiooni eksperiment — «kummist lehe» ühtlane tõmme ristuvates suundades.

<sup>11</sup>Vt. A. Salupere, Elastussteooria (tehnilise füüsika erialale) Ioengutkonsept. [http://cens.ioc.ee/~salupere/1k/elastus\\_2.pdf](http://cens.ioc.ee/~salupere/1k/elastus_2.pdf)

Kuna pindadel  $z = \pm H/2$  (kus  $H$  on lehe paksus)  $t_{33} = 0$ , siis saame viimasest avaldisest ellimnerida  $p$  —

$$\begin{cases} t_{11} = 2 \left( \lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \lambda_2^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \\ t_{22} = 2 \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \lambda_1^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \\ t_{33} = t_{kl} = 0, \quad k \neq l \end{cases} \quad (6.94)$$

Kokkusurumatuse tõttu  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Seega invariantid

$$I = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad II = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2, \quad III = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1. \quad (6.95)$$

Lehe serva pikusuhiku kohta mõjuvad jõud  $t_1$  ja  $t_2$  avalduvad järgmiselt

$$t_1 = t_{11} \frac{H}{\lambda_1}, \quad t_2 = t_{22} \frac{H}{\lambda_2}, \quad (6.96)$$

kus nii serva pikkus kui lehe paksus  $H$  on möödetud deformeerumata olekus.

### 6.9. Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine

6 - 44

Avaldistest (6.94) ja (6.96) saame avaldada  $\frac{\partial \Sigma}{\partial I}$  ja  $\frac{\partial \Sigma}{\partial II}$  sõltuvana jõududest  $t_1$  ja  $t_2$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma}{\partial I} = \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ \frac{\lambda_1^3(t_1/H)}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}} - \frac{\lambda_2^3(t_2/H)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}} \right] \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial II} = \frac{1}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[ \frac{\lambda_1(t_1/H)}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}} - \frac{\lambda_2(t_2/H)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}} \right] \end{cases} \quad (6.97)$$

Möötes nüüd  $t_1$  ja  $t_2$  etteantud  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  puhul, saab leida vastavad  $\frac{\partial \Sigma}{\partial I}$  ja  $\frac{\partial \Sigma}{\partial II}$  väärtused. Avaldiste (6.95) kaudu saame omakorda vastavad I ja II väärtused ning meil on võimalik esitada  $\frac{\partial \Sigma}{\partial I}$  ja  $\frac{\partial \Sigma}{\partial II}$  kui invariantide I ja II funktsioone.

Eksperimenti käigus muudeti  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  väärtusi nii, et emb-kumb, kas I või II oli jääv. Avaldise (6.95) põhjal

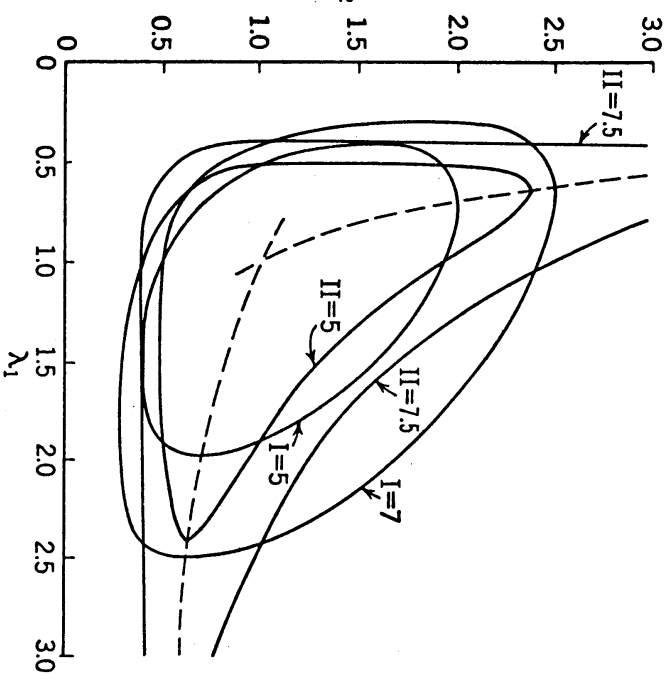
$$\begin{cases} \lambda_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ (I - \lambda_1^2) \pm \sqrt{(I - \lambda_1^2)^2 - 4\lambda_1^{-2}} \right\}, \quad I = const. \\ \lambda_2^2 = \frac{1}{2\lambda_1^2} \left\{ (II - \lambda_1^{-2}) \pm \sqrt{(II - \lambda_1^{-2})^2 - 4\lambda_1^2} \right\}, \quad II = const. \end{cases} \quad (6.98)$$

Seega pole pikenenemiskoeffitsente  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  võimalik suvaliselt ette anda — fikseeritud I ja II puhul on tegu suletud kõveratega  $\lambda_1 - \lambda_2$  tasandil (vt. joonis 6.2).

Punktiirjooned esitavad kõveraid  $\lambda_2 = \lambda_1^{-2}$  ( $t_2 = 0$ ) ja  $\lambda_1 = \lambda_2^{-2}$  ( $t_1 = 0$ ), mis vastavad tõmbele servade sihis.

Tehud eksperimentid näitasid, et

- $\partial\Sigma/\partial I$  on konstantne piirkonnas  $5 \leq I < 12$  ja  $5 \leq II \leq 30$  ning  $\partial\Sigma/\partial II$  on vaid II funktsioon;
- suhe  $(\partial\Sigma/\partial II)/(\partial\Sigma/\partial I) \approx 1/8$  invarianti II väikeste väärtuste jaoks ning kahanes kiiresti suuremate puhul;
- avaldist (6.92) võib kasutada si-seenergia  $\Sigma$  ja invariantide vahelise sõltuvuse aproksimeerimiseks (mõistlikes piires).



Joonis 6.2: Pikenemiskoeffitsientide  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  vaheline sõltuvus invariantide I ja II erinevate väärtuste puhul.

### 6.9. Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine

#### 6.9.3 Puhas nihe

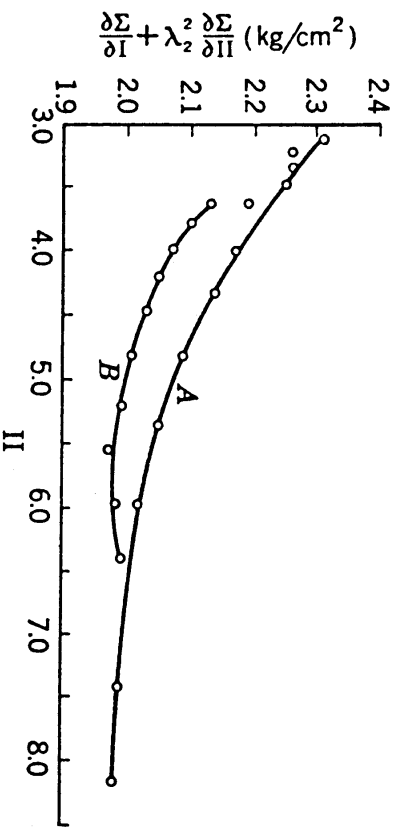
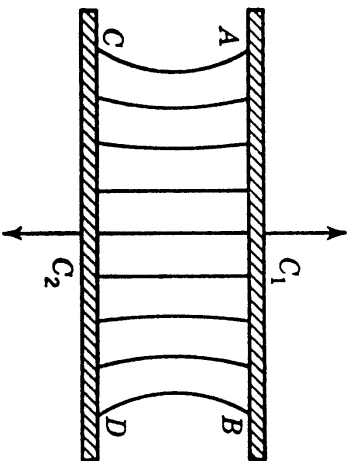
Puhas nihe<sup>12</sup> on selline homogeenne deformatsioon, mille puhul üks pikennemiskoeffitsientidest, näiteks  $\lambda_2$ , hoitakse konstantne ja teisi kahte muudetakse. Valemite (6.94)<sub>1</sub> ja (6.96) põhjal

$$t_1 = 2H \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \right) \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \lambda_2^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right). \quad (6.99)$$

Hoides nüüd  $\lambda_2 = \text{const}$ . ja mõõtes  $t_1$  erinevate  $\lambda_1$  puhul saame joonistada suurus  $\partial\Sigma/\partial I + \lambda_2^2 \partial\Sigma/\partial II$  sõltuvana teisest invariantist II. Kuna suurusel  $\partial\Sigma/\partial I$  leiti olema konstantne väärtus  $5 \leq I \leq 12$  ja  $5 \leq II \leq 30$  puhul, siis saame esitada ka  $\partial\Sigma/\partial II$  ja II vahelise sõltuvuse. Joonis 6.3 kirjeldab vaadeldavat eksperimenti. Kitsas õhuke kummiriba on kinnitatud klambrite  $C_1$  ja  $C_2$  vahele. Kui rakendada risti klambritega jõud  $t_1$  (möödetunan pikkusühiku kohta) siis tekib joonisel kujutatud deformatsioon. Riba keskosa deformatsioon on aproksimeeritav puhta nihke kaudu. Joonisel 6.4 esitab kõver  $A$  katsetulemusi  $\lambda_2 = 1$  jaoks ja kõver  $B$   $\lambda_2 = 0,776$  jaoks. Eelmisena vaadeldud eksperimentis tuvastati, et

- $(\partial\Sigma/\partial II)/(\partial\Sigma/\partial I) = 1/8$  kui  $II = 5$ .  $\lambda_2 = 1$  puhul saab nüüd jooniselt 6.4

<sup>12</sup>I. k. Pure shear



Joonis 6.3: Puhta nihke eksperiment.

Joonis 6.4: Suurus  $\partial\Sigma/\partial I + \lambda_2^2 \partial\Sigma/\partial II$  sõltuvana invariandist II. Kõver A vastab puhtale nihkele ( $\lambda_2 = 1$ ) ja kõver B nihkele koos tõmbega ( $\lambda_2 = 0, 776$ ).

määrata suuruse  $\partial\Sigma/\partial I + \partial\Sigma/\partial II$  väärtuse ( $\lambda_2 = 1$ !). Edasi saab leida, et II = 5 puhul  $\partial\Sigma/\partial I = 1, 84 \text{ kg/cm}^2$  ja  $\partial\Sigma/\partial II = 0, 23 \text{ kg/cm}^2$ . Eelmise eksperimenti põhjal eeldatakse, et  $\partial\Sigma/\partial I = 1, 84 \text{ kg/cm}^2 = const.$  ja  $\partial\Sigma/\partial II$  sõltub vaid invariandist II. Seega saab määrata  $\partial\Sigma/\partial II$  väärtused suvalise II väärtuse jaoks. Kõver B joonisel 6.4 esitab eksperimenti tulemusi  $\lambda_2 = 0, 776$  jaoks. Need tulemused lähevad hästi kokku tulemustega, mis saadakse avaldisest  $\partial\Sigma/\partial I + 0, 776^2 \partial\Sigma/\partial II$ , kui suurused  $\partial\Sigma/\partial I$  ja  $\partial\Sigma/\partial II$  võtta eksperimentidist, kus  $\lambda_2 = 1$ .

### 6.9. Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine

6 - 48

#### 6.9.4 Tõmme

Tõmbe<sup>13</sup> puhul  $t_{22} = t_{33} = 0$ . Seega võttes avaldises (6.94)<sub>2</sub>  $t_{22} = 0$  saame  $\lambda_1 = \lambda_2^{-2}$  tähist  $\lambda$ . Avaldis (6.94)<sub>1</sub> ja invariandid saavad nüüd kuju

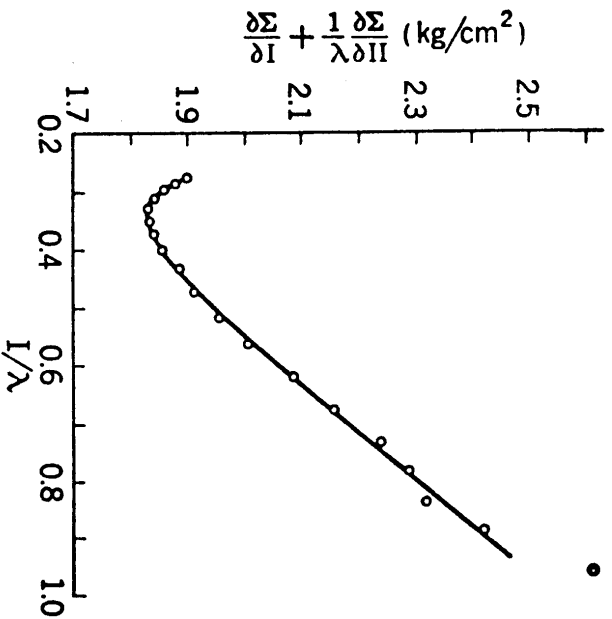
$$t_{11} = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left( \frac{\partial\Sigma}{\partial I} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\Sigma}{\partial II} \right), \quad I = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}, \quad II = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}. \quad (6.100)$$

Katsekehaks on siin tihtlase ristlõikega «kummikang». Rakendatav pikijõud  $N = At_{11}/\lambda$  ( $A$  — ristlõike algpindala). Seega mõttes jõu  $N$  iga  $\lambda$  jaoks saame arvitada  $\partial\Sigma/\partial I + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial II$ . Tulemused on esitatud joonisel 6.5 (NB! horisontaalteljel on  $1/\lambda$ ). Kui kasutati eelmistes eksperimentides saadud suuruste  $\partial\Sigma/\partial I$  ja  $\partial\Sigma/\partial II$  väärtusi, siis leiti, et avaldise  $\partial\Sigma/\partial I + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial II$  väärtus ühtis väga hästi eksperimenti tulemustega.

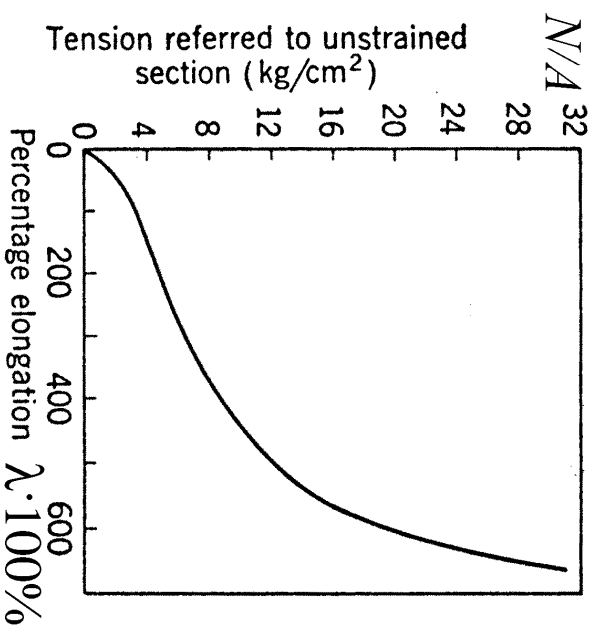
Joonisel 6.6 on esitatud tõmbejõud jagatuna algpindalaga sõltuvana pikennemiskoeffitsiendist  $\lambda$ .

<sup>13</sup>I. k. Simple extension





Joonis 6.5: Suuruste  $1/\lambda$  ja  $\partial\Sigma/\partial I + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial II$  vaheline sõltuvus.



Joonis 6.6: Tõmbejõu sõltuvus pikennemiskoe-ftsensidist

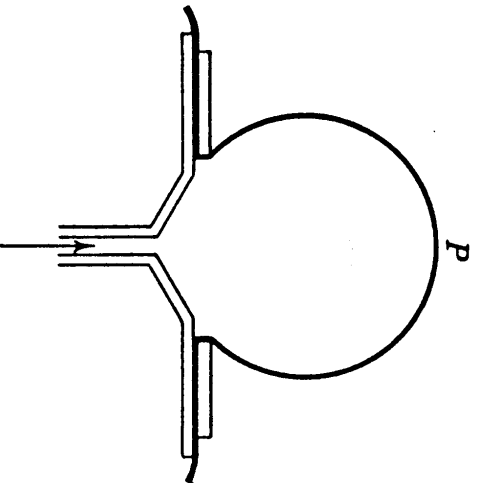
### 6.9. Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine

6 - 50

#### 6.9.5 Ühtlane kahedimensionaalne tõmme

Tähistame

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda_3 = 1/\lambda^2 = \lambda', \quad \text{ehk } \lambda^2 = 1/\lambda'. \quad (6.101)$$

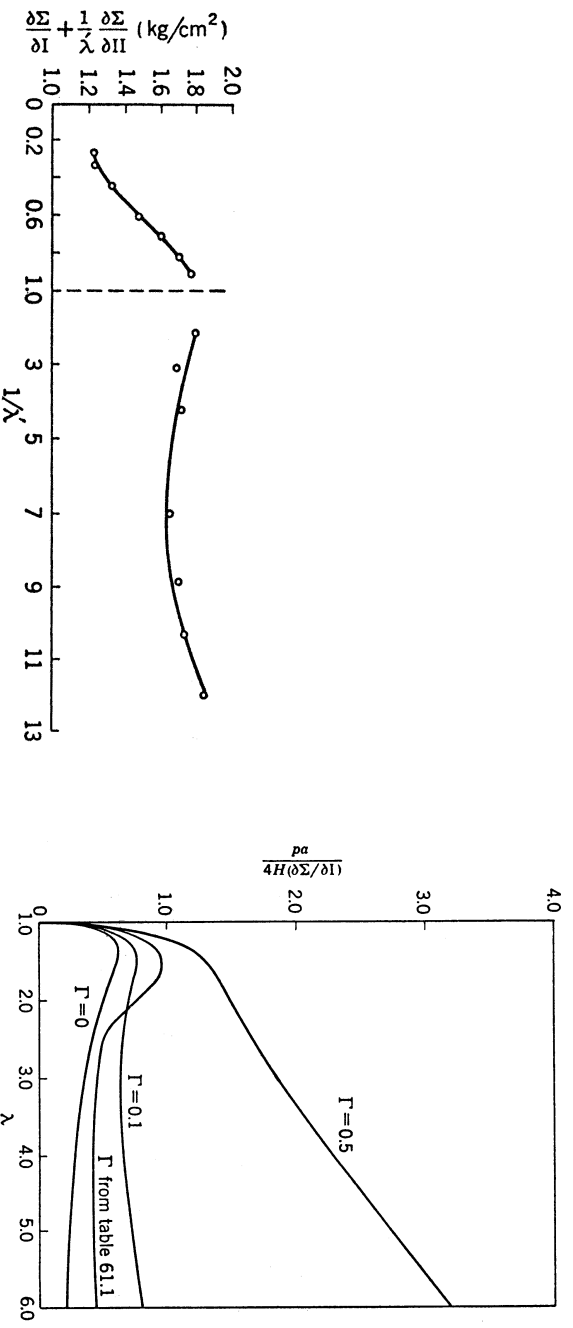


Joonis 6.7: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme

Joonisel 6.7 kujutatud katse puhul puhutakse servadest kinnitatud kummikile alla õhku ja saavutatakse meid huvitav deformatsioon vaadeldava katsekeha keskosas. Tabelis 1 on esitatud  $\partial\Sigma/\partial I$  ja II vaheline sõltuvus, eeldades, et  $\partial\Sigma/\partial I = const$ .

Tabel 1

$\lambda^2 \equiv 1/\lambda'$	II	$\frac{\partial\Sigma}{\partial I}/\frac{\partial\Sigma}{\partial I}$
0,5	4,25	0,16
0,6	3,69	0,26
0,7	3,35	0,33
0,8	3,14	0,39
3	9,67	0,12
5	25,4	0,06
7	49,3	0,04
9	81,2	0,03
11	121	0,035



Joonis 6.8: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme — suuruste  $\partial\Sigma/\partial I + 1/\lambda' \cdot \partial\Sigma/\partial II$  ja  $1/\lambda'$  vaheline sõltuvus.

Joonis 6.9: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme — suuruste  $p$  ja  $\lambda$  vaheline sõltuvus.

Joonis 6.8 esitab suuruste  $\partial\Sigma/\partial I + 1/\lambda' \cdot \partial\Sigma/\partial II$  ja  $1/\lambda'$  vahelist sõltuvust (NBI kohal  $1/\lambda' = 1$  toimub skaala muutus).

Rõhk  $p$  keras ja tõmme  $T$  pikkusühiku kohta deformeeritud kiles (punktis  $P$ ) on

### 6.9. Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine

6 - 52

seotud valemiga

$$p = \frac{2T}{r}, \quad (6.102)$$

kus  $r$  on kõverusraadius punktis  $P$ . Kuna deformeeritud olekus on kile paksus  $H/\lambda^2$ , siis saame valemitest (6.94), (6.101) ja (6.102), et

$$p = \frac{2Ht_{11}}{r\lambda^2} = \frac{4H}{r} \left(1 - \frac{1}{\lambda^6}\right) \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I} + \lambda^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial II}\right). \quad (6.103)$$

Joonise 6.8 ja tabeli 1 koostamisel ongi kasutatud valemit (6.103), st. möödetakse  $p$  ja  $r$  iga  $\lambda$  jaoks ning leitakse suurus  $\partial\Sigma/\partial I + 1/\lambda' \cdot \partial\Sigma/\partial II$ . Joonis 6.9 esitab rõhu  $p$  ja pikenenise  $\lambda$  vahelisi seoseid erinevate  $\Gamma = (\partial\Sigma/\partial II)/(\partial\Sigma/\partial I)$  väärtuste jaoks ( $a$  — sfäärilise «õhupalli» algradius.)

**Näide.** Õhupalli täispuhumisel on kõige suuremat rõhku tarvis algul. Kui palli diameeter on saavutanud teatud väärtuse, siis palli suurendamiseks vajalik surve väheneb (võrdle joonis 6.9).

## 6.10 Üldistatud Hooke'i seadus<sup>14</sup>

### 6.10.1 Deformatsioonide avaldamine pingete kaudu

Klassikalises (lineaarses) elastsusteoorias kehtib *üldistatud Hooke'i seadus*: deformatsioonitensori komponendid on lineaarsed funktsioonid pingetensori komponentidest. Kõige üldisemal juhul saab vastavad seosed esitada kujul<sup>15</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = C'_{11}\sigma_x + C'_{12}\sigma_y + C'_{13}\sigma_z + C'_{14}\tau_{xy} + C'_{15}\tau_{yz} + C'_{16}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y = C'_{21}\sigma_x + C'_{22}\sigma_y + C'_{23}\sigma_z + C'_{24}\tau_{xy} + C'_{25}\tau_{yz} + C'_{26}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z = C'_{31}\sigma_x + C'_{32}\sigma_y + C'_{33}\sigma_z + C'_{34}\tau_{xy} + C'_{35}\tau_{yz} + C'_{36}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = C'_{41}\sigma_x + C'_{42}\sigma_y + C'_{43}\sigma_z + C'_{44}\tau_{xy} + C'_{45}\tau_{yz} + C'_{46}\tau_{zx} \\ \gamma_{yz} = C'_{51}\sigma_x + C'_{52}\sigma_y + C'_{53}\sigma_z + C'_{54}\tau_{xy} + C'_{55}\tau_{yz} + C'_{56}\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} = C'_{61}\sigma_x + C'_{62}\sigma_y + C'_{63}\sigma_z + C'_{64}\tau_{xy} + C'_{65}\tau_{yz} + C'_{66}\tau_{zx} \end{array} \right. \quad (6.104)$$

Viimased avaldised sisaldavad 36 *elastsuskonstanti* — seda on palju!

<sup>14</sup>Käesolev paragrahv on pärit minu ehitusteaduskonnas peetava loengukursuse „Elastsusõpetus“ kolmandast peatükist ning pole pandud kirja tensorikirjaviisis, vt. <http://cens.ioc.ee/~salupere/loko.html>

<sup>15</sup>Sellisel kujul on pingete ja deformatsioonide vahelised seosed esitatud näiteks õpikutes R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967 ja V. I. Samul, Osnovõ Teorii Uprugosti i Plastišnosti /Elastsus- ja plastusteooria alused/, Moskva, Vöšaja Škola, 1982.

### 6.10. Üldistatud Hooke'i seadus

Kui eeldada, et keha on ideaalselt elastne (st. peale koormuse kõrvaldamist taastub algne kuju) ja isotroopne, siis jääb järele vaid kaks sõltumatut elastsuskonstanti, mis on määratavad väga lihtsate eksperimentide abil ja on kasutuses ka tugevusõpetuses. Need kaks konstanti on Youngi moodul  $E$  ja Poissoni koefitsient (Poissoni tegur)  $\nu$

- Tõmme—surve ( $x$ -telje sihis).
  - Elastsuskonstant ehk Youngi moodul  $E$ :  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$
  - Poissoni koefitsient  $\nu$ :  $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$
- Nihe ( $xy$  tasandis).
  - Nihkeelastusmoodul  $G$ :  $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ , kus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (6.105)$$

Kuna nihkeelastusmoodul  $G$  on avaldatav  $E$  ja  $\nu$  kaudu, siis ei saa teda pidada iseseisvaks elastsuskonstandiks.

Üldistatud Hooke'i seaduse tuletamiseks vaatleme lõpmata väikest isotroopset risttahukat, milles mõjuvad vaid normaalpinged  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Pinge  $\sigma_x > 0$  põhjustab pikennemist  $x$ -telje sihis ja lühenemist  $y$ - ja  $z$ -telje sihis. Analoogiline toime on normaalpingetel  $\sigma_y > 0$  ja  $\sigma_z > 0$ . Seega on summaarne suhteline pikennemine  $x$ -telje sihis ehk normaaldeformatsioon

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (6.106)$$

Nihkepingete ja nihkedeformatsioonide vahelised seosed on määratud Hooke'i seadusega iga koordinaattasandi jaoks sõltumatult, s. t.,  $\tau_{xy}$  põhjustab vaid nihet  $\gamma_{xy}$ , jne. (vrd. normaaldeformatsioonidega).

Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad *üldistatud Hooke'i seadust* isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (6.107)$$

### 6.10. Üldistatud Hooke'i seadus

#### 6.10.2 Hooke'i seadus ruumdeformatsiooni jaoks

Vastavalt üldistatud Hooke'i seadusele (6.107)

$$\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{=\theta} = \frac{(1-2\nu)}{E} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{=I_1^\sigma} \quad (6.108)$$

Seega

$$\theta = \frac{(1-2\nu)I_1^\sigma}{E}. \quad (6.109)$$

Suurust  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  nimetatakse *ruumdeformatsiooniks* ja ta on tihtlasi ka deformatsioonitensori esimene invariant. Tuues sisse ruumpaisumismooduli  $K$  ja keskmise pinge  $\sigma_0$ ,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1^\sigma}{3}, \quad (6.110)$$

saame lineaarse seose keskmise pinge ja ruumdeformatsiooni vahel kujul

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (6.111)$$

### 6.10.3 Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu

Liidame avaldise (6.107)<sub>1</sub> paremale poolele ja lahutame avaldise (6.107)<sub>1</sub> paremast poolst suuruse  $\frac{1}{E}\nu\sigma_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_x - \nu I_1^\sigma]. \quad (6.112)$$

Avaldades (6.109)-st invarianti  $I_1^\sigma = \frac{E\theta}{1 - 2\nu}$ , saame

$$\varepsilon_x = \frac{(1 + \nu)\sigma_x}{E} - \frac{\nu\theta}{(1 - 2\nu)}, \quad \text{kust} \quad \sigma_x = \frac{E\nu\theta}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{1 + \nu} \quad (6.113)$$

Tuues sisse *Lamé koefitsiendid*

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad (6.114)$$

saame valemist (6.113)<sub>2</sub>  $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$ .

### 6.10. Üldistatud Hooke'i seadus

Leides analoogilised avaldised  $\sigma_y$  ja  $\sigma_z$  jaoks ning avaldades seostest (6.107) nihkepinged, olemegi saanud *Hooke'i seaduse alternatiivse kuju*

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (6.115)$$

Kasutades viimaseid valemleid leiame seose pingetensori ja deformatsioonitensori esimese invarianti vahel

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{=I_1^\sigma} = 3\lambda\theta + 2\mu \underbrace{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}_{\theta}, \quad \text{kust} \quad I_1^\sigma = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (6.116)$$

Kui tähistada keskmist normaaldeformatsiooni

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\theta}{3}, \quad (6.117)$$

siis saame seose keskmise pinge ja keskmise normaaldeformatsiooni vahel

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0. \quad (6.118)$$

### 6.10.4 Anisotroopsed kehad

Paljudes õpikutes<sup>16</sup> esitatakse valemitega (6.104) analoogilised pingete ja deformatsioonide vahelised seosed natuke teisel kujul. Esiteks tuuakse sisse tähistused

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad \sigma_4 = \tau_{yz}, \quad \sigma_5 = \tau_{xz}, \quad \sigma_6 = \tau_{xy} \quad (6.119)$$

ja

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_4 = 2\gamma_{yz}, \quad \varepsilon_5 = 2\gamma_{xz}, \quad \varepsilon_6 = 2\gamma_{xy}. \quad (6.120)$$

Seejärel esitatakse pinge sõltuvana deformatsioonist kujul

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (6.121)$$

<sup>16</sup>Vt. näiteks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999

ja deformatsioon sõltuvana pingest kujul

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (6.122)$$

Elastuskoefitsentidest moodustatud matriksit  $[S_{ij}]$  nimetatakse *jäikusmatriksiks*<sup>17</sup>. Matriksit  $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$  võib eesti keeles seega nimetada *pöördjäikusmatriksiks*<sup>18</sup>.

<sup>17</sup>T. k. *stiffness matrix*

<sup>18</sup>T. k. *compliance matrix*. Tehnikasõnastikus on ingliskeelse sõna *compliance* eestikeelseks vasteks pakutud ka *vetruvus*.

Elmistes alajaotustes vaatlesime isotroopseid materjale ning seal oli pingete ja deformatsioonide vaheliste seoste kirjeldamiseks vaja vaid kahte sõltumatut elastsuskoeffitsienti. Anisotroopse keha puhul on elastsuskonstantide arv loomulikult suurem. Kuna anisotroopseid materjale on mitut liiki, siis tuleb vajalik elastsuskonstantide arv määrata iga liigi jaoks eraldi.

Ortotroopseid materjale, näiteks vineer, on üks sagedamini esinevaid anisotroopse materjali liike. Sellisest materjalist kehade jaoks on võimalik määrata 3 omavahel ristuvat telge (peasuunada), mille sihhis rakendatud normaalpinged ei põhjusta telgedevaheliste nurkade muutumist. Ortotroopse materjali elastised omadused ei muutu telgede pöörämisel 180° võrra, kuid muutuvad iga teistsuguse pöörde korral. Ortotroopse materjali iseloomustamiseks on vaja tihesat elastsuskonstanti. Valemid (6.122) saavad selliste materjalide korral kuju

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad (6.123)$$

kus

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3}, \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \\ S_{55} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{44} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Konstandid  $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{13}$  ja  $G_{23}$  on vastavalt Youngi moodulid, Poissoni tegurid ja nihkeelastsusmoodulid peatelgedega 1, 2, 3 määratud sihtides<sup>19</sup>.

<sup>19</sup>Vt. lisaks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999 §1.4.6