

# Peatükk 3

## Deformeeruva keskkonna kinemaatika

### 3.1. *Euleri ja Lagrange'i koordinaadid*

3 - 2

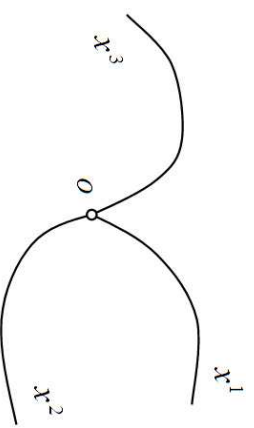
### 3.1 Euleri ja Lagrange'i koordinaadid

Pideva keskkonna mehaanikas on liikumise kirjeldamisel kahte liikvi koordinaadid: *Euleri – ja Lagrange'i koordinaadid*. Esmalt defineerime nad tildiste kõverjooneliste koordinaatidena.

#### Euleri koordinaadid

Toome sisse ajas muutumatu kõverjoonelise koordinaatsüsteemi  $x^1, x^2, x^3$ , mille suhtes vaadeldakse keskkonna materiaalsete punktide liikumist. Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Euleri koordinaatsüsteemiks* ehk *ruumiliseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate  $x^1, x^2, x^3$  — *Euleri koordinaatideks* (*EK*) ehk *ruumilisteks koordinaatideks*. Ühe punktmassi liikumist Euleri koordinaatsüsteemis kirjeldavad kolm võrrandit

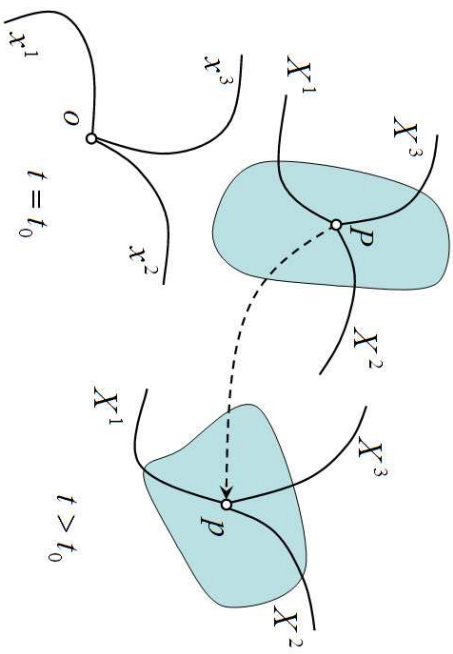
$$x^i = f^i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$



Joonis 3.1: Euleri koordinaadid

## Lagrange'i koordinaadid

Fikseerime ajahetkel  $t = t_0$  keskkonna materiaalsete punktide asendi ja seome nendega kõverjoonelise koordinaatsüsteemi  $X^1, X^2, X^3$ . Kui nüüd ajahetkel  $t > t_0$  keskkond liigub ja muudab kuju, siis liigub ja muudab kuju ka koordinaatsüsteem  $X^1, X^2, X^3$ .



Joonis 3.2: Lagrange'i koordinaadid

Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Lagrange'i*

*koordinaatsüsteemiks* ehk *ma-*

*teriaalseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate  $X^1, X^2, X^3$  — *Lagrange'i koordinaatideks (LK) ehk materiaalseteks koordinaatideks*.

Lagrange'i koordinaadid deformeeruvad koos kehaga.

### 3.1. Euleri ja Lagrange'i koordinaadid

## Descartes'i ristkoordinaadid (DRK)<sup>1</sup>

Käesoleva kursuse algul esitame kõik PKM võrrandid DRKs ja seega pole vaja eristada alumisi ja ülemisi indekseid. Seetõttu tähistame DRK korral EK  $x_1, x_2, x_3$  ning vastavaid baasivektoreid  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$  ja  $\mathbf{i}_3$ . Kui vaja, siis täpsustame, et meil on Euleri Descartes'i ristkoordinaadid (EDRK).

Kõiki suurusid, mis on esitatud EKs tähistame väikeste tähtedega. Mõned näited:

- ruumipunktl  $p$  kohavektor:  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$
  - punkti kiirus EKs:  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} \equiv \dot{\mathbf{x}} = (v_1, v_2, v_3)$
  - punkti kiirendus EKs:  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{p}} \equiv \ddot{\mathbf{x}} = (a_1, a_2, a_3)$
  - pingetensori komponendid:  $t_{ij}$ ;
- Euleri deformatsioonitensori komponendid:  $e_{ij}$
- $x_i, v_i, a_i, f_i, c_{ij} \dots$

<sup>1</sup>DRK pole EK ja LK kõrval kolmas koordinaatide tüüp, vaid annab tihed võimaluse esitada EK ja LK.

Lagrange'i koordinaate tähistame DRK korral  $X_1, X_2, X_3$  ning vastavaid baasivektoreid  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$  ja  $\mathbf{I}_3$ .

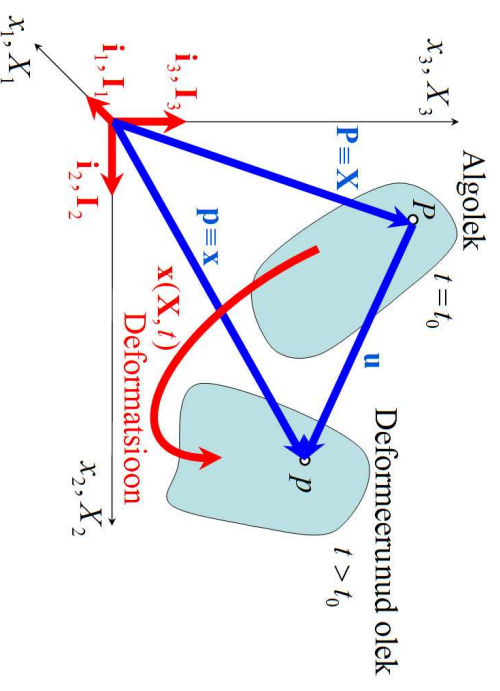
Kõiki suurusi, mis on esitatud LKS tähistame suurte tähtedega. Mõned näited:

- materiaalse punkti  $P$  kohavektor:  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$
- punkti kiirus LKS:  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{P}} \equiv \dot{\mathbf{X}} = (V_1, V_2, V_3)$
- punkti kiirendus LKS:  $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{X}} \equiv \ddot{\mathbf{X}} = (A_1, A_2, A_3)$
- pingetensori komponendid:  $T_{IJ}$ ; Lagrange'i deformatsioonitensori komponendid:  $E_{IJ}$
- $X_I, V_I, A_I, F_I, C_{IJ} \dots$

### 3.2. Liikumise kirjeldamine

### 3 - 6

Üldjuhul eeldatakse, et keha (keskkond) on alghetkel  $t = t_0$  deformeerumata olekus<sup>2</sup>, nn. *algolekus*. Välismõjude toimel hakkab keha deformeeruma ja kui vaadelda mingit hetke  $t > t_0$  siis on keha *deformeerunud olekus*<sup>3</sup> (joon. 3.3). Tihti öeldakse, et alghetkel hõlvab keha (materiaalne maht<sup>4</sup>  $\mathcal{V}$ , mida timbritseb materiaalne pind<sup>5</sup>  $\mathcal{S}$ ) ruumipiirkonna  $B$ . Deformeerunud olekus hõlmab vaadeldav keha ruumipiirkonna  $b$  ((ruumi)mahu  $v$ , mida timbritseb (ruumi)pind  $s$ ).



Joonis 3.3: Deformatsioon, algolek ja deformeerunud olek.

<sup>2</sup>I. k. *reference configuration*

<sup>3</sup>I. k. *deformed configuration, actual configuration*

<sup>4</sup>I. k. *material volume*

<sup>5</sup>I. k. *material surface*

Materiaalse punkti  $P$  kohavektor

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{X} = X_K \mathbf{I}_K, \quad (3.2)$$

ruumipunkti kohavektor

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = x_k \mathbf{i}_k \quad (3.3)$$

ja siirdevektor

$$\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k = U_K \mathbf{I}_K. \quad (3.4)$$

*Liikumisseaduseks* nimetatakse üheparameetrilist koordinaatide teisendust

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{ehk} \quad x_k = x_k(X_1, X_2, X_3, t) \quad (3.5)$$

või tema pöördteisendust

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \text{ehk} \quad X_K = X_K(x_1, x_2, x_3, t), \quad (3.6)$$

mis siirdab materiaalse punkti  $P$  ruumipunkti  $p$ . Parameetrik on siin aeg  $t$ . Alghetkel  $t = t_0$  kujutavad teisendused (3.5) ja (3.6) (parameetrist sõltumatuid) koordinaat teisendusi.

### 3.2. Liikumise kirjeldamine

Tihti on kasulik kui  $t = t_0$  puhul teljestikud  $x_k$  ja  $X_K$  ühtiksid, st., hetkel  $t = t_0$   $x_k = X_K$  kui  $k = K$ . Sel juhul on materiaalse punkti asukoht alghetkel  $t = t_0$  automaatselt teada ning asukoha muutus algasendi suhtes on hetkel  $t > t_0$  lihtsalt leitav (vt. joon. 3.3).

**Märkused:**

- On ilmne, et kuna LK liiguvad (deformeeruvad) koos kehaga, siis üldjuhul on nad DRK vaid alghetkel.
- Väga sageli esitatakse liikumisseadus (3.5) kujul  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})$ .

Teisendused (3.5) ja (3.6) peavad olema teineteise ühesed pöördteisendused. \* Eldame, et nii funktsioon (3.5) kui (3.6) kuuluvad klassi  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Vastavalt matemaatilisest analüüsist tuntud teoreemile ilmutamata funktsioonist on see tingimus täidetud ruumipunkti  $p$  ümbruses  $\delta$  parajasti siis, kui jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right| \neq 0 \quad |x_k - x_k^0| < \delta. \quad (3.7)$$

Siin  $x_k^0$ ,  $k = 1, 2, 3$  on ruumipunkti  $p$  koordinaadid ja

$$\left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right| = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial X_1 & \partial x_1 / \partial X_2 & \partial x_1 / \partial X_3 \\ \partial x_2 / \partial X_1 & \partial x_2 / \partial X_2 & \partial x_2 / \partial X_3 \\ \partial x_3 / \partial X_1 & \partial x_3 / \partial X_2 & \partial x_3 / \partial X_3 \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Tingimus (3.7) väljendab tegelikult pidevuse aksiooni, mille põhjal positiivne † lõplik aine maht ei saa deformeeruda nullmahuks ega lõpmata suureks mahuks<sup>6</sup> ning ükski ainehulk ei tungi teise ainehulga sisse<sup>7</sup>. Teisisõnu, joon deformeerub alati jooneks, pind pinnaks ja maht mahuks.

Kui keskkonnas esineb katkevusi (näit. kihiline materjal või praod), pole eeltoodu otseselt kasutatav ja tuleb sisse tuua lisatingimusi. Samuti tuleb erilist tähelepanu pöörata võimalikele singulaarsetele punktidele, joontele või/ja pindadele, kus tingimus (3.7) pole täidetud.

*Funktsioonide (3.5) ja (3.6), st., liikumiseseaduste leidmine ongi üks pideva keskkonna mehaanika põhivõttesandeid.*

---

<sup>6</sup>ik. indestructibility of matter

<sup>7</sup>ik. impenetrability of matter

Kui liikumine on kirjeldatud avaldistega (3.5), siis öeldakse, et on antud *liikumise Lagrange'i kirjeldus* — antud juhul saame teada, millises ruumipunktis  $x_k$  asub materiaalne punkt  $X_K$  hetkel  $t$ . Kui  $t = t_0$  puhul EK ja LK ühtisid, siis saame liikumisseadusest (3.5) teada, millises ruumipunktis asub hetkel  $t$  see materiaalne punkt, mis alghetkel oli ruumipunktis  $x_k = X_K$  ( $k = K$ ). Lagrange'i kirjeldust on otstarbekas kasutada deformeeruva tahke keha ülesannete puhul, sest siin keha peajasjalikult vaid deformeerub välisjõudude toimel ning tema materiaalsed punktid ei paigutu ruumis oluliselt timber. Kui fikseerime materiaalse punkti  $X_K$ , siis avaldistest (3.5) saame tema liikumisseaduse kujul

$$x_k = f_k(t), \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Avaldised (3.6) esitavad *liikumise Euleri kirjelduse* — nende põhjal saab määrata materiaalse punkti  $X_K$ , mis hetkel  $t$  asub ruumipunktis  $x_k$ . Seda moodust on mõistlik kasutada näiteks hüdrodünaamika ülesannete puhul, sest vedeliku “osakesed” (materiaalsed punktid) paigutuvad ruumis oluliselt timber. Kui fikseerime ruumipunkti  $x_k$ , siis saab liikumisseadus (3.6) kujul

$$X_K = F_K(t), \quad K = 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

ja esitab materiaalseid punkte, mis liiguvad läbi selle fikseeritud ruumipunkti. •

**Näide 3.2.1.** Liikumise Lagrange'i kirjeldus

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2(e^t - 1), \\ x_2 = X_1(e^{-t} - 1) + X_2, \\ x_3 = X_3. \end{cases}$$

*Liikumise Euleri kirjeldus*

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ \dot{X}_2 = \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ \dot{X}_3 = x_3. \end{cases}$$

*Alghetkel LK ja EK ühtivad. Kas liikumine on üheselt määratud?*

*Jakobiaan*

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right| = \dots$$

...

### 3.3. Siirdeväli ja deformatsioonigradient

3 - 12

## 3.3 Siirdeväli ja deformatsioonigradient

### 3.3.1 Siire

Vastavalt joonisele 3.3 on *punkti P siire*

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (3.11)$$

*Siirdevektor* on liikumisseaduste (3.5) ja (3.6) abil avaldatav nii LKs kui EKs:

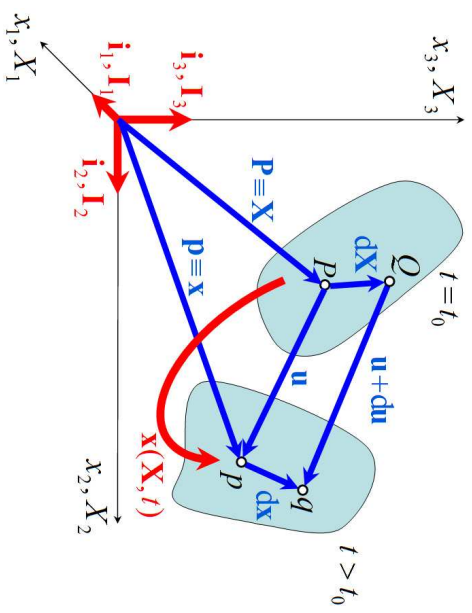
$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = U_K \mathbf{I}_K, \quad U_K = x_k(X_1, X_2, X_3, t) - X_K, \quad \text{kus } k = K \quad (3.12)$$

ja

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = u_k \mathbf{i}_k, \quad u_k = x_k - X_K(x_1, x_2, x_3, t), \quad \text{kus } k = K. \quad (3.13)$$

Valem (3.12) esitab siiret, mille on hetkeks  $t$  saanud materiaalne punkt  $\mathbf{X}$  ja valem (3.13) määrab siirde, mille on saanud materiaalne punkt, mis hetkel  $t$  asub ruumipunktis  $\mathbf{x}$ .

Vaatleme joonist 3.4. Materiaalse punkti  $P$  kohavektori  $\mathbf{X}$  diferentsiaal  $d\mathbf{X}$  viib materiaalsest punktist  $P$  punkti  $Q$ . Ruumipunkti  $p$  kohavektori  $\mathbf{x}$  diferentsiaal  $d\mathbf{x}$  viib ruumipunktist  $p$  punkti  $q$ . Deformatsiooni käigus siirduv materiaalne punkt  $P$  ruumipunkti  $p$ , materiaalne punkt  $Q$  ruumipunkti  $q$  ja vektor  $d\mathbf{X}$  deformeerub vektoriks  $d\mathbf{x}$ . Punktist  $P$  viib punkti  $p$  vektor  $\mathbf{u}$  ja punktist  $Q$  punkti  $q$  vektor  $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ .



Joonis 3.4:

Diferentsiaalid  $d\mathbf{X}$  ja  $d\mathbf{x}$  on vaadeldavad kui lõpmata väikese pikkusega joonemendid, mille pikkuste ruudud

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_K dX_K \quad (3.14)$$

ja

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_k dx_k \quad (3.15)$$

mängivad edaspidi tähtsat rolli.

### 3.3. Siirdeväli ja deformatsioonigradient

### 3 - 14

#### 3.3.2 Deformatsioonigradient

Järgnevalt toome sisse deformatsioonigradiendi mõiste ja defineerime viimase abil deformatsioonitensordid. Diferentsiaalid  $d\mathbf{X}$  ja  $d\mathbf{x}$  on omavahel seotud järgmiselt:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (3.16)$$

kus tensorit

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \nabla_{0\mathbf{x}} \quad (3.17)$$

nimetatakse *deformatsioonigradiendiks* ja  $\nabla_0$  on gradientoperaator  $\mathbf{X}$  suhtes. Seose (3.16) pöördteisendus avaldub kujul

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.18)$$

kus

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \equiv \nabla \mathbf{X}, \quad (3.19)$$

ja  $\nabla$  on gradientoperaator  $\mathbf{x}$  suhtes.

Deformatsioonigradiendid  $\mathbf{F}$  ja  $\mathbf{F}^{-1}$  kujutavad endast nn. *kahepunktilisi tensorväli*, st. nad teisenevad kui tensorid nii  $\mathbf{x}$  kui  $\mathbf{X}$  suhtes.

Indekskirjaviihis saame tensorid  $\mathbf{F}$  ja  $\mathbf{F}^{-1}$  esitada kujul

$$F_{kK} = x_{k,K} \equiv \frac{\partial x_k(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial X_K} \quad \text{ja} \quad F_{kK}^{-1} = X_{K,k} \equiv \frac{\partial X_K(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}, \quad (3.20)$$

kus *indeksis esinev koma tähistab osatuletise võtmist vastavalt avaldisele (3.20)*.

Indekskujul saavad avaldised (3.16) ja (3.18) kujul

$$dx_k = x_{k,K} dX_K \quad \text{ja} \quad dX_K = X_{K,k} dx_k. \quad (3.21)$$

Valemite (3.7) ja (3.8) põhjal saame öelda, et jakobiaan  $j = |\mathbf{F}|$ .

Maatrikskujul

$$[\mathbf{F}] = [x_{k,K}] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad [\mathbf{F}^{-1}] = [X_{K,k}] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.3. Siirdeväli ja deformatsioonigradient

### 3 - 16

Osatuletise leidmise ahelreegli põhjal:

$$x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl} \quad \text{ja} \quad X_{K,k} x_{k,L} = \delta_{KL}. \quad (3.23)$$

Seega,  $x_{k,K}$  ja  $X_{K,k}$  on teineteise pöördtensorid ja analoogiliselt pöördmaatriksi leidmise eeskirjale

$$X_{K,k} = \frac{\text{cofactor } x_{k,K}}{j} = \frac{1}{2j} e_{KLM} e_{klm} x_{l,L} x_{m,M} \quad (3.24)$$

ning

$$x_{k,K} = \frac{\text{cofactor } X_{K,k}}{j} = \frac{1}{2j} e_{klm} e_{KLM} X_{L,l} X_{M,m}, \quad (3.25)$$

kus jakobiaan

$$j = |x_{k,K}| = \frac{1}{6} e_{KLM} e_{klm} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M}. \quad (3.26)$$

Viimast diferentseerides saadakse *Jacobi samasus*

$$\frac{\partial j}{\partial x_{k,K}} = \text{cofactor } x_{k,K} = j X_{K,k}. \quad (3.27)$$



## 3.4 Deformatsioonitensordid

### 3.4.1 Cauchy ja Greeni deformatsioonitensordid

DRK korral on kohavektorite  $\mathbf{X}$  ja  $\mathbf{x}$  diferentsiaalid avaldatavad kujul

$$d\mathbf{X} = dX_K \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = dx_k \mathbf{i}_k \quad (3.28)$$

Valemite (3.21) põhjal saame anda viimastele kuju

$$d\mathbf{X} = dx_k \mathbf{c}_k \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = dX_K \mathbf{C}_K, \quad (3.29)$$

kus vektorid

$$\mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} X_{K,k} \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} x_{k,K} \mathbf{i}_k \quad (3.30)$$

on käsitletavat kui „uued baasivektorid“. Valemite (3.28)–(3.30) põhjal on selge, et

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_K &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_K} & \text{ja} & \quad \mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} \\ \mathbf{C}_K &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_K} & \text{ja} & \quad \mathbf{c}_k = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.4. Deformatsioonitensordid

### 3 - 18

Definitsioonidest (3.30) saame omakorda avaldada DRK baasivektorid

$$\mathbf{I}_K = x_{k,K} \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) \quad \text{ja} \quad \mathbf{i}_k = X_{K,k} \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t). \quad (3.32)$$

Pärast uute baasivektorite  $\mathbf{c}_k$  ja  $\mathbf{C}_K$  sissetoomist saame kohavektorite  $\mathbf{X} \equiv \mathbf{P}$  ja  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{p}$  diferentsiaalid avaldada neljal (2+2) erineval moel:

$$d\mathbf{X} = \underbrace{\mathbf{I}_K dX_K}_{\text{i}} = \underbrace{\mathbf{c}_k dx_k}_{\text{ii}} \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{i}_k dx_k}_{\text{iii}} = \underbrace{\mathbf{C}_K dX_K}_{\text{iv}}; \quad (3.33)$$

- i määrab muutuva suuruse  $d\mathbf{X}$  alghetkel (kui  $t = t_0$ ),
- ii määrab  $d\mathbf{X}$  muutumise seadus EK-s (muutumatud koordinaadid),
- iii määrab  $d\mathbf{x}$  igal ajahetkel, sest EK on (ajas) muutumatud koordinaadid ja  $\mathbf{x}$  on ruumipunkti kohavektor,
- iv määrab muutumatu suuruse  $d\mathbf{x}$  muutvates koordinaatides  $X_K$  suvalisel hetkel  $t \geq t_0$ .

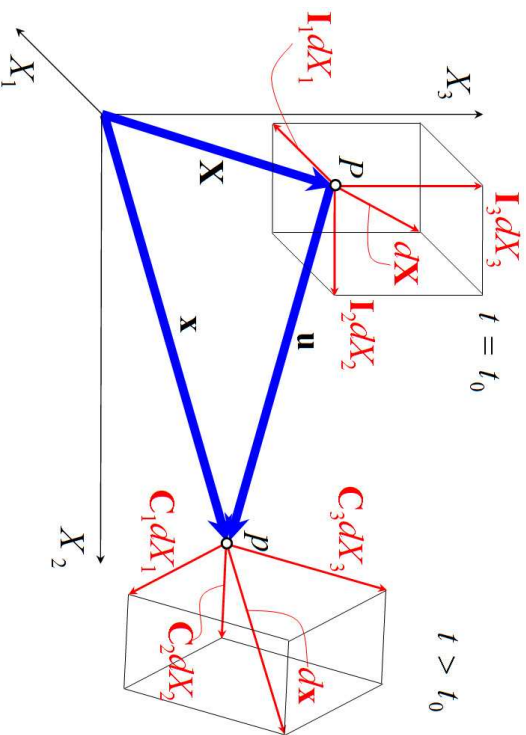
### Märkus:

Näiv vastuolu valemis (3.33) (ning ka eelnevates ja järgnevates valemites) EK ja LK vahel kõrvaldatakse liikumisseaduste (3.5) ja (3.6) abil.

Valenmid (3.30) ja (3.32) annavad deformatsioonigradiendile järgmise tõlgenduse:

- deformatsioonigradiend  $F_{kK} \equiv x_{k,K}$  teisendab baasivektori  $\mathbf{i}_k$  uueks baasivektoriks  $\mathbf{C}_K$  ja uue baasivektori  $\mathbf{c}_k$  tagasi DRK baasivektoriks  $\mathbf{I}_K$
- deformatsioonigradiend  $F_{Kk}^{-1} \equiv X_{K,k}$  teisendab baasivektori  $\mathbf{I}_K$  uueks baasivektoriks  $\mathbf{c}_k$  ja uue baasivektori  $\mathbf{C}_K$  tagasi DRK baasivektoriks  $\mathbf{i}_k$

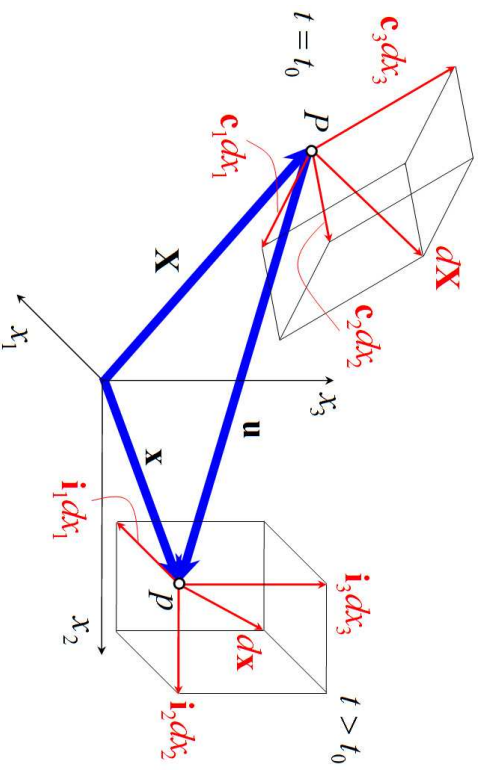
Deformatsiooni käigus muutub vektor  $d\mathbf{X}$  vektoriks  $d\mathbf{x}$ . Lagrange'i kirjelduse korral võib seda protsessi näitlikustada joonisel 3.5 kujutatud moel: algse risttahuka servavektorid  $\mathbf{I}_1 dX_1$ ,  $\mathbf{I}_2 dX_2$  ja  $\mathbf{I}_3 dX_3$  on viidud (kõverjoonelise) rööptahuka servavektoriteks  $\mathbf{C}_1 dX_1$ ,  $\mathbf{C}_2 dX_2$  ja  $\mathbf{C}_3 dX_3$ .



Joonis 3.5: Algse risttahuka deformeerumine rööptahukaks.

### 3.4. Deformatsioonitensordid

Euleri kirjelduse korral saame vektori  $d\mathbf{X}$  deformatsiooni vektoriks  $d\mathbf{x}$  visualiseerida joonisel 3.6 kujutatud moel: algse rööptahuka servavektorid  $\mathbf{c}_1 dx_1$ ,  $\mathbf{c}_2 dx_2$  ja  $\mathbf{c}_3 dx_3$  muutuavad deformatsiooni käigus risttahuka servavektoriteks  $\mathbf{i}_1 dx_1$ ,  $\mathbf{i}_2 dx_2$  ja  $\mathbf{i}_3 dx_3$ .



Joonis 3.6: Algse rööptahuka deformeerumine risttahukaks.

Lähtudes vektorite  $\mathbf{c}_k$  ja  $\mathbf{C}_K$  definitsioonidest saame avaldada

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \stackrel{(3.29)}{=} c_{kl} dx_k dx_l \quad \text{ja} \quad ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \stackrel{(3.29)}{=} C_{KL} dX_K dX_L, \quad (3.34)$$

kus

$$c_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l \stackrel{(3.30)}{=} \delta_{KL} X_{K,k} X_{L,l} = X_{K,k} X_{K,l} \quad (3.35)$$

ja

$$C_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L \stackrel{(3.30)}{=} \delta_{kl} x_{k,K} x_{l,L} = x_{k,K} x_{k,L}. \quad (3.36)$$

Tensorit  $c_{kl}$  nimetatakse *Cauchy deformatsioonitensioriks*<sup>8</sup> ja  $C_{KL}$  *Greeni deformatsioonitensioriks*.<sup>9</sup> Mõlemad nad on sümmeetrilised ja positiivselt määratud.<sup>10</sup>

**Ülesanne.** Kuidas esitada Cauchy ja Greeni deformatsioonitensiorid (3.35) ja (3.36) valemitega (3.17) ja (3.19) esitatud deformatsioonigradientide  $\mathbf{F}$  ja  $\mathbf{F}^{-1}$  abil?

Arvestades valemeid (3.22) ...

---

<sup>8</sup>I. k. *Cauchy's deformation tensor*

<sup>9</sup>I. k. *Green's deformation tensor*

<sup>10</sup> $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} > 0$

### 3.4. Deformatsioonitensiorid

#### 3.4.2 Fingeri ja Piola deformatsioonitensiorid

Toome nüüd sisse vektorite  $\mathbf{c}_k$  ja  $\mathbf{C}_K$  pöördvektorid ehk kaasvektorid<sup>11</sup>

$$\mathbf{c}_k^{-1}(\mathbf{x}, t) = x_{k,K} \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}_K^{-1}(\mathbf{X}, t) = X_{K,k} \mathbf{i}_k, \quad (3.37)$$

mille korral

$$\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l^{-1} = \dots = \delta_{kl} \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L^{-1} = \dots = \delta_{KL}. \quad (3.38)$$

Vektorite  $\mathbf{c}_k^{-1}$  ja  $\mathbf{C}_K^{-1}$  abil defineeritakse *Fingeri ja Piola deformatsioonitensiorid*:<sup>†</sup>

$$c_{kl}^{-1} = \mathbf{c}_k^{-1} \cdot \mathbf{c}_l^{-1} = \delta_{KL} x_{k,K} x_{l,L} = x_{k,K} x_{l,K} \quad (3.39)$$

ja

$$C_{KL}^{-1} = \mathbf{C}_K^{-1} \cdot \mathbf{C}_L^{-1} = \delta_{kl} X_{K,k} X_{L,l} = X_{K,k} X_{L,k}. \quad (3.40)$$

Fingeri ja Cauchy deformatsioonitensiorid ning Piola ja Greeni deformatsioonitensiorid on teineteiste pöördtensorid, st.

$$c_{km}^{-1} c_{ml} = \delta_{kl} \quad \text{ja} \quad C_{KM}^{-1} C_{ML} = \delta_{KL}. \quad (3.41)$$

---

<sup>11</sup>I. k. *reciprocal vectors*

### 3.4.3 Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensordid

Arvestades kohavektorite diferentsiaalide avaldisi (3.28) ja (3.29) ning Cauchy ja Greeni deformatsioonitensorige definitioone (3.35) ja (3.36) saame avaldada suurused  $dS^2$  ja  $ds^2$  kahel erineval moel:

$$dS^2 = \delta_{KL} dX_K dX_L = c_{kl} dx_k dx_l \quad \text{ja} \quad ds^2 = \delta_{kl} dx_k dx_l = C_{KL} dX_K dX_L. \quad (3.42)$$

Nende vahe  $ds^2 - dS^2$  iseloomustab kahe materiaalse punkti vahelise kauguse muutu deformatsiooni käigus ja seda saab avaldada nii Lagrange kui Euleri koordinaatides:

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{Kl}(\mathbf{X}, t) dX_K dX_L = 2e_{kl}(\mathbf{x}, t) dx_k dx_l, \quad (3.43)$$

kus

$$2E_{Kl} = C_{KL}(\mathbf{X}, t) - \delta_{KL} \quad \text{ja} \quad 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl}(\mathbf{x}, t) \quad (3.44)$$

nimetatakse vastavalt *Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorigeks*.<sup>12</sup> Valemite (3.35) ja (3.36) põhjal

$$2E_{KL} = x_{k,K} x_{k,L} - \delta_{KL} \quad \text{ja} \quad 2e_{kl} = \delta_{kl} - X_{K,k} X_{K,l}. \quad (3.45)$$

<sup>12</sup>I. k. *Lagrangian and Eulerian strain tensors. NB! strain tensors!*

### 3.4. Deformatsioonitensordid

Võrduse (3.43) põhjal näeme<sup>13</sup>, et

$$E_{KL} = e_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad \text{ja} \quad e_{kl} = E_{KL} X_{K,k} X_{L,l}. \quad (3.46)$$

**Euleri ja Lagrange deformatsioonitensorige esitamine siirete kaudu**

Joonise 3.3 (või 3.4) põhjal siire

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = x_i \mathbf{i}_i - X_I \mathbf{I}_I. \quad (3.47)$$

Siirdevektor avaldub oma komponentide kaudu nii LKs kui EKs:

$$\mathbf{u} = U_K \mathbf{I}_K = u_k \mathbf{i}_k. \quad (3.48)$$

Komponentide  $U_K$  ja  $u_k$  avaldamiseks korrutame avaldist (3.47) baasivektoritega  $\mathbf{i}_k$  või  $\mathbf{I}_K$ :

$$u_k = x_k - \delta_{Ik} X_I \quad \text{ja} \quad U_K = \delta_{iK} x_i - X_K, \quad (3.49)$$

kus suurus

$$\delta_{Kk} = \delta_{kK} = \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{I}_K \quad (3.50)$$

nimetame *vahetajaks*<sup>14</sup> ja nad on Kroneckeri deltad vaid juhul kui alghetkel †

$K = k$  korral  $\mathbf{i}_k = \mathbf{I}_K$ .

<sup>13</sup>Näidata kodus ja eksamil

<sup>14</sup>I. k. *shifters; shift* – nihke, vahetus; *gear shift* – käigu vahetus

- Kui asendame avaldise (3.49)<sub>1</sub> liikumisvõrrandiga  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ , siis saame siirde, mille on saanud materiaalne punkt  $\mathbf{X}$ . Eeldusel, et alghetkel EK ja LK ühtivad, on tegu materiaalse punktiga, mis alghetkel asub ruumipunktis  $\mathbf{x}$ .

- Kui asendame avaldise (3.49)<sub>2</sub> liikumisvõrrandiga  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0)$ , siis saame siirde, mille on saanud materiaalne punkt  $\mathbf{X}$ . Eeldusel, et alghetkel EK ja LK ühtivad, on tegu materiaalse punktiga, mis alghetkel asub ruumipunktis  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ .

Avaldame vektorid  $\mathbf{C}_K$  ja  $\mathbf{c}_k$  siirete kaudu:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_K &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_K} \stackrel{(3.47)}{=} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_K} = \mathbf{I}_K + U_{M,K} \mathbf{I}_M, \\ \mathbf{c}_k &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_k} \stackrel{(3.47)}{=} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k - u_{m,k} \mathbf{i}_m. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Suurusi  $U_{M,K}$  ja  $u_{m,k}$  nimetame *siirdegradientideks*.

Nüüd saamegi avaldada deformatsioonitensordid siiretes:

$$\begin{cases} C_{KL} = \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L = \dots = \delta_{KL} + U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}, \\ c_{kl} = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l = \dots = \delta_{kl} - u_{k,l} - u_{l,k} + u_{m,k} u_{m,l} \end{cases} \quad (3.52)$$

### 3.4. Deformatsioonitensordid

ja

$$\begin{cases} 2E_{KLM} = C_{KL} - \delta_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k} u_{m,l}. \end{cases} \quad (3.53)$$

Veel mõned valemid kohavektorite diferentsiaalide jaoks:

$$\begin{cases} d\mathbf{x} = \mathbf{C}_K dX_K \stackrel{(3.51)}{=} (\delta_{MK} + U_{M,K}) \mathbf{I}_M dX_K, \\ d\mathbf{X} = \mathbf{c}_k dx_k \stackrel{(3.51)}{=} (\delta_{mk} + u_{m,k}) \mathbf{i}_m dx_k. \end{cases} \quad (3.54)$$

Korrutades viimased vastavalt vektoritega  $\mathbf{i}_k$  ja  $\mathbf{I}_K$  saame diferentsiaalide komponendid

$$\begin{cases} dx_k = (\delta_{MK} + U_{M,K}) \delta_{Mk} dX_K, \\ dX_K = (\delta_{mk} + u_{m,k}) \delta_{mK} dx_k. \end{cases} \quad (3.55)$$

## 3.5 Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

### 3.5.1 Lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid

Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid olid defineeritud avaldistega (3.53) kujul

$$\begin{cases} 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K}U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k}u_{m,l}. \end{cases}$$

Kui siirdegradientid on väikesed võrreldes ühega, siis

$$U_{M,K}U_{M,L} \ll U_{K,L} \ll 1. \quad (3.56)$$

Hiljates kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed, saame *lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid*<sup>15</sup>

$$\begin{cases} 2\tilde{E}_{KL} = 2\tilde{E}_{LK} = U_{K,L} + U_{L,K}, \\ 2\tilde{e}_{kl} = 2\tilde{e}_{lk} = u_{k,l} + u_{l,k}. \end{cases} \quad (3.57)$$

*Selliseid deformatsioonitensoreid kasutatakse lineaarses teoorias, mida on kombeks nimetada klassikaliseks teooriaks.*

<sup>15</sup>Neid nimetatakse ka lihtsalt väikeste deformatsioonide tensoriteks „unustades“ sõna *lõpmata* lisamata.

### 3.5. Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

#### 3.5.2 Linearse teooria pöördetensorid ja pöördvektorid

Siirdevektori diferentsiaalid avalduvad läbi siirdegradientide kujul

$$dU_K = U_{K,L}dX_L \quad \text{ja} \quad du_k = u_{k,l}dx_l. \quad (3.58)$$

Siirdegradienti saab lahutada sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks osaks:

$$\begin{cases} U_{K,L} = \frac{1}{2} [(U_{K,L} + U_{L,K}) + (U_{K,L} - U_{L,K})], \\ u_{k,l} = \frac{1}{2} [(u_{k,l} + u_{l,k}) + (u_{k,l} - u_{l,k})]. \end{cases} \quad (3.59)$$

Esimised sulgavaldised kujutavad siin klassikalise lineaarse teooria deformatsioonitensoreid  $\tilde{E}_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K}$  ja  $\tilde{e}_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k}$ , teised aga tähistame

$$\tilde{R}_{KL} = \frac{1}{2}(U_{K,L} - U_{L,K}) = -\tilde{R}_{LK} \quad \text{ja} \quad \tilde{r}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} - u_{l,k}) = -\tilde{r}_{lk} \quad (3.60)$$

Viimased on *klassikalise, st. lineaarse, teooria pöördetensorid*.

Seega kujutavad  $\tilde{E}_{KL}$  ja  $\tilde{e}_{kl}$  siirdegradientide  $U_{K,L}$  ja  $u_{k,l}$  sümmeetrilisi osi,  $\tilde{R}_{KL}$  ja  $\tilde{r}_{kl}$  aga antisümmeetrilisi osi ning

$$U_{K,L} = \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \quad \text{ja} \quad u_{k,l} = \tilde{e}_{kl} + \tilde{r}_{kl}. \quad (3.61)$$

Sagedasti kasutatakse selles kontekstis tähistusi

$$\tilde{E}_{KL} = U_{(K,L)}, \quad \tilde{e}_{kl} = u_{(k,l)}, \quad \tilde{R}_{KL} = U_{[K,L]}, \quad \tilde{r}_{kl} = u_{[k,l]}. \quad (3.62)$$

Siin tähistavad  $U_{(K,L)}$  ja  $u_{(k,l)}$  vastavalt siirdegradientide  $U_{K,L}$  ja  $u_{k,l}$  sümmeetrilisi osi ja  $U_{[K,L]}$  ja  $u_{[k,l]}$  antisümmeetrilisi osi.

Igas keha punktis saame defineerida lõpmata väikese pöördede vektorid  $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{r}_k \mathbf{i}_k$  ja  $\tilde{\mathbf{R}} = R_K \mathbf{I}_K$ , kus

$$2\tilde{R}_K = e_{KLM} \tilde{R}_{ML}, \quad \text{ja} \quad 2\tilde{r}_k = e_{klm} \tilde{r}_{ml}. \quad (3.63)$$

Ülesanne 3.5.1. Näidata, et

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_{32}, \quad \tilde{r}_2 = \tilde{r}_{13}, \quad \tilde{r}_3 = \tilde{r}_{21}. \quad (3.64)$$

### 3.5. Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

3 - 30

Euleri ja Lagrange deformatsioontensorite ja lõpmata väikeste deformatsioonide tensorite vahelised seosed.

Asendades siirdegradientid (3.61) deformatsioontensorite avaldistesse (3.53) saame pärast mõningaid teisendusi

$$\begin{cases} E_{KL} = \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \left( \tilde{E}_{MK} + \tilde{R}_{MK} \right) \left( \tilde{E}_{ML} + \tilde{R}_{ML} \right), \\ e_{kl} = \tilde{e}_{kl} - \frac{1}{2} \left( e_{mk} + \tilde{r}_{mk} \right) \left( e_{ml} + \tilde{r}_{ml} \right). \end{cases} \quad (3.65)$$

Viimaste valemite põhjal on selge, et  $\tilde{e}_{kl}$  ei sobi hästi deformatsiooni mööduks, sest  $\tilde{e}_{kl} = 0$  puhul ei pruugi  $e_{kl}$  olla null. Sama kehtib ka Lagrange'i deformatsioontensori  $E_{KL}$  kohta. Valemite (3.65) põhjal on tuletatud mitmeid ligikaudseid teooriaid, eriti plaatidele ja koorikutele.

- Kui  $\tilde{e}_{kl} \ll 1$  (kuid  $\tilde{r}_{kl}$  on lõplik), siis hüljatakse vaid liikmed  $\tilde{e}_{mk} \tilde{e}_{ml}$ .
- Kui nii  $\tilde{e}_{kl} \ll 1$  kui  $\tilde{r}_{kl} \ll 1$ , siis hüljatakse liikmed  $\tilde{e}_{mk} \tilde{e}_{ml}$ ,  $\tilde{e}_{mk} \tilde{r}_{ml}$  ja  $\tilde{r}_{mk} \tilde{r}_{ml}$ .
- Jne. sõltuvalt tensorite elementide suurusjärgust.

Lõpmata väikeste deformatsioonide teoorias eeldatakse, et  $E_{KL} = \tilde{E}_{kl}$  ja  $e_{kl} = \tilde{e}_{kl}$ . Enamgi veel, kuna deformatsioonid on lõpmata väikesed, siis tegelikult ei eristatagi sel juhul Lagrange'i ja Euleri koordinaate ja seosed (3.46) saavad kuju

$$\tilde{E}_{KL} = \tilde{e}_{kl}\delta_{kK}\delta_{lL} \quad \text{ja} \quad \tilde{e}_{kl} = \tilde{E}_{KL}\delta_{kK}\delta_{lL}. \quad (3.66)$$

### 3.6 Deformatsioonitensorite füüsikaline sisu<sup>16</sup>

Vaatleme lõpmata väikeseid vektoreid  $d\mathbf{X}$  ja  $d\mathbf{x}$ , mis on (3.33) avaldatavad järgmiselt:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{I}_K dX_K = \mathbf{c}_k dx_k \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{i}_k dx_k = \mathbf{C}_K dX_K. \quad (3.67)$$

Kuna

$$dS^2 = |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{ja} \quad ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.68)$$

siis  $d\mathbf{X}$  ja  $d\mathbf{x}$  sihilised ühikvektorid

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{X}}{|d\mathbf{X}|} = \frac{d\mathbf{X}}{dS} \quad \text{ehk} \quad N_K = \frac{dX_K}{|d\mathbf{X}|} = \frac{dX_K}{dS} \quad (3.69)$$

<sup>16</sup>Mõnes õpikus nimetatakse sama asja ka geomeetriliseks interpretatsiooniks või geomeetriliseks tähenduseks

#### 3.6. Deformatsioonitensorite füüsikaline sisu

ja

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad \text{ehk} \quad n_k = \frac{dx_k}{|d\mathbf{x}|} = \frac{dx_k}{ds}. \quad (3.70)$$

Suhet  $ds/dS$  nimetame *pikennemiskoeffitsendiks* ehk lihtsalt *pikennemiseks*<sup>17</sup> ja see väljendab vektorite  $d\mathbf{x}$  ja  $d\mathbf{X}$  pikkuste suhet. Seda suhet võib väljendada nii  $\mathbf{N}$  kui  $\mathbf{n}$  kaudu. Vastavalt sellele, kas viitame  $\mathbf{N}$  või  $\mathbf{n}$  suunale, tähistame pikennemist kas  $\Lambda_{(\mathbf{N})}$  või  $\lambda_{(\mathbf{n})}$ . On selge, et arvuliselt  $\Lambda_{(\mathbf{N})} = \lambda_{(\mathbf{n})}$ , kuid  $\Lambda_{(\mathbf{N})}$  viitab LKle ja  $\lambda_{(\mathbf{n})}$  EKle. Seega,  $\Lambda_{(\mathbf{N})}$  leidmiseks avaldame (3.67) abil vektori  $d\mathbf{x}$  LKs:

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{\mathbf{C}_K dX_K \mathbf{C}_L dX_L}{dS^2}} = \dots = \sqrt{C_{KL} N_K N_L}. \quad (3.71)$$

$\lambda_{(\mathbf{n})}$  leidmise puhul toimime vastupidi — avaldame vektori  $d\mathbf{X}$  EKs:

$$\lambda_{(\mathbf{n})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{\mathbf{c}_k dx_k \mathbf{c}_l dx_l}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{c_{kl} n_k n_l}}. \quad (3.72)$$

<sup>17</sup>i. k. stretch



Kui valime  $\mathbf{N} = \mathbf{I}_1$  ja  $\mathbf{n} = \mathbf{i}_1$  ning tähistame  $\Lambda_{(\mathbf{N})} = \Lambda_{(1)}$  ja  $\lambda_{(\mathbf{n})} = \lambda_{(1)}$ , siis  $N_1 = n_1 = 1$  ja  $N_2 = N_3 = n_2 = n_3 = 0$  ning

$$\Lambda_{(1)} = \sqrt{C_{11}} \quad \text{ja} \quad \lambda_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{c_{11}}}. \quad (3.73)$$

Kokkuvõttes<sup>18</sup>

$$C_{\underline{K}\underline{K}} = \Lambda_{(K)}^2 \quad \text{ja} \quad (c_{\underline{k}\underline{k}})^{-1} = \lambda_{(k)}^2, \quad (3.74)$$

s.t. *Cauchy deformatsioonitensori diagonaalelementide pöördväärtused ja Greeni deformatsioonitensori diagonaalelementid võrduvad baasvektorite sihhiiste joonelementide (vektorite) pikennemiskoeffitsientide ruuduga.*

*Suhteline pikennemine*<sup>19</sup> on defineeritud järgmiselt:

$$E_{(\mathbf{N})} = \epsilon_{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1 = \lambda_{(\mathbf{n})} - 1 \quad (3.75)$$

Kui tähistame suhtelist pikennemist vektori  $\mathbf{N} = \mathbf{I}_1$  sihis  $E_{(1)}$ , siis

$$E_{(1)} = \Lambda_{(1)} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1. \quad (3.76)$$

<sup>18</sup>Alljoon indeksi juures tähistab seda, et selle korduva indeksi järgi ei summeerita.

<sup>19</sup>I. k. *extension*

### 3.6. Deformatsioonitensorite füüsikaline sisu

Viimasest saame

$$2E_{11} = (1 + E_{(1)})^2 - 1 = \Lambda_{(1)}^2 - 1 = \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}. \quad (3.77)$$

*Kokkuvõttes:*

$$2E_{\underline{K}\underline{K}} = (1 + E_{(K)})^2 - 1 = \Lambda_{(K)}^2 - 1 = \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}. \quad (3.78)$$

Kui  $E_{(K)} \ll 1$ , siis saame avaldisest (3.78) kõrgemat järku väikeste suuruste hilgamisel

$$E_{\underline{K}\underline{K}} \approx \tilde{E}_{\underline{K}\underline{K}} \approx E_{(K)} = \frac{ds - dS}{dS}. \quad (3.79)$$

Teisisõnu, *lõpmata väikeste deformatsioonide korral on suhteline pikennemine baasvektori  $\mathbf{I}_K$  suunas võrdne lõpmata väikeste deformatsioonide tensori diagonaalelementidega  $\tilde{E}_{\underline{K}\underline{K}}$ .*

Analoogilised valemid EK jaoks saavad kuju

$$\begin{cases} \epsilon_{(k)} = \lambda_{(k)} - 1 = \frac{1}{\sqrt{C_{kk}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1+2e_{kk}}} - 1, \\ 2e_{\underline{k}\underline{k}} = 1 - (1 + \epsilon_{(k)})^{-2} = 1 - \lambda_{(k)}^{-2} = \frac{ds^2 - dS^2}{ds^2}, \\ e_{\underline{k}\underline{k}} \approx \tilde{e}_{\underline{k}\underline{k}} \approx \epsilon_{(k)}, \quad \text{kui } \epsilon_{(k)} \ll 1. \end{cases} \quad (3.80)$$

Nihkedeforatsioonidele  $E_{KL}$  tähenduse andmiseks vaatleme kahte ristuvat vektorit  $\mathbf{I}_1 dX_1$  ja  $\mathbf{I}_2 dX_2$ , mis deformeeruvad vektoriteks  $\mathbf{C}_1 dX_1$  ja  $\mathbf{C}_2 dX_2$  (vt. joon. 3.5), mille vaheline nurk on  $\vartheta_{(1,2)}$ . Seega,

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_{(1,2)} &= \frac{(\mathbf{C}_1 dX_1) \cdot (\mathbf{C}_2 dX_2)}{|\mathbf{C}_1 dX_1| |\mathbf{C}_2 dX_2|} = \frac{(\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2) dX_1 dX_2}{C_{12}} \\ &= \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Kasutades avaldist (3.76) saame viimasest

$$2E_{12} = (1 + E_{(1)}) (1 + E_{(2)}) \cos \vartheta_{(1,2)}. \quad (3.82)$$

### 3.6. Deformatsioonitensorite füüsikaline sisu

Kui suhtelised pikenedised  $E_{(K)}$  on väikesed, siis

$$2E_{12} \approx 2\tilde{E}_{12} \approx \cos \vartheta_{(1,2)}. \quad (3.83)$$

Alge se täisnurga muutus

$$\Gamma_{(1,2)} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{(1,2)} \quad (3.84)$$

on lõpmata väikeste deformatsioonide korral väike. Järelikult  $\sin \Gamma_{(1,2)} = \cos \vartheta_{(1,2)} \approx \Gamma_{(1,2)}$  ja

$$2E_{12} \approx 2\tilde{E}_{12} \approx \Gamma_{(1,2)}. \quad (3.85)$$

**Kokkuvõttes:** kui  $\Gamma_{(K,L)} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{(K,L)}$  on  $\mathbf{I}_K$  ja  $\mathbf{I}_L$  vahelise alge täisnurga muut, siis

$$\begin{cases} 2E_{KL} = (1 + E_{(K)}) (1 + E_{(L)}) \cos \vartheta_{(K,L)} = (1 + E_{(K)}) (1 + E_{(L)}) \sin \Gamma_{(K,L)}, \\ 2E_{KL} \approx 2\tilde{E}_{KL} \approx \cos \vartheta_{(K,L)} = \sin \Gamma_{(K,L)}, & \text{kui } E_{(K)} \ll 1, E_{(L)} \ll 1, \\ 2E_{KL} \approx 2\tilde{E}_{KL} \approx \Gamma_{(K,L)}, & \text{kui } \Gamma_{(K,L)} \ll 1. \end{cases} \quad (3.86)$$

Analoogilise mõttekäigu rakendamine Euleri deformatsioonitensorile  $e_{kl}$  ei annaks nii praktilist tulemust, sest  $\vartheta_{(k,l)}$  tähistaks nurka, mis deformatsiooni käigus muutub täisnurgaks, ja  $\gamma_{(k,l)}$  vastavat muutust.

Lõpnata väikeste deformatsioonid korral aga kaob erinevus LK ja EK vahel ning vastavalt seostele (3.66) võime kirjutada

$$\tilde{2E}_{KL} \approx 2\tilde{e}_{kl} \approx \Gamma_{(K,L)} \approx \gamma_{(k,l)}, \quad \text{kui} \quad K = k, L = l. \quad (3.87)$$

Seega, lõpnata väikeste deformatsioonide tensorite komponendid  $\tilde{E}_{KL}$  ja  $\tilde{e}_{kl}$  ( $K \neq L$  ja  $k \neq l$ ) on (ligikaudu) võrdsed DRK baasvektorite  $\mathbf{I}_K$  ja  $\mathbf{I}_L$  vahelise täismuruga muuduga  $\Gamma_{(K,L)} \approx \gamma_{(k,l)}$ .

---

3.7. 1D deformatsiooni mõõdud ja nende seos deformatsioonitensoritega

3 - 38

### 3.7 1D deformatsiooni mõõdud ja nende seos deformatsioonitensoritega

Meenutame tugevusõpetuse kursuses tehtud tõmbekatset, mille korral katsekeha algpikkusega  $l_0$  pikeneb suuruse  $\delta$  võrra, omades seega katse lõpul pikkust  $l = l_0 + \delta$ . Toimunud deformatsiooni iseloomustamiseks võib kasutada erinevaid *deformatsiooni mõõtte*<sup>20</sup>:

- *pikennemiskoeffitsent ehk pikenemine*;<sup>21</sup>

$$\lambda = \frac{l}{l_0} \quad (3.88)$$

- *insenerideformatsioon* (kasutatakse ka termineid *Cauchy deformatsioon* ja *suhteline pikenemine*)<sup>22</sup>

$$\epsilon_e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\delta}{l_0} = \lambda - 1 \quad (3.89)$$

---

<sup>20</sup>I. k. *strain measures*

<sup>21</sup>I. k. *stretch, stretch ratio*, võrdle valemitega (3.71) ja (3.72)

<sup>22</sup>I. k. *engineering strain, Cauchy strain*, võrdle valemitega (3.75) ja (3.76)

- *logaritmiline deformatsioon* (kasutatakse ka termineid *tegelik deformatsioon* vi *Hencky deformatsioon*)<sup>23</sup>

$$\epsilon_{\log} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \dots \approx \frac{\delta}{l_0} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l_0^2} \quad (3.90)$$

- *Lagrange'i deformatsioon* (kasutatakse ka terminit *Greeni deformatsioon*)<sup>24</sup>

$$\epsilon_L = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \dots = \frac{\delta}{l_0} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l_0^2} \quad \text{ehk} \quad \epsilon_L = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \quad (3.91)$$

- *Euleri-Almansi deformatsioon*<sup>25</sup>

$$\epsilon_{EA} = \frac{l^2 - l_0^2}{2l^2} = \dots = \frac{\delta}{l} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l^2} \quad \text{ehk} \quad \epsilon_{EA} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (3.92)$$

<sup>23</sup>I. k. *logarithmic strain*, also called *natural strain*, *true strain* or *Hencky strain*

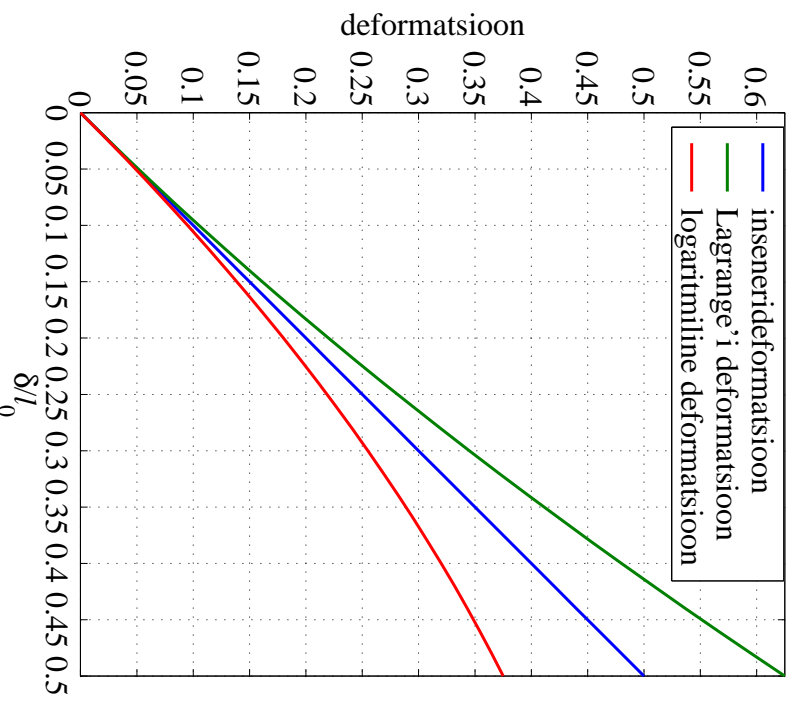
<sup>24</sup>I. k. *Lagrange strain*, *Green strain*

<sup>25</sup>I. k. *Euler-Almansi strain*

### 3.7. 1D deformatsiooni mud ja nende seos deformatsioonimensoriga

Joonise 3.7 põhjal on selge, et kui  $\delta/l_0 < 0, 1$ , siis langevad inseneri, Lagrange'i ja logaritmiline deformatsioon praktiliselt kokku. Suurte deformatsioonide korral aga erinevad vaadeldavad kolm deformatsiooni mõõtu oluliselt. Kõige sagedamini kasutatakse suurte deformatsioonide kirjeldamiseks Lagrange'i deformatsiooni.

Euleri-Almansi deformatsiooni korral võrreldakse pikkuse muutu  $\delta$  deformeerunud katsekeha pikkusega  $l$  ja seetõttu on selle deformatsiooni mdu otsene võrdlemine vaadeldud



Joonis 3.7: Erinevate deformatsioonimtude võrdlus

kolmnikuga komplitseeritud.

K asesolevas kursuses on  $l_0$  analoogiks  $dS$  ja  $l$  analoogiks  $ds$ . Järelikult vastab

- insenerideformatsioonile lõpmata väikese te deformatsioonide tensor  $\tilde{E}_{KL} \approx \tilde{e}_{kl}$  (valemid (3.79) ja (3.89), (3.78) ja (3.91)),
- Lagrange'i deformatsioonile Lagrange'i deformatsioonitensor  $E_{KL}$  (valemid (3.80)<sub>2</sub> ja (3.92)).

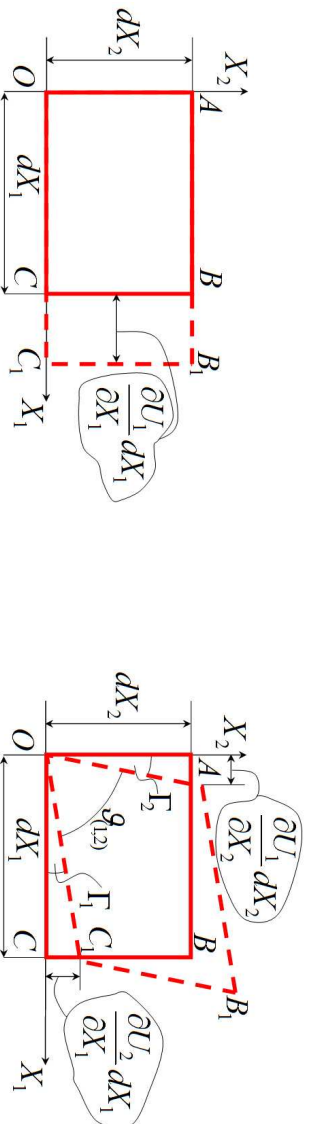
- Euleri-Almansi deformatsioonile aga Euleri deformatsioonitensor  $e_{kl}$  (valemid (3.80)<sub>1</sub> ja (3.92)).

**Tugevusõpetus versus pideva keskkonna mehaanika.** K asesoleva alajaotuse lõpetuseks esitam e seosed tugevusõpetuses kasutatud deformatsioonide  $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{yz}$  ja lõpmata v aikese deformatsioonide tensori  $\tilde{E}_{KL}$  komponentide vahel

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} & \tilde{E}_{13} \\ \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} & \tilde{E}_{23} \\ \tilde{E}_{31} & \tilde{E}_{32} & \tilde{E}_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.93)$$

3.7. 1D deformatsiooni m oodud ja nende seos deformatsiooniensoriga

3 - 42



Joonis 3.8: Normaaldeformatsioon (vasakul) ja nihke deformatsioon (paremal)

Vastavalt joonisele 3.8 on normaaldeformatsioon<sup>26</sup>

$$\tilde{E}_{11} = E_{(1)} = \frac{OC_1 - OC}{OC} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \quad (3.94)$$

ja lõpmata väikese te deformatsioonidele vastav nihke deformatsioon<sup>27</sup>

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta_{(1,2)} = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_2} = 2\tilde{E}_{12}. \quad (3.95)$$

<sup>26</sup>I. k. normal strain

<sup>27</sup>I. k. shear or shear strain

### 3.8 Deformatsioonielipsoid

Deformatsiooni iseloomu deformeerumata keha punkti  $P(\mathbf{X})$  ümbruses või deformeerunud keha punkti  $p(\mathbf{x})$  ümbruses saab illustreerida Cauchy poolt pakutud geomeetrilise meetodi abil. Allpool esitatud tulemused on otseselt rakendatavad suvalisele sümmeetrilisele teist järku tensorile.

Vektor  $d\mathbf{X}$  LK-s määrab elementaar sfääri

$$\delta_{KL}dX_KdX_L = dS^2 = K^2, \quad (3.96)$$

✓

kus  $K$  on sfääri raadius. Deformeerumisel liigub materiaalne punkt  $X_K$  ruumipunkti  $x_k$  ja materiaalsel punkti  $X_K$  ümbritsenuud sfääri punktid ruumipunkti  $x_k$  ümbritsevaks teist järku pinna punktideks

$$c_{kl}dx_kdx_l = dS^2 = K^2. \quad (3.97)$$

Valemite (3.35) põhjal  $c_{kl} = \delta_{KL}X_{K,k}X_{L,l} = X_{K,k}X_{K,l}$ . Kuna  $c_{kl}$  on positiivselt määratud, siis see teist järku pind on ellipsoid. Ellipsoidi (3.97) nimetatakse *materiaalseks deformatsioonielipsoidiks*<sup>28</sup>.

<sup>28</sup>I. k. *material strain ellipsoid*

#### 3.8. Deformatsioonielipsoid

Analoogiliselt — elementaar sfäärile deformeerunud olekus

$$\delta_{kl}dx_kdx_l = ds^2 = k^2 \quad (3.98)$$

vastab ellipsoid algolekus

$$C_{KL}dX_KdX_L = ds^2 = k^2. \quad (3.99)$$

Avaldisega (3.99) määratud ellipsoidi nimetatakse *ruumiliseks deformatsiooni-ellipsoidiks*<sup>29</sup> (ruumiline viitab siin endiselt EK-le, mitte aga 3D-le).

Vaatleme kahte vektorit  $d\mathbf{X}_1 \perp d\mathbf{X}_2$ , st.  $d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = 0$ . Kuna vektorid  $d\mathbf{X}_\alpha$  on avaldatavad nii baasi  $\mathbf{I}_K$  kui  $\mathbf{e}_k$  kaudu, siis

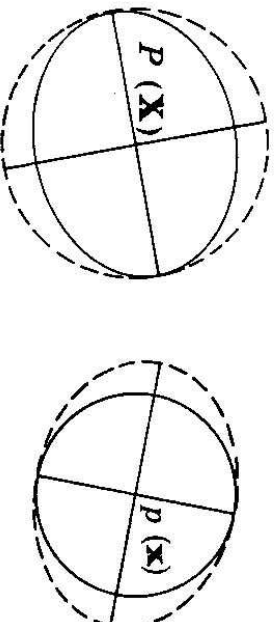
$$d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = \dots = c_{kl}dx_k^1 dx_l^2 = 0. \quad (3.100)$$

•

Seega on meil ka peale deformatsiooni kaks ristuvat vektorit — üks komponendidega  $c_{kl}dx_k^1$  ja teine komponentidega  $dx_l^2$  (või vastupidi). Teisisõnu, kaks ristuvat vektorit LK-s deformeeruvad kaheks ristuvaks vektoriks EK-s (sealjuures nende vektorite siht ja pikkus võivad muutuda).

<sup>29</sup>I. k. *spatial strain ellipsoid*

Ellipsoidil on teatavasti 3 ristuvat pooltelge. Eldame algul, et kõik poolteljed on erineva pikkusega. Seega materiaalse deformatsioonielipsoidi puhul leidub algses sfääris kolm ristuvat raadiust, mis deformeeruvad ellipsoidi pooltelgedeks. Deformatsiooni käigus muutub nende pikkus ja orientatsioon (siht), kuid nad jäävad omavahel risti. Neid telgi nimetatakse *deformatsioonielipsoidi peatelgedeks*.



Joonis 3.9: Ruumiline (—) ja materiaalne (- - -) deformatsioonielipsoid

Kogu toodud mõttekäik kehtib ka ruumilise deformatsioonielipsoidi kohta. Sides omavahel ruumilise ja materiaalse deformatsioonielipsoidi saab näidata, et *deformatsioon pöörab ruumilise deformatsioonielipsoidi X-s materiaalseks deformatsioonielipsoidiks x-s ja vastupidi*.

### 3.8. Deformatsioonielipsoid

Deformatsioon viib sfääri diameetri  $\mathbf{X}$ -s ellipsoidi diameetrikis  $\mathbf{x}$ -s. Ellipsoidi ja sfääri diameetrite pikkuste suhe määrab ära *piknemiskoeffitsendi*  $\Lambda = ds/dS$  vastavas sihis. Piknemiskoeffitsente kolmes deformatsioonielipsoidi peatelje sihis nimetatakse *peapiknemisteks* ja tähistatakse  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$ , kusjuures  $\Lambda_1 = \max \Lambda$  ja  $\Lambda_3 = \min \Lambda$ .

Eelnev baseerus eeldusel, et ellipsoidi pooltelgede pikkused on erinevad. Vastupidisel juhul saab leida lõpmata palju peatelgi.

- Kaks pooltelge on võrdsed, kolmas erinev ...
- Kõik kolm pooltelge on võrdsed ...

### 3.9 Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

Alajaotuses 3.8 näitasime, et punktis  $P(\mathbf{X})$  leidub vähemalt kolm omavalget ristuvat suunda, mis deformatsiooni käigus lähevad deformatsioonilip-soidi kolmeks peateljeks punktis  $p(\mathbf{x})$  ja vastupidi. Määrame nüüd peasuunad analüütiliselt, st., leiame kolm ristuvat suunda, millest kahe puhul pikenenis-koefitsendid omavad ekstremaalseid väärtusi. Valemite (3.71) põhjal

$$\Lambda_{(\mathbf{N})}^2 = C_{KL} N_K N_L, \quad (3.101)$$

kus  $N_K = dX_K/dS$ . Peasuundade leidmiseks tuleb minimeerida funktsioon (3.101)  $\mathbf{N}$  suhtes lisatingimusel, et  $\mathbf{N}$  on ühikvektor, st.,

$$\delta_{KL} N_K N_L = 1. \quad (3.102)$$

Saadud lisatingimusega ekstreemumülesande lahendamiseks kasutame Lagrange'i meetodit<sup>30</sup> mille põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\frac{\partial}{\partial N_M} [C_{KL} N_K N_L - C (\delta_{KL} N_K N_L - 1)] = 0, \quad (3.103)$$

---

<sup>30</sup>Ik. Lagrange's method of multipliers

#### 3.9. Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

kus tundmatut  $C$  nimetatakse Lagrange'i multiplikaatoriks. Viimane omakorda annab meile kolm lineaarset homogeenet võrrandit ühikvektori komponentide  $N_K$  leidmiseks —

$$(C_{KL} - C\delta_{KL}) N_L = 0 \quad (3.104)$$

Tensori  $E_{KL}$  definitsiooni põhjal  $C_{KL} = \delta_{KL} + 2E_{KL}$  saab võrrandele (3.104) anda kuju

$$(E_{KL} - E\delta_{KL}) N_L = 0, \quad 2E = C - 1. \quad (3.105)$$

Pole tähtis kumba saadud võrrandisüsteemidest lahendada — kui vaja, saab hiljem minna ühelt lahendilt üle teisele. Meie lähtume võrrandisüsteemist (3.104). Viimasel eksisteerib mittetriviaalne lahend siis ja ainult siis kui tema *karakteristlik determinant* on null, st.,

$$|C_{KL} - C\delta_{KL}| = 0. \quad (3.106)$$

Selle determinandi arendamise tulemusena saadakse *karakteristlik võrrand* (mis kujutab endast kuupvõrrandit)

$$C^3 - I_C C^2 + II_C C - III_C = 0 \quad (3.107)$$

tundmatu  $C$  määramiseks.



Suurused

$$\left\{ \begin{array}{l} I_C = C_{KK} = \dots \\ II_C = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{31} & C_{33} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \\ III_C = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (3.108)$$

on deformatsioonitensori  $C_{KL}$  invariandid (koordinaatteisenduste suhtes  $\mathbf{X} - s$ ).

Karakteristlik võrrand (3.107) omab kolme juurt  $C_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , mida nimetatakse *omaväärtusteks* ehk *peaväärtusteks*<sup>31</sup>. Võrrandisüsteemi (3.104) abil saame nüüd igale peaväärtusele  $C_\alpha$  seada vastavusse *omavektori* ehk *peavektori*  $\mathbf{N}_\alpha$ , mis määrab *peasuuna*. Saab tõestada, et sümmeetrilise tensori peaväärtused on reaalsed ning neile vastavad peasuunad on omavahel risti ja eksisteerivad alati. • Geeni deformatsioonitensori peaväärtused järjestatakse selliselt, et  $C_1 \geq C_2 \geq C_3$  (põhjendus on esitatud allpool).

---

<sup>31</sup>Ik. eigenvalues or principal values or proper numbers

### 3.9. Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

3 - 50

Kui koordinaadid on valitud peasuundades (st., baasvektorite silht ühtib peavektorite sihtidega igas materiaalses punktis), siis peavektori  $\mathbf{N}_\alpha$  komponendid \*

$$N_{K\alpha} = \delta_{K\alpha} \quad (3.109)$$

ja deformatsioonitensori komponendid

$$C_{\alpha K} = C_\alpha \delta_{\alpha K}. \quad (3.110)$$

Kokkuvõttes võib öelda, et *peaväärtused võrduvad deformatsioonitensori normaalkomponentidega peatelgedes (peadeformatsioonidega)*. *Nihkedeformatsioonid selliste telgede (koordinaatide) puhul puuduvad*.

Deformatsioonitensori invariandid saavad nüüd tundvalt lihtsamad kujud —

$$\left\{ \begin{array}{l} I_C = C_1 + C_2 + C_3, \\ II_C = C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2, \\ III_C = C_1 C_2 C_3. \end{array} \right. \quad (3.111)$$

Deformatsioonitensori peaväärtuste ja peasuundade ning deformatsioonielipsoidi peatelgede vaheline seos

Peasuunad  $\mathbf{N}_\alpha$  määravad ära deformatsioonielipsoidi peateljed LK-s  $\mathbf{X}$ , st., ruumilise deformatsioonielipsoidi võrrand saab nüüd kujul

$$ds^2 = k^2 = C_{KL} dX_K dX_L = C_\alpha (dX_\alpha)^2 \equiv \sum_\alpha C_\alpha (dX_\alpha)^2. \quad (3.112)$$

Seega peatelgedes deformatsioonielipsoidi võrrand lihtsustub.

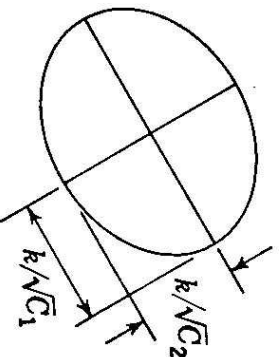
DRK puhul on ellipsoidi poolteljed

$$a_\alpha^s = \frac{ds}{\sqrt{C_\alpha}} \equiv \frac{k}{\sqrt{C_\alpha}} \quad (3.113)$$

ja pikenemiskoeffitsent peatelgedes

$$\Lambda_\alpha = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KL} N_K N_L} = \sqrt{C_\alpha} \stackrel{(3.113)}{=} \frac{ds}{a_\alpha^s} \quad (3.114)$$

ning seega  $a_\alpha^s = dS$ , s.o.  $\mathbf{N}_\alpha$  sihilise joonelemendi pikkus.



Joonis 3.10: Ruumilise deformatsioonielipsoidi poolteljed

EK  $\mathbf{x}$  puhul avaldub materiaalne deformatsioonielipsoid kujul

$$dS^2 = K^2 = c_{kl} dx_k dx_l = c_\alpha (dx_\alpha)^2 \equiv \sum_\alpha c_\alpha (dx_\alpha)^2 \quad (3.115)$$

ja poolteljed DRK-s

$$a_\alpha^m = \frac{dS}{\sqrt{c_\alpha}} \equiv \frac{K}{\sqrt{c_\alpha}}. \quad (3.116)$$

Suurus  $c_\alpha$  on siin deformatsioonitensori  $c_{kl}$  omaväärtus. Pikenemiskoeffitsendid

$$\lambda_\alpha = \frac{ds}{dS} = \frac{1}{\sqrt{c_{kl} n_k n_l}} = \frac{1}{\sqrt{c_\alpha}} = \frac{a_\alpha^m}{dS} \quad (3.117)$$

ja nüüd seega  $a_{\alpha}^m = ds$ , s.o.  $\mathbf{n}_{\alpha}$  sihilise joonelemendi pikkus. Valemite (3.114) ja (3.117) põhjal

$$C_{\alpha} = \frac{1}{c_{\alpha}} = \lambda_{\alpha} \equiv \Lambda_{\alpha}. \quad (3.118)$$

*Peaväärtused järjestatakse alati nii, et esimesele peaväärtusele vastab suurim peapikenemine  $\lambda_1 \equiv \Lambda_1$  ja kolmandale vähim peapikenemine  $\lambda_3 \equiv \Lambda_3$ .*

**Kokkuvõttes:**

- Ruumilise deformatsioonilipsoidi pooltelgede pikkused LK-s  $\mathbf{X}$  on pöördvõrdelised materiaalse deformatsioonilipsoidi pooltelgede pikkustega EK-s  $\mathbf{x}$ .
- Samuti on pöördvõrdelised vastavad pea- ehk omaväärtused  $C_{\alpha}$  ja  $c_{\alpha}$ .
- Peaväärtus  $C_{\alpha}$  on võrdne pikenemiskoeffitsendi ruuduga deformatsioonilipsoidi vastavas peasihis  $\alpha$ .
- Peatelgede sihis omab  $\Lambda$  ekstreemalseid väärtusi.
- Tingimuse  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$  põhjal  $C_1 \geq C_2 \geq C_3$  ja  $c_1 \leq c_2 \leq c_3$ .

### 3.9. Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad

### 3 - 54

## Seosed Greeni ja Cauchy deformatsioonitensori invariantide vahel

Kuna  $C_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^2 \equiv \lambda_{\alpha}^2$  ja  $\lambda_{\alpha} = 1 + e_{\alpha}$ , siis ( $e_{\alpha}$  tähistab siin suhtelist pikenemist vastavalt valemile (3.75))

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I}_C = \text{I}_{\ell} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (1 + e_1)^2 + (1 + e_2)^2 + (1 + e_3)^2, \\ \text{II}_C = \text{II}_{\ell} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 = \\ \quad = (1 + e_1)^2 (1 + e_2)^2 + (1 + e_2)^2 (1 + e_3)^2 + (1 + e_3)^2 (1 + e_1)^2, \\ \text{III}_C = \text{III}_{\ell} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = (1 + e_1)^2 (1 + e_2)^2 (1 + e_3)^2, \\ \text{I}_c = \text{I}_{\ell}^{-1} = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}, \\ \text{II}_c = \text{II}_{\ell}^{-1} = \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} + \lambda_2^{-2} \lambda_3^{-2} + \lambda_3^{-2} \lambda_1^{-2}, \\ \text{III}_c = \text{III}_{\ell}^{-1} = \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} \lambda_3^{-2}. \end{array} \right. \quad (3.119)$$

Siin  $C$  vastab tensorile  $C_{KL}^{-1}$  ja  $c$  tensorile  $c_{kl}^{-1}$ . Samuti on võetud arvesse, et  $C_{\alpha} = c_{\alpha}^{-1}$  ja vastupidi,  $c_{\alpha} = C_{\alpha}$ .

Ostitavad seosed

$$I_c = \frac{II_C}{III_C}, \quad II_c = \frac{I_C}{III_C}, \quad III_c = \frac{1}{III_C} \quad (3.120)$$

saame valemeist (3.119).

Kuna  $0 < \lambda_\alpha < \infty$  siis ka  $0 < I, II, III < \infty$ .

✓

Deformatsioonide puudumisel (jäiga keha puhul)  $e_\alpha = 0$  ja  $\lambda_\alpha = 1$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  ning seega

$$I = II = 3 \quad \text{ja} \quad III = 1 \quad (3.121)$$

**Seosed Lagrange'i ja Greeni deformatsioonitensori invariantide vahel**

Lagrange'i deformatsioonitensori invariantid avalduvad läbi peaväärtuste  $E_\alpha$  analoogselt Greeni deformatsioonitensori invariantidega (3.111) —

$$\begin{cases} I_E = E_1 + E_2 + E_3, \\ II_E = E_2E_3 + E_1E_3 + E_1E_2, \\ III_E = E_1E_2E_3. \end{cases} \quad (3.122)$$

### 3.9. Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad

Kasutades nüüd valemeid (3.111) ja (3.122) ning arvestades, et valemi (3.105)<sub>2</sub> põhjal  $2E_\alpha = C_\alpha - 1$ , saame seosed

$$\begin{cases} I_C = 3 + 2I_E, \\ II_C = 3 + 4I_E + 4II_E, \\ III_C = 1 + 2I_E + 4II_E + 8III_E, \\ 2I_E = -3 + I_C, \\ 4II_E = 3 - 2I_C + II_C, \\ 8III_E = -1 + I_C - II_C + III_C. \end{cases} \quad (3.123)$$

**Seosed Euleri ja Cauchy deformatsioonitensori invariantide vahel** saadakse sidudes tensorite  $c_{kl}$  ja  $e_{kl}$  invariantid. Tulemuseks on duaalsed seosed eelmistele —

$$\begin{cases} I_c = 3 - 2I_e, \\ II_c = 3 - 4I_e + 4II_e, \\ III_c = 1 - 2I_e + 4II_e - 8III_e. \end{cases} \quad (3.124)$$

### Invariantide III<sub>C</sub> ja III<sub>c</sub> geomeetiline tõlgendus

Vaatleme peatelgede sihilisi joonelemente  $ds_\alpha$  ja  $dS_\alpha$ . Elementaarruumalad  $d\mathcal{V} = dS_1 dS_2 dS_3$  ja  $dv = ds_1 ds_2 ds_3$ . Kuna

$$\frac{ds_\alpha}{dS_\alpha} = \Lambda_\alpha = \lambda_\alpha,$$

siis

$$\frac{dv}{d\mathcal{V}} = \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{dS_1 dS_2 dS_3} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \stackrel{(3.119)}{=} \sqrt{\text{III}_C} \stackrel{(3.119)}{=} \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}}.$$

Seega

$$dv = \sqrt{\text{III}_C} d\mathcal{V} \quad \text{ja} \quad d\mathcal{V} = \sqrt{\text{III}_c} dv. \quad (3.125)$$

Kokkuvõttes — *invariandid III<sub>C</sub> ja III<sub>c</sub> iseloomustavad ruumala muutust.*

**Ülesanne.** Kasutades valemeid (3.7), (3.36) ja (3.108) näidata, et  $j^2 = \text{III}_C$ .

...

Seega võime valemeid (3.125) kasutada ka kujul  $dv = j d\mathcal{V}$  või  $d\mathcal{V} = dv/j$ .

### 3.10. Deformatsiooni dekompositsioon

## 3.10 Deformatsiooni dekompositsioon

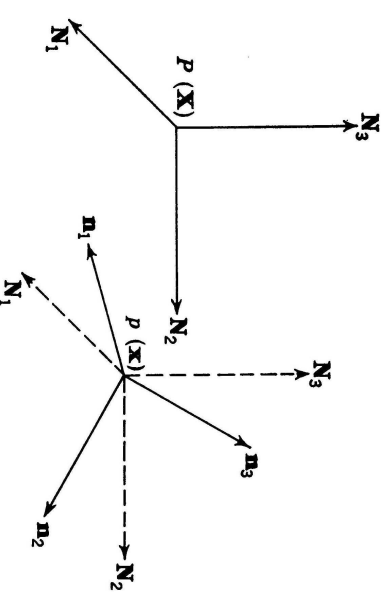
### 3.10.1 Pöördetensor

Vaatleme peavektorite kolmikuid  $\mathbf{n}_\alpha$  ja  $\mathbf{N}_\alpha$  (komponentkujul  $n_{k\alpha}$  ja  $N_{K\alpha}$ ). Defineerime pöördetensoreid<sup>32</sup>  $\mathbf{R}$  ja  $\bar{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^{-1}$ :

$$n_{k\alpha} = R_{kK} N_{K\alpha}, \quad N_{K\alpha} = R_{Kk}^{-1} n_{k\alpha}. \quad (3.126)$$

Seega pöördetensor  $R_{kK}$  pöörab Greeni deformatsioonitensori peavektorid  $\mathbf{N}_\alpha$  Cauchy deformatsioonitensori peavektoriteks  $\mathbf{n}_\alpha$  ja

joonis 3.11: Peatelgede siire koos pöördtega



vastupidi, pöördetensor  $R_{Kk}$  pöörab Cauchy deformatsioonitensori peavektorid  $\mathbf{n}_\alpha$  Greeni deformatsioonitensori peavektoriteks  $\mathbf{N}_\alpha$ . Kuna peavektorid moodustavad ortonormeeritud kolmiku, siis on selge, et

$$n_{k\alpha} n_{\alpha l} = \delta_{kl}, \quad \text{ja} \quad N_{K\alpha} N_{\alpha L} = \delta_{KL}. \quad (3.127)$$

<sup>32</sup>maatrikskujul  $[\mathbf{R}] = [R_{kK}]$  jne.

**Ülesanne.**  $\mathbf{N}_1 = [0, 1, 0]$ ,  $\mathbf{N}_2 = [-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]$ ,  $\mathbf{N}_3 = [1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]$ . Leida maatrikskujul  $[N_{K\alpha}]$ ,  $[N_{\alpha K}]$  ja  $[N_{K\alpha}N_{\alpha L}]$ .

...

Korrutame esimese avaldistest (3.126) komponendiga  $N_{\alpha K}$  ja teise komponendiga  $n_{\alpha k}$  ning saame

$$R_{kK} = n_{k\alpha}N_{\alpha K} \quad \text{ja} \quad R_{Kk}^{-1} = N_{K\alpha}n_{\alpha k}. \quad (3.128)$$

**Kokkuvõttes:**

- Sellisel defineeritud pöördetensor  $\mathbf{R}$  on ortogonaalne, st.  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$
- Loomulikult kehtivad võrdused  $R_{kK}R_{Kl}^{-1} = \delta_{kl}$  ja  $R_{kK}R_{Lk}^{-1} = \delta_{KL}$ .
- Kui peateljed deformatsiooni käigus ei pöördunud, siis  $R_{kK} = \delta_{kK} = R_{Kk}^{-1}$  ehk  $\mathbf{R} = \mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1}$ .

### 3.10. Deformatsiooni dekompositsioon

3 - 60

#### 3.10.2 Mõned pööride- ja deformatsioonitensorite vahelised seosed.

Toupin (1956) tõestab, et

1. Greeni ja Cauchy deformatsioonitensorite  $n$ -ndad astmed (kus  $n$  võib olla nii positiivne kui negatiivne ega pruugi olla täisarv) on seotud järgmiselt

$$\begin{cases} C_{KL}^{-n} = R_{Kk}^{-1} R_{Kk}^n C_{kl} R_{Ll} \\ c_{kl}^{-n} = R_{kK}^n C_{KL} R_{Ll}^{-1} \end{cases} \quad (3.129)$$

ning lisaks veel, et

$$C_{KL}^{-n} = \sum_{\alpha} (C_{\alpha})^{-n} N_{\alpha K} N_{\alpha L} \quad \text{ja} \quad c_{kl}^{-n} = \sum_{\alpha} (c_{\alpha})^{-n} n_{\alpha k} n_{\alpha l}. \quad (3.130)$$

2. Deformatsioonigradiendid avalduvad kujul

$$\begin{cases} x_{k,K} = R_{kL} \frac{1}{2} C_{LK} = R_{Lk}^{-\frac{1}{2}} c_{kl}, \\ X_{K,k} = R_{Kl}^{-1} \frac{1}{2} C_{lk} = R_{Lk}^{-1} c_{KL}^{-\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (3.131)$$

Viimastest omakorda

$$R_{kK} = x_{k,L} C_{LK}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ja} \quad R_{Kk} = X_{K,l} C_{lk}^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.132)$$

Lisaks saab näidata, et siirdegradient

$$U_{L,M} = R_{KL} C_{LM}^{\frac{1}{2}} - \delta_{KM}, \quad (3.133)$$

tensorite  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}$  ja  $\mathbf{R}$  vahel kehtivad seosed

$$R_{KM} = \left( \delta_{KL} + \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \right) C_{LM}^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.134)$$

väikeste deformatsioonigradientide puhul

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - \delta_{KM}, \quad (3.135)$$

ja

$$\tilde{R}_{KM} \approx \delta_{kK} \delta_{mM} \tilde{r}_{km}. \quad (3.136)$$

### 3.10. Deformatsiooni dekompositsioon

3 - 62

#### 3.10.3 Deformatsiooni dekompositsioon<sup>33</sup>

*Iga joonelemendi deformatsiooni mingis punktis võib vaadelda koosnevana kolmest osast — 1) paralleel liikest, 2) peatelgede jäigast pöördest ja 3) pikkuse muudust peatelgede sihis.*

Vaatleme vektorit  $dX_K$ , mis algolekus on esitatud LK-s ja mis deformatsiooni käigus muutub vektoriks  $dx_k = x_{k,K} dX_K$ . Kasutades seoseid (3.131)<sub>1</sub> saame

$$dx_k = \underbrace{\delta_{kL} R_{LM}}_{R_{kM}} C_{MK}^{\frac{1}{2}} dX_K = \underbrace{c_{kl}^{-\frac{1}{2}} R_{lm} \delta_{mK}}_{R_{lK}} dX_K. \quad (3.137)$$

Avaldisele (3.137) saab anda järgmise tõlgenduse (joonis 3.12).

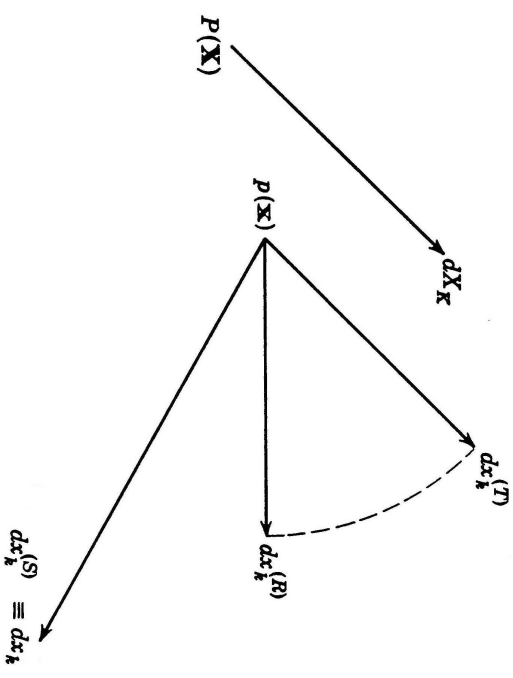
<sup>33</sup>Tuntud ka kui pöörde põhitseoreem.

1. Vektori  $d\mathbf{X}$  paralleellilike<sup>34</sup> (koos peatelgedega) vektoriks  $d\mathbf{x}^{(T)}$ .
2. Vektori  $d\mathbf{x}^{(T)}$  jäik pööre<sup>35</sup> (koos peatelgedega) vektoriks  $d\mathbf{x}^{(R)}$ .
3. Läbi peatelgede pikkuste muutmise<sup>36</sup> muudetakse vektor  $d\mathbf{x}^{(R)}$  vektoriks  $d\mathbf{x}^{(S)} = d\mathbf{x}$ . Täiendavat pööret ei toimu siin ja ainult siis, kui  $d\mathbf{X}$  on paralleelne ühega tensori  $C_{KL}$  peavektoritest.

Valemities on eelnev esitatav kujul

$$\begin{cases} dx_k^{(T)} = \delta_{kK} dX_K, \\ dx_k^{(R)} = R_{kI} dx_I^{(T)}, \\ dx_k = c_{kI}^{-\frac{1}{2}} dx_I^{(R)}. \end{cases} \quad (3.138)$$

Kui asendame (3.138)<sub>1</sub> → (3.138)<sub>2</sub> → (3.138)<sub>3</sub>, siis saame (3.137).



<sup>34</sup>I.k. translation

<sup>35</sup>I.k. rotation

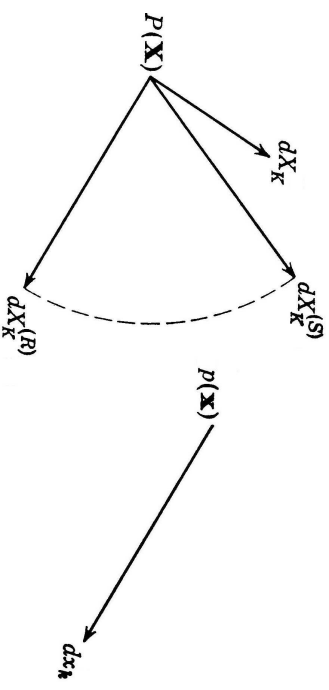
<sup>36</sup>I.k. stretch

Joonis 3.12: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon.

### 3.10. Deformatsiooni dekompositsioon

Joonis 3.13 esitab sama protsessi teises järjekorras — pikenemine, pööre, liike, st.,

$$\begin{cases} dX_M^{(S)} = C_{MK}^{\frac{1}{2}} dX_K, \\ dX_L^{(R)} = R_{LM} dX_M^{(S)}, \\ dx_k = \delta_{kL} dX_L^{(R)}. \end{cases} \quad (3.139)$$

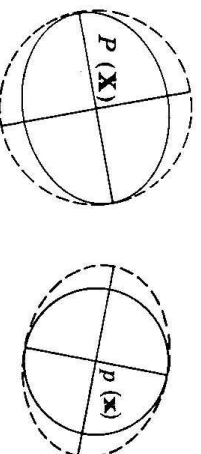


Joonis 3.13: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon.

Seega sellise dekompositsiooni puhul pole operatsioonide järjekord tähtis.

Eelnev mõttekäik on esitatav ka deformatsiooniellipsoidide kaudu —

1. ....
2. ....
3. ....





### 3.10.4 Deformatsioonigradiendi polaardekompositsioon

Teine väga levinud lähenemisviis eelmises alajaotuses käsitletule on järgmine. Deformatsioonigradiendile  $\mathbf{F}$  rakendatakse polaardekompositsiooni teoreemi ning ta esitatakse kahe tensori (millest üks on ortogonaalne ja teine sümmeetriline ning positiivselt määratud) korrutisena:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \quad (3.140)$$

- Avaldisi (3.140)<sub>1</sub> tuleb käsitleda kui tensorite  $\mathbf{U}$  ja  $\mathbf{V}$  definitsioone.
- $\mathbf{R}$  on pöördetensor,  $\mathbf{U}$  – parempoolne pikennemistensor<sup>37</sup>,  $\mathbf{V}$  – vasakpoolne pikennemistensor<sup>38</sup>.
- $\mathbf{R}$  on ortogonaalne,  $\mathbf{U}$  ja  $\mathbf{V}$  sümmeetrilised ja positiivselt määratud.
- „Vasak” ja „parem” kasutus tuleb sellest, kummalt poolt on vastava tensoriga korrutatud pöördetensorit.

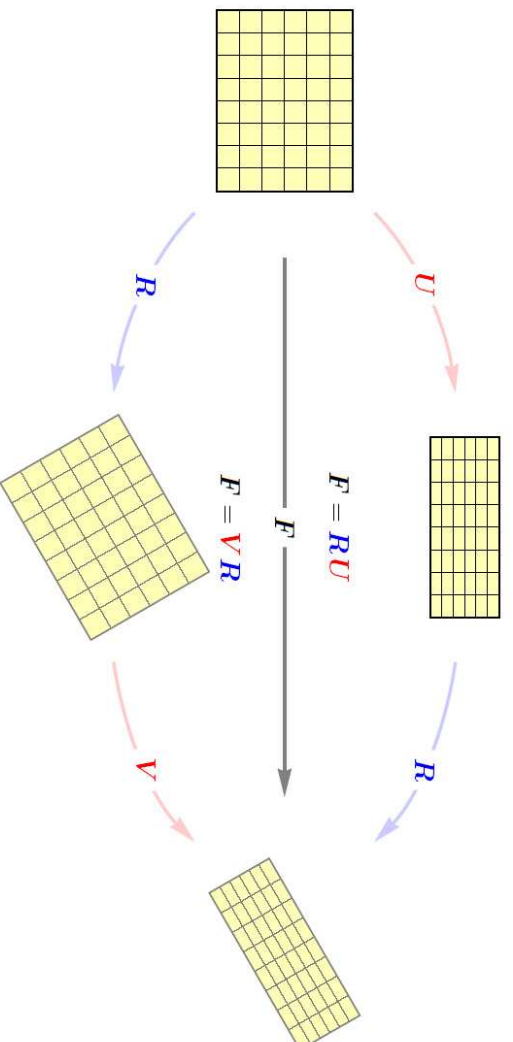
Teatavasti  $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$  ja polaardekompositsiooni rakendamist on graafiliselt kujutatud joonisel 3.14.

<sup>37</sup>I. k. *right stretch tensor*

<sup>38</sup>I. k. *left stretch tensor*

### 3.10. Deformatsiooni dekompositsioon

#### Polar Decomposition: Graphical Interpretation



Relation between left and right stretch tensors

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T \quad \mathbf{U} = \mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R}$$

Deformatsioonitensordid defineeritakse sel juhul pisut teisiti ja ka deformatsioonitensori te nimed on teised.

*Parempoolne Cauchy-Greeni deformatsioonitensor*

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{U}^{-2} \quad (3.141)$$

*Vasakpoolne Cauchy-Greeni deformatsioonitensor*

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2, \quad \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2} \quad (3.142)$$

Seosed „senikasutatud” ja „varendefineeritud” deformatsioonitensoriga:

- Cauchy DT:  $C_{KL} \leftrightarrow \mathbf{C}$ ,
- Piola DT:  $C_{KL}^{-1} \leftrightarrow \mathbf{C}^{-1}$ .
- Fingeri DT:  $c_{kl}^{-1} \leftrightarrow \mathbf{B}$ ,
- Greeni DT:  $c_{kl} \leftrightarrow \mathbf{B}^{-1}$ ,

### 3.11. Pidevustingimused ehk sobivustingimused

3 - 68

#### 3.11 Pidevustingimused ehk sobivustingimused<sup>39</sup>

Kolmemõõtmelises ruumis on deformatsioonitensori kuus (sõltumatut) komponenti seotud siirdevektori kolme komponendiga läbi kuue võrrandi (vt. (3.53) lk.26). Näiteks,

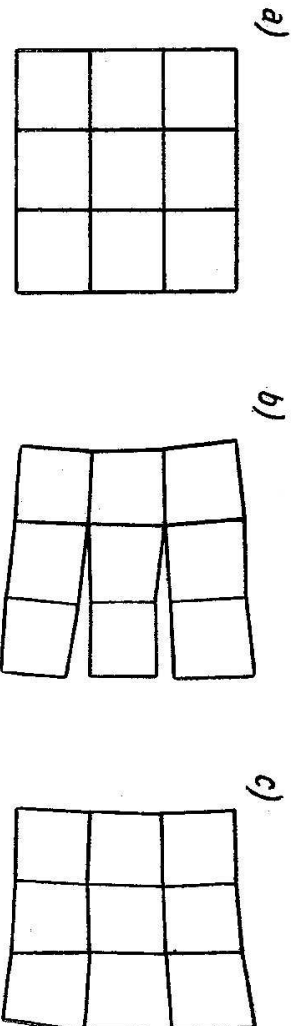
$$2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} = 2E_{LKR} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{N,K}U_{N,L}. \quad (3.143)$$

Kui on teada siirdevektori komponendid  $U_K$ , siis valemi (3.143) põhjal saab määrata kas tensori  $C_{KL}$  või  $E_{KL}$  kuus komponenti. Kui aga on vastupidi, st., et teada on tensori  $C_{KL}$  või  $E_{KL}$  kuus komponenti, siis on meil kolme tundmatu määramiseks kuus võrrandit. Järelikult on meil tegu ülemääratud süsteemiga. Selleks, et siirdekomponendid  $U_K$  oleks tiheselt määratavad ja pidevad (siirdeväli peab olema tiheselt määratud ja pidev) tuleb nüüd deformatsiooni tensori komponentidele peale panna lisatingimused. Neid tingimusi nimetatakse *pidevustingimusteks* ehk *sobivustingimusteks*<sup>40</sup>. Kui siirdekomponendid  $U_K$  on ette teada (siirdekomponendid on valitud põhinnuutujateks) siis on sobivustingimused automaatselt täidetud. Kui aga põhinnuutujateks on deformatsioonitensordid, siis on sobivustingimustel täita oluline roll.

<sup>39</sup>Samana teemat käsitletseme ka elastusteooria aluste kursuses, kuid siin on käsitlus pisut tildisem.

<sup>40</sup>Ik. *compatibility conditions*

Alternatiivne põhjendus pidevustingimuste sissetoomiseks. Oletame,



Joonis 3.15: Pidevustingimused

et vaadeldav keha on algolekus lõigatud väikesteks kuupideks (joon. 3.15 a). Kui iga kuupi on seejärel eraldi deformeeritud, siis on nende uuesti ühendamine selliselt, et tekkiks pidev keha üldjuhul võimatu (joon. 3.15 b). Selleks, et peale deformatsiooni oleks meil endiselt tegu pideva kehaga (joon. 3.15 c), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama teatud tingimusi, mida eestikeelses kirjanduses nimetatakse tavaliselt *pidevustingimusteks*.

### 3.11. Pidevustingimused ehk sobivustingimused

3 - 70

**Pidevusvõrrandite tuletamine.** Tuletame pidevusvõrrandid lõpmata väikeste deformatsioonide tensorile

$$2\tilde{E}_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K}. \quad (3.144)$$

Kirjutame ülles viimase kõik sõltumatud komponendid:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{11} &= U_{1,1}, & \tilde{E}_{22} &= U_{2,2}, & \tilde{E}_{33} &= U_{3,3}, \\ 2\tilde{E}_{12} &= U_{1,2} + U_{2,1}, & 2\tilde{E}_{13} &= U_{1,3} + U_{3,1}, & 2\tilde{E}_{23} &= U_{2,3} + U_{3,2}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Diferentseerime võrrandit (3.145)<sub>1</sub> kaks korda koordinaadi  $X_2$  järgi ja võrrandit (3.145)<sub>2</sub> kaks korda koordinaadi  $X_1$  järgi ning liidame saadud tulemused.

$$\tilde{E}_{11,22} + \tilde{E}_{22,11} = U_{1,122} + U_{2,112} = (U_{1,2} + U_{2,1})_{,12} = 2\tilde{E}_{12,12} \quad (3.146)$$

Kombineerides võrrandeid (3.145)<sub>1-3</sub> saame veel kaks analoogilist pidevusvõrrandit.

Neist aga ei piisa. Selleks, et saada veel kolm võrrandit, leiame võrrandeist (3.145)<sub>4-6</sub> osatuletised „puuduva koordinaadi” järgi, liidame (3.145)<sub>4-5</sub> ja lahutame saadud summast (3.145)<sub>6</sub>. Seejärel võtame saadud tulemusest osatuletise  $X_1$  järgi:

$$\begin{aligned}
& 2 \left( \tilde{E}_{12,3} + \tilde{E}_{13,2} - \tilde{E}_{23,1} \right)_{,1} = \\
& = [(U_{1,23} + U_{2,13}) + (U_{1,23} + U_{3,12}) - (U_{2,13} + U_{3,12})]_{,1} = \\
& = 2U_{1,123} = 2\tilde{E}_{11,23}.
\end{aligned} \tag{3.147}$$

Analooiliselt saab tuletada veel kaks pidevusvõrrandit.

Kokku oleme saanud kuus pidevusvõrrandit, mis on tuntud ka *Saint-Venant'i pidevusvõrranditena*:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\tilde{E}_{11,22} + \tilde{E}_{22,11} = 2\tilde{E}_{12,12} \\
\tilde{E}_{22,33} + \tilde{E}_{33,22} = 2\tilde{E}_{23,23} \\
\tilde{E}_{11,33} + \tilde{E}_{33,11} = 2\tilde{E}_{13,13} \\
\left( \tilde{E}_{12,3} + \tilde{E}_{13,2} - \tilde{E}_{23,1} \right)_{,1} = \tilde{E}_{11,23} \\
\left( \tilde{E}_{12,3} + \tilde{E}_{23,1} - \tilde{E}_{13,2} \right)_{,2} = \tilde{E}_{22,13} \\
\left( \tilde{E}_{23,1} + \tilde{E}_{13,2} - \tilde{E}_{12,3} \right)_{,3} = \tilde{E}_{33,12}
\end{array} \right. \tag{3.148}$$

---

### 3.11. Pidevustingimused ehk sobivustingimused

Saadud kuuel võrrandil on väga selge füüsikaline sisu.

1. Esimesed kolm: kui on antud normaaldeformatsioonid (suhtelised pikened) kolmes ristuvas sihis, siis nende sihtidega määratud tasandites ei saa nihkedeformatsiooni meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega (3.148)<sub>1–3</sub>.
2. Viimased kolm: kui on antud nihkedeformatsioonid kolmes ristuvastasapinnas, siis ei saa normaaldeformatsioone meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega (3.148)<sub>4–6</sub>.

Mittelineaarsetele deformatsioonitensoritele, näiteks Lagrange'i DT, on pidevustingimusi leida sootuks keerukam.

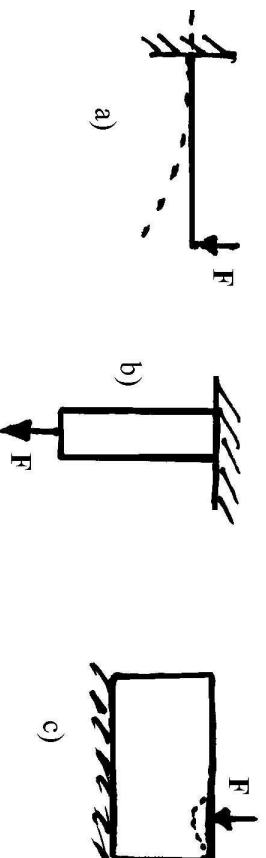
**Märkus:** Võrrelge saadud valemeid (3.148) elastsusteooria aluste kursuse 3. peatükis tuletatud pidevustingimustega (mida seal nimetati ka Saint-Venant'i pidevusvõrranditeks).

### 3.12 Lihtsusstatud deformatsiooniteooriad

Esitatud valemite kasutamine võib viia matemaatilistele raskustele. Klassikalises (lineaarses) elastsusteoorias ja vedelike voolamise teoorias (hüdromehaanikas) hiljatakse seetõttu mittelineaarsed liikmed, st. uuritakse vaid nn. väikeseid deformatsioone. Tihti saab lineaarse teooria täpsust tõsta lähtudes uuritava objekti geometriast ja deformatsiooni iseloomust.

**Näited:**

- Hästi õhukese tala paine — pöörded suured, pikenemised väikesed.
- Tala tõmme — pikenemised suured, pöörded väikesed. Rakendatakse Saint-Venant'i printsiipi (koormuse rakenduspunkti lähiumbruses on olukord muust tala erinev).
- Koondatud jõu mõju massiivile — siin on soovitatav rakendada puhtalt mittelineaarset teooriat.



Joonis 3.16: Erineva iseloomuga deformatsioonid: a) õhukese tala paine, b) tala tõmme ja c) koondatud jõu mõju massiivile.

Deformatsioonitensor, pöördetensor ja invariantid on avaldatavad läbi siirdegradientide (näiteks  $U_{K,L}$ ). Seega saame rääkida väikestest siiretest või mõnest teisest kolmest sõltumatust muutujast, mis neid asendaks. Näiteks võivad olla aproksimatsioonide puhul kasutusel kolm peapikenemist või pöördvektori komponendid. Deformatsioonitensori või pöördetensori komponentide otsene kasutamine on komplitseeritud, sest sobivustingimused peavad olema rahuldatud. Samuti tuleb olla ettevaatlik kui suurusjärkude hindamise aluseks on siirdegradientid. Järgnevate näidete eesmärgiks on anda mingi baasettekujutus sellistest ligikaudsetest teooriatest.

### 3.12.1 Väikeste siirete teooria

Väikeste siirete teooria<sup>41</sup> puhul loetakse väikesteks kõik siirdekomponeendid ja siirdegradiendid ning hiljatakse kõik mittelineaarsed liikmed. Deformatsiooni-tensordid (3.53) saavad nüüd kujul

$$\begin{cases} 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} \approx U_{K,L} + U_{L,K} = 2\tilde{E}_{KL}, \\ 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} \approx u_{k,l} + u_{l,k} = 2\tilde{e}_{kl} \end{cases} \quad (3.149)$$

ja pöördetensori jaoks kasutatakse valemmeid (3.135) ja (3.136), st.

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - \delta_{KM} \quad \text{ja} \quad \tilde{R}_{KM} \approx \delta_{kK} \delta_{mM} \tilde{r}_{km}.$$

Siin kaob erinevus  $U_K$  ja  $u_k$  vahel ning saadakse klassikaline lõpmata väikeste deformatsioonide teooria.

---

<sup>41</sup>Ik. *small displacement theory*

Et saada paremaid (täpsemaid) tulemusi vaadeldakse siin tihti siiret nn. häirituste rea kujul —

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \mathbf{u}_n, \quad (3.150)$$

kus suurused  $\mathbf{u}_n$  hoitakse fikseeritud ning  $\epsilon$  on häiritusparameeter. Sellise formalismi puhul vastab  $\epsilon^n$   $n$ -järku aproksimatsioonile. Teooria esitati E. ja F. Cosserat' poolt (1896).

### 3.12.2 Väikeste pöörete teooria

Väikeste pöörete<sup>42</sup> puhul loeme iga joonelemendi pööre väikeseks ja pöördenurga  $\vartheta \approx \sin \vartheta \approx \tan \vartheta$ . Deformatsioonitenzorit (3.65) (lk. 30) võib nüüd apraksimeerida kujul

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \left( \tilde{E}_{MK} \tilde{E}_{ML} + \tilde{E}_{MK} \tilde{R}_{ML} + \tilde{R}_{MK} \tilde{E}_{ML} \right). \quad (3.151)$$

Kui pööre on väike, siis võib kasutada pöördvektorit  $2\tilde{R}_K = e_{KLM} \tilde{R}_{ML}$ . Kui nüüd mõni  $\tilde{R}_K$  komponent osutub teistega võrreldes väikeseks, siis lihtsusstüb  $E_{KL}$  avaldis veelgi, sest liikmed, mis osutuvad teistega võrreldes väikesteks, hiljatakse. Selline apraksimatsioon sõltub keha ja deformatsiooni geometriast. Näiteks, õhukese plaadi painde puhul on tasandilise elemendi pööre ümber kesktasandi normaali sihilise telje väike, võrreldes pööretega, mis toimuvad kesktasandil asuvate telgede ümber. Saadakse plaatide teist järku teooria, mis on tuntud kui Föppl-Kármán-Timošenko teooria.

---

<sup>42</sup>Ik. *small rotations*

### 3.12. Lihtsusstatud deformatsiooniteooriad

#### 3.12.3 Väikeste deformatsioonide ja väikeste pöörete teooria

Väikeste deformatsioonide (suhteliste pikennemiste) ja väikeste pöörete<sup>43</sup> puhul loetakse nii  $\tilde{E}_{KL} \ll 1$  kui ka  $\tilde{R}_{KL} \ll 1$  ja

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \left( \tilde{E}_{MK} \tilde{R}_{ML} + \tilde{R}_{MK} \tilde{E}_{ML} \right). \quad (3.152)$$

Kui pöörded ja deformatsioonid osutuvad sama suurusjärku olevateks, siis võib nende korrutised hiljjata. Tulenuseks on see, et eeldame väikeseid siirdegradiente ja saame lõpmata väikeste deformatsioonide teooria, st.,

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} \text{ ja } R_{KL} \approx \delta_{KL} + \tilde{R}_{KL}. \quad (3.153)$$

Siin on seega hiljajatud kõik mittelineaarsed liikmed. Kehiti superpositsiooni printsiip: *Mitmeest siirdest põhjustatud deformatsiooni võib vaadelda neist siiretest eraldi põhjustatud deformatsioonide summana* —

$$\begin{cases} \mathbf{E} \approx \tilde{\mathbf{E}} \approx \tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_2 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \\ \mathbf{R} \approx \tilde{\mathbf{R}} \approx \tilde{\mathbf{R}}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_2 = \tilde{\mathbf{R}}_2 + \tilde{\mathbf{R}}_1 \end{cases} \quad (3.154)$$

---

<sup>43</sup>Ik. *small extenctions and small rotations*

### 3.13 Deformatsioonide erijuhud

Vaatleme kahte tüüpi deformatsioone

- (i) *Deformatsioonid, mille puhul pikenemistel või pööretel on piiranguid.* Need deformatsioonid ei sõltu suunast ega keha või deformatsiooni geometriast. Siia klassi kuuluvad n. jääk deformatsioon, puhas homogeenne pikenemine, potentsiaalne deformatsioon ja isohooriline deformatsioon.
- (ii) *Deformatsioonid, mille erisus on põhjustatud koordinaadistiku sobivast valikust.* Teisisõnu, pikenemised ja pöörded võivad mõnes koordinaadistikus olla väga spetsiifiliselt määratud. Siia klassi kuuluvad näiteks tihtlane paisumine, (lihtne) pikideformatsioon, lihtne nihke, tasapinnaline deformatsioon.

**Märkus:** Käesolevas alajaotuses on tensorid tihti tähistatud rasvases kirjas. Sel juhul  $\mathbf{C} \leftrightarrow C_{KL}$ ,  $\mathbf{c} \leftrightarrow c_{kl}$ ,  $\mathbf{I} \leftrightarrow \delta_{KL}$ ,  $\mathbf{R} \leftrightarrow R_{KL}$  jne.

---

3.13. Deformatsioonide erijuhud

3 - 80

(i) Deformatsioonid, mille puhul pikenemistel või pööretel on piiranguid.

**Jääk deformatsioon.** Deformatsioon on jääk<sup>44</sup> (keha jääb jäigaks) kui mistahes kahe punkti vaheline kaugus ei muutu. Tarvilik ja piisav tingimus selleks on, et  $\mathbf{C} = \mathbf{c} = \mathbf{I}$  igas punktis. Lisaks  $C_\alpha = \lambda_\alpha^2 = 1$ ,  $I_C = II_C = 3$  ja  $III_C = 1$  Vaata ka lk. 55.

**Puhas deformatsioon.** Puhta deformatsiooni<sup>45</sup> ehk paisumise ehk pöörddevaba deformatsiooni puhul peatjeljed ei pöördu. Tarvilik ja piisav tingimus selleks on, et  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  igas punktis. Vaata ka lk. 59

**Potentsiaalne deformatsioon.** Potentsiaalse deformatsiooni<sup>46</sup> puhul leidub skalaarne funktsioon  $V$  nii, et

$$\mathbf{U} = \text{grad } V. \quad (3.155)$$

---

<sup>44</sup>lk. rigid deformation

<sup>45</sup>lk. pure strain, dilatation, eesti keeles ka puhas pikenemine ehk pikideformatsioon

<sup>46</sup>lk. potential deformation



**Isohooriline deformatsioon.** Isohooriline deformatsioon<sup>47</sup> on deformatsioon, mille puhul ruumala ei muutu. Kuna (vt. ka lk. 57)<sup>48</sup>

$$\frac{dv}{dV} = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}} = j,$$

siis isohoorilise deformatsiooni puhul

$$\sqrt{\text{III}_C} = \sqrt{\text{III}_c} = j = 1. \quad (3.156)$$

Kuna antud juhul  $\text{III}_C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$ , siis saab invariantid  $I_C$  ja  $\text{II}_C$  avaldada vaid kahe peapikenemise kaudu. Enamgi veel, funktsioonid mis tldjuhul sõltuvad kõigest kolmest invariantist (peapikenemisest), on nüüd vaid kahe esimese invarianti (peapikenemise) funktsioonid.

---

<sup>47</sup>I.k. isohoric deformation

<sup>48</sup>

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right|, \quad C_{KL} = x_{k,K} x_{k,L}, \quad \text{III}_C = |C_{KL}| = |x_{k,K} x_{k,L}| = |x_{k,K}| \cdot |x_{k,L}|$$

### 3.13. Deformatsioonide erijuhud

**(ii) Deformatsioonid, mille erisus on põhjustatud koordinaadistiku sobivast valikust**

Siin on enamikel juhtudel tegu affine teisendusega, mis seob materiaalse punkti  $\checkmark$  asukoha enne ( $X_K$ ) ja pärast ( $x_k$ ) deformatsiooni.

$$x_k = D_{kK} X_K, \quad X_K = D_{Kk}^{-1} x_k, \quad D_{kK} D_{Kl}^{-1} = \delta_{kl}, \quad (3.157)$$

kus  $D_{kK}$  ja  $D_{Kl}^{-1}$  on konstantsed tensorid (maatriksid). Teisendus (3.157) jätab sirged sirgeteks, ellipsoid ellipsiteks, ellipsoidid ellipsoidideks jne. Sellist deformatsiooni nimetatakse *homogeensks deformatsiooniks*<sup>49</sup>. Seda võib defineerida ka kujul

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial X_K \partial X_L} = 0. \quad (3.158)$$

Valemite (3.157)<sub>1</sub> ja (3.157)<sub>2</sub> põhjal on selge, et homogeense deformatsiooni korral deformatsioonigradiendid

$$x_{k,K} = D_{kK} \quad \text{ja} \quad X_{K,k} = D_{Kk}^{-1} \quad (3.159)$$

---

<sup>49</sup>I.k. homogeneous strain

*Üldistatud homogeenne deformatsiooni* puhul võib  $D_{kK}$  sõltuda materiaalse punkti koordinaatidest ja sel juhul viimased valemid ei kehti.

Erinevad tensorid (maatriksid)  $D_{kK}$  kirjeldavad erinevaid deformatsioone, millest mõningaid vaatleme allpool.

**Ühtlane paisumine.** Ühtlaseks paisumiseks<sup>50</sup> nimetatakse homogeenset deformatsiooni, mille puhul

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (3.160)$$

Deformatsioonitensorid

$$\mathbf{C} = \mathbf{c}^{-1} = \lambda^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{C}^{-1} = \lambda^{-2} \mathbf{I}, \quad 2\mathbf{E} = (\lambda^2 - 1)\mathbf{I}. \quad (3.161)$$

Deformatsioonielipsoidid on antud juhul sfäarid. Järelikult iseloomustavad sellist deformatsiooni identset peadeformatsioonid (peapikenemised). Parameeter  $\lambda$  iseloomustab pikkuse muutust suvalises suunas. Kui  $\lambda > 1$ , siis on tegu ühtlase

<sup>50</sup>I.k. *uniform dilatation*

### 3.13. Deformatsioonide erijuhud

paisumisega (laienemisega), kui aga  $0 < \lambda < 1$ , siis ühtlase kokkutõmbumisega. Kera jääb sellisel deformatsioonil keraks. Deformatsioonitensorite invariantidid

$$I_C = 3\lambda^2, \quad II_C = 3\lambda^4, \quad III_C = \lambda^6. \quad (3.162)$$

**Üheteljeline (ühesuunaline) pikennemine ja pikideformatsioon.**

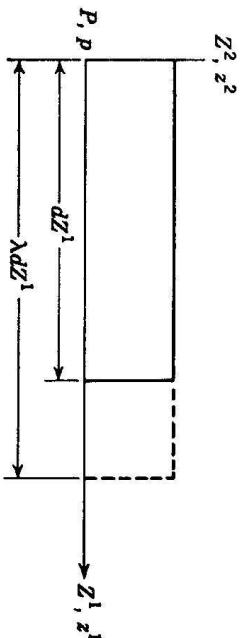
Üheteljelise pikennemise<sup>51</sup> puhul on

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty \quad (3.163)$$

ning

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{c}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad [\mathbf{c}] = [\mathbf{C}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.164)$$

<sup>51</sup>I.k. *uniaxial strain*



Joonis 3.17: Ühesuunaline pikenemine. NB!  $Z^K$  asemel tuleb näha  $X_K$  ja  $z^k$  asemel  $x_k$  jne. :)

Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensordid  $2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$  ja  $2\mathbf{e} = \mathbf{I} - \mathbf{c}$  ning invariantid

$$\begin{cases} I_C = 2 + \lambda^2, & II_C = 1 + 2\lambda^2, & III_C = \lambda^2, \\ I_E = 0.5(\lambda^2 - 1), & II_E = III_E = 0. \end{cases} \quad (3.165)$$

Deformatsioonellipsoid on antud juhul pöördellipsoid kujuures kaks peapikenemist on võrdsed ühega, ning üks on ühest erinev. Deformatsiooni tulemusena liigub teljega  $X_1$  risti olev tasand paralleelselt iseendaga ja  $X_2$  ning  $X_3$  sihis deformatsioon puudub.

Tegelikult tavapäraste materjalide korral tala ristlõige tõmbe puhul väheneb ja surve puhul suureneb. Sellist deformatsiooni nimetatakse *pikideformatsiooniks*

### 3.13. Deformatsioonide erijuhud

ehk *pikenemiseks*<sup>52</sup>. Nüüd

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & K\lambda & 0 \\ 0 & 0 & K\lambda \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (3.166)$$

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{c}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & (K\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (K\lambda)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.167)$$

$$[\mathbf{c}] = [\mathbf{C}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (K\lambda)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (K\lambda)^{-2} \end{bmatrix}. \quad (3.168)$$

Invariantid

$$I_C = (1 + 2K^2)\lambda^2, \quad II_C = (2 + K^2)K^2\lambda^4, \quad III_C = K^4\lambda^6, \quad (3.169)$$

Seega, antud juhul on  $X_1$  sihis pikenemiskoeffitsient  $ds_1/dS_1 = \lambda$  ja suhteline pikenemine  $(ds_1 - dS_1)/dS_1 = \lambda - 1$ . Vastavad suurused  $X_2$  ja  $X_3$  sihis on  $K\lambda$

<sup>52</sup>Ik. *simple extension*, eesti keeles on võimalikud veel mitmed terminid, näiteks puhas pikenemine jms.

ja  $K\lambda - 1$ . *Poisson'i tegur*  $\nu$ , mis iseloomustab pikenemiste suhet põiki- ( $X_2$  või  $Z_3$  siht) ja pikisuunas ( $X_1$  siht), on defineeritud järgmiselt:<sup>53</sup>

$$\nu = -\frac{K\lambda - 1}{\lambda - 1} = \frac{1 - K\lambda}{\lambda - 1}, \quad K = \frac{1 + \nu}{\lambda} - \nu. \quad (3.170)$$

Kui  $\nu > 0$  siis ristlõige väheneb, kui  $\nu < 0$ , siis suureneb,  $\nu = -1$  ( $K = 1$ ) korral on tegu tihtlase paisumisega,  $\nu = 0$  ( $K = 1/\lambda$ ) puhul tiheteljelise pikenemisega.

**Lihntne nihke.** Lihntsa nihke<sup>54</sup> korral

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad -\infty < S < \infty, \quad S = \text{const}. \quad (3.171)$$

Seega liikumisseadus saab kuju (joonis 3.18)

$$x_1 = X_1 + SX_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3. \quad (3.172)$$

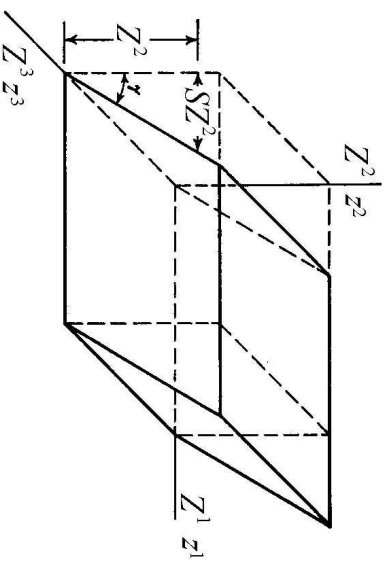
<sup>53</sup>Tugevusõpetuses

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}.$$

<sup>54</sup>I.k. *simple shear*. Eelmiste aastate konsppektides olen sin ekslikult kasutanud terminit puhas nihke. Tegelikult vastab puhtale nihkele olukord, mida on kirjeldatud lk. 42 oleval joonisel 3.8.

### 3.13. Deformatsioonide erijuhud

Lihntsat nihet võib tihest küljest kirjeldada kui deformatsiooni, mis pöörab tasandeid  $X_1 = \text{const}$ . ümber nende lõikejoone tasandiga  $X_2 = 0$  nurga  $\gamma = \arctan S$  võrra, vastavalt liikumisseadusele (3.172). Teisest küljest aga kui deformatsiooni, mis nihutab mittedeformeeruvaid tasandeid  $X_2 = \text{const}$ . vastavalt liikumisseadusele (3.172).



Joonis 3.18: Lihntne nihke. NB!  $Z$  ja  $X$ ;  $z$  ja  $x$ !

Deformatsioonitensorid ja invariantid

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & S & 0 \\ S & 1+S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{C}^{-1}] = \begin{bmatrix} 1+S^2 & -S & 0 \\ -S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.173)$$

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1 & -S & 0 \\ -S & 1+S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{c}^{-1}] = \begin{bmatrix} 1+S^2 & S & 0 \\ S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.174)$$

$$[\mathbf{E}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & -S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.175)$$

$$\begin{cases} I_C = II_C = 3 + S^2, & III_C = 1, \\ I_e = -I_E = 2II_e = 2III_e = -S^2/2, & III_e = III_E = 0. \end{cases} \quad (3.176)$$

Kuna  $III_C = 1$ , siis on lihtne nihe isohooriline deformatsioon.

Kui lahendada karakteristiklik kuupvõrrand

$$C^3 - I_C C^2 + II_C - III_C = 0,$$

saame deformatsioonitensorite  $\mathbf{C}$  ja  $\mathbf{c}$  peaväärtused

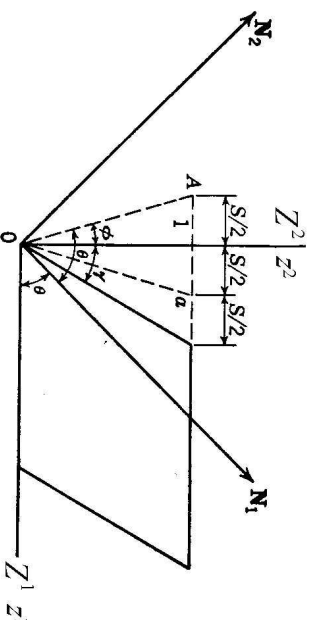
$$\begin{cases} C_1 = 1/c_1 = \lambda_1^2 = 1 + S^2/2 + S\sqrt{1 + S^2/4}, \\ C_2 = 1/c_2 = \lambda_2^2 = 1 + S^2/2 - S\sqrt{1 + S^2/4}, \\ C_3 = 1/c_3 = \lambda_3^2 = 1. \end{cases} \quad (3.177)$$

Viimastele vastavad peavektorid

$$\begin{cases} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{cases} = \frac{\mathbf{I}_1 + \left( \frac{S}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{S^2}{4}} \right) \mathbf{I}_2}{\sqrt{2 + S^2/2 \pm S\sqrt{1 + S^2/4}}}, \quad \mathbf{N}_3 = \mathbf{I}_3, \quad (3.178)$$

### 3.13. Deformatsioonide erijuhud

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{cases} = \frac{\mathbf{i}_1 + \left( -\frac{S}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{S^2}{4}} \right) \mathbf{i}_2}{\sqrt{2 + S^2/2 \mp S\sqrt{1 + S^2/4}}}, \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{i}_3. \quad (3.179)$$



Joonis 3.19: Nihketasand  $\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{Z}$  ja  $\mathbf{X}$ ;  $\mathbf{z}$  ja  $\mathbf{x}$ !

Tasandi  $X_3 = 0$  punkt  $A(-S/2, 1, 0)$  läheb pärast deformatsiooni vastavalt valemile (3.172) asendisse  $a(S/2, 1, 0)$  (vt. joonis 3.19). Seega  $OA = Oa$  ja järelikult kiud, mis olid enne deformatsiooni paralleelsed  $OA$ -ga ja moodustasid  $X_2$  teljega nurga  $\Phi = \arctan S/2$  ei muuda deformatsiooni käigus oma pikkust. Valemist (3.178) saame määrata nurga

$$\tan \vartheta = S/2 + \sqrt{1 + S^2/4}. \quad (3.180)$$

Ka  $OA$  ja  $\mathbf{N}_1$  vaheline nurk on  $\vartheta$ , sest  $\tan(\widehat{OAN_1}) = \tan \vartheta$ . Seega poolitab peasuund  $\mathbf{N}_1$  nurga  $\widehat{OAX_1}$ , peasuund  $\mathbf{N}_2$  on temaga risti tasandil  $X_3 = 0$  ning  $\mathbf{N}_3$  on suunatud piki telge  $X_3$ .

**Tasapinnaline deformatsioon.** Erinevalt kolmest viimasest näitest, ei pruugi siin olla tegu homogense deformatsiooniga. Tasapinnalise deformatsiooni<sup>55</sup> korral toimub paralleelsetel tasanditel identrne deformatsioon ning nende normaali sihis deformatsioonid puuduvad. Seega, kui deformatsioonid toimuvad  $x_1 - x_2$  tasandis, siis liikumisseadus on esitatav kujul

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(X_1, X_2), \quad k = 1, 2, \\ x_3 &= X_3. \end{aligned} \quad (3.181)$$

---

<sup>55</sup>Ik. plane strain

### 3.13. Deformatsioonide erijuhud

3 - 92

On lihtne mõista, et Cauchy deformatsioonitensor saab nüüd kuju

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.182)$$

ja analoogsed, st., väliskuju poolest sarnased on ka kõik teised deformatsiooni-tensorid ning pöördetensorid. Üks peatelgedest on antud juhul paralleelne  $x_3$ -ga ja tema sihis on pikenemiskoeffitsent  $\lambda_3 = 1$ . Tasapinnaline deformatsioon on isohooriline kui  $\lambda_1 = 1/\lambda_2$ .

Üldistatud tasapinnaline deformatsioon on defineeritud kujul

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(X_1, X_2), \quad k = 1, 2, \\ x_3 &= x_3(X_3). \end{aligned} \quad (3.183)$$

## 3.14 Kiirus ja kiirendus

### 3.14.1 Materiaalne tuletis

Pideva keskkonna mehaanikas on dünaamiliste protsesside kirjeldamise puhul vaja leida materiaalsete punktidega seotud füüsikaliste suuruste (skalaaride, vektorite ja tensorite) muutumise kiirust<sup>56</sup>, st., tuleb leida tuletisi aja järgi skalaaridest, vektoritest ja tensoritest (mis on funktsioonid kas materiaalsest või ruumilistest koordinaatidest) mingis fikseeritud materiaalses punktis. Siinjuures tuleb arvesse võtta nii muutus, mis on seotud fikseeritud ruumipunktiga (lokaalne muutus), kui materiaalse punkti liikumisest põhjustatud muutus (konvektiivne muutus).

**Materiaalne tuletis vektorist.** *Materiaalseks tuletiseks vektorist (aja järgi)* nimetatakse operatsiooni

$$\dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{\mathbf{X}=\text{const}}. \quad (3.184)$$

---

<sup>56</sup>Lk. time rate

3.14. Kiirus ja kiirendus

3 - 94

Kui vektorfunktsiooni  $\mathbf{f}$  argumentideks on LK, s.t.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = F_K(\mathbf{X}, t)\mathbf{I}_K, \quad (3.185)$$

siis langevad materiaalne tuletis ja osatuletis aja järgi kokku:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial F_K}{\partial t} \mathbf{I}_K. \quad (3.186)$$

**Näide:** Nii leitakse materiaalselt tuletist liikumisseadusest  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ . ✓

Keerukam on lugu siis, kui  $\mathbf{f}$  on avaldatud EK-s. Vaatleme vektorfunktsiooni

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f_k(\mathbf{x}, t)\mathbf{i}_k. \quad (3.187)$$

Nüüd (kuna  $\mathbf{i}_k$  on konstantsed)

$$\dot{\mathbf{f}} = \left( \frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \mathbf{i}_k, \quad (3.188)$$

sest  $\mathbf{x}$  on läbi liikumisseaduse LK  $\mathbf{X}$  funktsioon.

Sageli esitatakse materiaalne tuletis vektorist kujul

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{f}_k \mathbf{i}_k \equiv \frac{Df_k}{Dt} \mathbf{i}_k, \quad (3.189)$$

kus suurust

$$\frac{Df_k}{Dt} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}_{f_{k,i}} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}_{\dot{x}_i} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + f_{k,i} \dot{x}_i \quad (3.190)$$

nimetatakse materiaalseks tuletiseks vektori  $\mathbf{f}$  komponendist  $f_k$ . Esimest liiget valemites (3.188) ja (3.190) nimetatakse *lokaalseks tuletiseks* (mõnikord ka *tuletiseks aja järgi*), teist liiget aga *konvektiivseks tuletiseks*. Lokaalne tuletis iseloomustab muutusi, mis toimuvad vaadeldavas ruumipunktis ning konvektiivne tuletis muutusi, mis on põhjustatud materiaalse punkti liikumisest (vaadeldava ruumipunkti ümbruses).

### 3.14. Kiirus ja kiirendus

### 3 - 96

**Materiaalne tuletis skalaarist.** Kui skalaarse funktsiooni  $f$  argumentideks on LK, siis on materiaalse tuletise leidmise eeskiri analoogiline valemiga (3.186):

$$f(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (3.191)$$

Näiteks, kui skalaarseks funktsiooniks on temperatuur  $\theta = \theta(\mathbf{X}, t)$ , siis  $\dot{\theta} = \partial\theta(\mathbf{X}, t)/\partial t$

Kui aga skalaarfunktsiooni argumentideks on EK, s.t.  $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$ , siis on materiaalne tuletis on defineeritud analoogiliselt valemiga (3.190):

$$\dot{\Phi} = \frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}_{\Phi_{,i}} \dot{x}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi_{,i} \dot{x}_i. \quad (3.192)$$

**Näide:** Tähistagu skalaar  $\Phi \equiv \theta$  materiaalse punkti temperatuuri. Temperatuuri muutumisel võib olla kaks põhjust: 1) antud ruumipunkti temperatuur muutub ja 2) liikudes satub materiaalne punkt teise ruumipunkti, kus on erinev temperatuur (võrreldes ruumipunktiga, kus ta oli). Viimast nähtust nimetatakse füüsikas konvektsiooniks.



**Materiaalne tuletis tensoritest.** *Materiaalne tuletis tensorite komponendid* on defineeritud järgmiselt —

$$\frac{Df_{kl}}{Dt} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial t} + f_{kl,m}\dot{x}_m. \quad (3.193)$$

**Märkused:**

- (i) Materiaalse tuletise kontseptsiooni töid sisse Euler (1770) ja Lagrange (1783), tähistus  $D/Dt$  pärineb aga Stokesilt (1845).
- (ii) Kui on tegu liikumisseadusega  $x_k = x_k(\mathbf{X}, t)$ , siis

$$\dot{x}_k = \frac{Dx_k}{Dt} = \frac{\partial x_k}{\partial t}. \quad (3.194)$$

---

### 3.14. Kiirus ja kiirendus

#### 3.14.2 Materiaalse punkti kiirus ja kiirendus

##### Kiirus

*Kiirus* on teatavasti kohavektori esimene tuletis aja järgi. Kui materiaalse punkti kohavektor on  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = x_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{i}_k$ , siis tema kiirus on defineeritud kujul

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.195)$$

Kuna baasivektorid  $\mathbf{i}_k$  ei sõltu ajast, siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{x}_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{i}_k. \quad (3.196)$$

Kui tähistada  $\mathbf{v} = v_k\mathbf{i}_k$ , siis

$$v_k \equiv \dot{x}_k \equiv \frac{\partial x_k}{\partial t} \equiv \frac{Dx_k}{Dt}. \quad (3.197)$$

Kuna kohavektor

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u} \quad (3.198)$$

ja  $\mathbf{P}$  ei sõltu ajast (sageli tähistab  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{X}$  punkti kohavektorit alghetkel), siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (3.199)$$

**Lagrange'i koordinaadid.** Olgu siirdevektor esitatud läbi LK kujul  $\mathbf{u} = U_K \mathbf{I}_K$ , kus  $U_K = U_K(\mathbf{X}, t)$ . Nüüd

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial U_K}{\partial t} \mathbf{I}_K,$$

ehk

$$\mathbf{v} = V_K \mathbf{I}_K, \quad \text{kus } V_K = \frac{\partial U_K}{\partial t}.$$

(3.200)

Viimased avaldised esitavadki *kiiruse (kiirusvektori) Lagrange'i koordinaatides*.

**Euleri koordinaadid.** Kui siirdevektor on esitatud läbi Euleri koordinaatide, siis  $\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k$ , kus  $u_k = u_k(\mathbf{x}, t)$ . Nüüd saame *kiiruse avaldised Euleri koordinaatides*:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{X}=\text{const}} = \frac{D u_k}{D t} \mathbf{i}_k \equiv \left[ \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_{k,l} v_l \right] \mathbf{i}_k,$$

ehk

(3.201)

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{i}_k, \quad \text{kus } v_k = \frac{D u_k}{D t} \equiv \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_{k,l} \underbrace{v_l}_{\dot{x}_l}.$$

Seega, ülaltoodud lähenemist kasutades saame kiiruse- ja siirdekomponeentide vahelised seosed Euleri koordinaatide puhul ilmutamata kujul.

### 3.14. Kiirus ja kiirendus

3 - 100

Teiselt poolt, kui on teada materiaalse punkti kiirus LKs, siis kasutades liikumisseadust  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ , saame

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.202)$$

## Kiirendus

*Materiaalse punkti kiirendus* on defineeritud kui tema kiirusvektori esimene tuletis aja järgi —

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.203)$$

*Lagrange'i koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = A_K \mathbf{I}_K, \quad A_K = \frac{\partial V_K}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_K}{\partial t^2} \quad (3.204)$$

ning *Euleri koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = a_k \mathbf{i}_k, \quad a_k = \frac{D v_k}{D t} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l} \underbrace{v_l}_{\dot{x}_l} \quad (3.205)$$

Seega avalduvad kiirenduse komponendid nii LK-s kui EK-s ilmutatud kujul.

## Märkused

- (i)  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  määrab *kiiruse välja* ( $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  omakorda *kiirenduse välja*).
- (a) Punkti, kus  $\mathbf{v} = 0$ , nimetatakse *stagneerunud punktiks*<sup>57</sup>.
- (b) Kui kiirus ei sõltu ajast, st.,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ , siis nimetatakse sellist liikumist *statsionaarseks liikumiseks*<sup>58</sup>. See määratlus kehtib suvalise vektorvälja jaoks.
- (c) Liikumist, mille puhul vaid üks kiirusvektori komponent erineb nullist ja sõltub seejuures vaid vastavast ruumikoordinaadist nimetatakse *ühemõotmeliseks liikumiseks*<sup>59</sup> — näiteks  $v_1 = v_1(x_1, t)$  ja  $v_2 = v_3 = 0$ .
- (d) Liikumist, mille puhul üks kiirusvektori komponent on null ja kaks kiirusvektori komponenti on nullist erinevad ning sõltuvad seejuures vastavatest ruumikoordinaatidest, nimetatakse *tasapinnaliseks liikumiseks*<sup>60</sup> — näiteks  $v_1 = v_1(x_1, x_2, t)$ ,  $v_2 = v_2(x_1, x_2, t)$ ,  $v_3 = 0$ .

---

<sup>57</sup>I.k. *stagnation point*, ld. *stagnum* – seisev vesi

<sup>58</sup>I.k. *steady motion*

<sup>59</sup>I.k. *lineal motion*

<sup>60</sup>I.k. *plane motion*

## 3.14. Kiirus ja kiirendus

- (ii) Lagrange'i kirjelduse puhul on (analooogselt punkti kinemaatikaga) antud kiirusega liikuv materiaalne punkt identifitseeritav. Euleri kirjelduse puhul selline analoogia punkti kinemaatikaga puudub. Siin on antud kiiruste välja puhul, hetkel  $t$ , teada kiirusvektor igas ruumipunktis, kuid pole teada, milline materiaalne punkt asub vaadeldavas ruumipunktis.

**Näide: Temperatuuri muutumise kiirus.**

Keskonna liikumisseadus on antud kujul

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + AtX_2, \\ x_2 = -AtX_1 + X_2, \\ x_3 = X_3, \end{cases} \quad (3.206)$$

kus  $A$  on konstant. Temperatuur ruumis muutub vastavalt seosele

$$\theta(\mathbf{x}, t) = x_1 + tx_2. \quad (3.207)$$

Leida temperatuuri muutumise kiirus nii EK-s kui LK-s.

*Lahendus* ...

### 3.14.3 Trajektoor, voolujoon, voolupind

*Trajektoor*<sup>61</sup> on kõver, mida mööda liigub vaadeldav materiaalne punkt — ✓

$$x_k = x_k(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\text{const}}. \quad (3.208)$$

Teisisõnu, trajektoor on joon, mille liikuv materiaalne punkt „joonistab” ruumi. Kui on antud kiiruste väli, siis fikseeritud materiaalse punkti  $\mathbf{X}_0$  trajektoorigi on süsteemi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \quad (3.209)$$

integraalkõver, mis vastab algingimusele  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_0, t_0)$ .

*Voolujooned*<sup>62</sup> on jooned (kõverad), mille puutujad igas punktis ühtivad sihilt kiirusvälja vektoritega. Kui tähistada materiaalse punkti kohavektori  $\mathbf{p}$  lõpmata väikest muutu, mis on paralleelne voolujoone puutujaga  $d\mathbf{p}$ , siis

$$\mathbf{v} = k d\mathbf{p} \quad \text{ehk} \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} = \frac{1}{k}, \quad (3.210)$$

kus  $k$  on konstant. Seega on voolujooned süsteemi (3.210) integraalkõverad.

<sup>61</sup>I.k. *pathline, trajectory*

<sup>62</sup>I.k. *streamlines*

#### 3.14. Kiirus ja kiirendus

#### 3 - 104

Voolujooned näitavad, mis suunas erinevates ruumipunktides asuvad materiaalsed punktid antud hetkel liiguvad.

**Näited** trajektooride ja voolujoonte kohta — pika ja lühikese säriaajaga fotod veepinnal olevast õietolmusest või öisest liiklusest. †

Millisel juhul langevad voolujooned ja trajektoorid kokku? ‡

...

*Voolupinnad*<sup>63</sup> ja *voolutorud*<sup>64</sup> on voolujoonte hulgad, mis lõikuvad vastavalt avatud või suletud kõveraga. \*

*Emissioonijooned*<sup>65</sup> on jooned mille moodustavad ajavahemikus  $t_0 \leq t_1$  fikseeritud ruumipunkti  $\mathbf{X}_0$  läbimud materiaalsed punktid.

*Ajajoonteks*<sup>66</sup> nimetatakse ajavahemikus  $t_0 \leq t_1$  fikseeritud ruumipunkti  $\mathbf{X}_0$  läbimud materiaalsete punktide trajektoorid hulka. ✓

**Näide.** Animatsioon trajektooride, voolujoonte, emissioonijoonte ja ajajoonete moodustumise kohta. ✓

<sup>63</sup>I.k. *streamsheets*

<sup>64</sup>I.k. *stream tubes*

<sup>65</sup>I. k. *streaklines*

<sup>66</sup>I. k. *timelines*

### 3.14.4 Materiaalne tuletis deformatsioonigradientidest ja kohavektori diferentsiaalid

Esiteks leiame materiaalse tuletise deformatsioonigradiendist  $x_{k,K}$ .

$$\frac{D}{Dt}(x_{k,K}) = \frac{\partial}{\partial X^K} \underbrace{\frac{Dx_k}{Dt}}_{v_k} = \dots\dots\dots =$$

Kokku oleme saanud

$$\frac{D}{Dt}(x_{k,K}) = v_{k,l}x_{l,K} \quad (3.211)$$

Teiseks leiame materiaalse tuletise kohavektori diferentsiaalid  $dx_k$ :

$$\frac{D}{Dt}(dx_k) = d(\dot{x}_k) = d(v_k) = v_{k,l}dx_l. \quad (3.212)$$

Järgnevalt näitame, et

$$\frac{D}{Dt}(X_{K,k}) = -v_{l,k}X_{K,l}. \quad (3.213)$$

---

### 3.14. Kiirus ja kiirendus

Selleks leiame materiaalse tuletise võrdusest  $x_{l,L}X_{L,k} = \delta_{kl}$

$$\frac{D}{Dt}x_{l,L}X_{L,k} = \frac{D}{Dt}\delta_{kl} \dots$$

Kust avaldame

$$x_{l,L} \frac{D}{Dt}X_{L,k} = \dots$$

Korrutades VP ja PP  $X_{K,l}$  oleme tõestanud valemi (3.213).

...

### 3.14.5 Suuruse $ds^2$ materiaalne tuletis

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = \frac{D(dx_k dx_k)}{Dt} = 2 \frac{D(dx_k)}{Dt} dx_k = \dots$$

Tähistades

$$d_{kl} = v_{(k,l)} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}), \quad (3.214)$$

saame

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = 2d_{kl} dx_k dx_l, \quad (3.215)$$

kus suurust  $d_{kl}$  nimetatakse *Euleri deformatsioonikiiruse tensoriks*.

LK korral

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = 2d_{kl} x_k x_l dX_K dX_L = 2\dot{E}_{KL} dX_K dX_L. \quad (3.216)$$

Suurust

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KL} \quad (3.217)$$

nimetatakse *Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensoriks*.

### 3.14. Kiirus ja kiirendus

### 3.14.6 Materiaalne tuletis jakobiaanist $j$

Näitame, et

$$\frac{Dj}{Dt} = j v_{k,k} \quad (3.218)$$

$$\frac{Dj}{Dt} = \dots$$

### 3.14.7 Elementaarruumala muutumise kiirus

Lähtume sellest, et  $dv = j d\mathcal{V}$  (vt. lk. 57) ja saame

$$\frac{D(dv)}{Dt} = \frac{D}{Dt} (j d\mathcal{V}) = \frac{D}{Dt} (j) d\mathcal{V} = j v_{k,k} d\mathcal{V} = v_{k,k} dv = I_d dv. \quad (3.219)$$

Siin  $I_d = d_{kk} = v_{k,k}$  on deformatsioonikiiruse tensori esimene invariant ja samas kiiruse divergents.

### 3.14.8 Elementaarpinna muutumise kiirus

Lõpmata väikesed vektorid  $d\mathbf{X}^{(1)}$  ja  $d\mathbf{X}^{(2)}$  =  $dX_L^{(1)}\mathbf{I}_L$  ja  $dX_M^{(2)}\mathbf{I}_M$  LK-s (või  $d\mathbf{x}^{(1)} = dx_l^{(1)}\mathbf{i}_l$  ja  $d\mathbf{x}^{(2)} = dx_m^{(2)}\mathbf{i}_m$  EK-s) määravad läbi vektorkorruutise elamen-  
taarpinnad

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{X}^{(1)} \times d\mathbf{X}^{(2)} \quad \text{ja} \quad d\mathbf{a} = d\mathbf{x}^{(1)} \times d\mathbf{x}^{(2)}, \quad (3.220)$$

mida saab omakorda avaldada kujul

$$d\mathbf{A} = dA_K \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{a} = da_k \mathbf{i}_k. \quad (3.221)$$

Näitame, et elementaarpinna vektori komponendi  $da_k$  muutumise kiirus avaldub kujul:

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = v_{m,m} da_k - v_{m,k} da_m. \quad (3.222)$$

**Tõestus:** ...

$$d\mathbf{A} = dX_K^{(1)} \mathbf{I}_K \times dX_L^{(2)} \mathbf{I}_L = \dots = e_{KLM} dX_K^{(1)} dX_L^{(2)} \mathbf{I}_M \quad (3.223)$$

ja

$$d\mathbf{a} = dx_k^{(1)} \mathbf{i}_k \times dx_l^{(2)} \mathbf{i}_l = \dots = e_{klm} dx_k^{(1)} dx_l^{(2)} \mathbf{i}_m \quad (3.224)$$

#### 3.14. Kiirus ja kiirendus

Viimastest

$$dA_M = e_{KLM} dX_K^{(1)} dX_L^{(2)} \quad \text{ja} \quad da_m = e_{klm} dx_k^{(1)} dx_l^{(2)} \quad (3.225)$$

Toome sisse *bivektorid* —

$$dA_{LM} = e_{KLM} dA_K \quad \text{ja} \quad da_{lm} = e_{klm} da_k \quad (3.226)$$

mille „pöördteisendus“ on

$$dA_K = \frac{1}{2} e_{KLM} dA_{LM} \quad \text{ja} \quad da_k = \frac{1}{2} e_{klm} da_{lm} \quad (3.227)$$

(3.225) ja (3.227) põhjal

$$dA_{LM} = 2dX_L^{(1)} dX_M^{(2)} \quad \text{ja} \quad da_{lm} = 2dx_l^{(1)} dx_m^{(2)} \quad (3.228)$$

Kuna  $dx_k^{(1)} = x_{k,K} dX_K^{(1)}$  ja  $dx_l^{(2)} = x_{l,L} dX_L^{(2)}$ , siis

$$da_{lm} = \dots = x_{l,L} x_{m,M} dA_{LM} \quad (3.229)$$

(3.227) põhjal

$$da_k = \frac{1}{2} e_{klm} da_{lm} \stackrel{(3.229)}{=} \dots \stackrel{(3.226)}{=} \frac{1}{2} e_{klm} e_{KLM} x_{l,L} x_{m,M} dA_K \quad (3.230)$$

Kuna saab näidata, et  $e_{klm}e_{KLM}x_l, Lx_m, M = 2jX_{K,k}$ , siis

$$da_k = jX_{K,k}dA_K. \quad (3.231)$$

$$\frac{D(da_k)}{Dt} \stackrel{(3.231)}{=} \dots$$

$$= \dots \quad (3.232)$$

$$= v_{m,m}da_k - v_{m,k}da_m$$

---

### 3.15. Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

3 - 112

## 3.15 Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

Integraalsete füüsikaliste suuruste muutumise kiiruse määramiseks on vaja leida tuletisi aja järgi vastavatest integraalidest. Algul toome sisse aga materiaalse joone, materiaalse pinna ja materiaalse mahu mõisted<sup>67</sup>.

*Materiaalne joon* on joon, mis koosneb materiaalsest punktidest:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(S), S - \text{parameeter.} \quad (3.233)$$

Materiaalse joone asukoht ruumis hetkel  $t$  on määratud läbi liikumisseaduse  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  kujul

$$\mathbf{x}(S, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}(S), t). \quad (3.234)$$

*Materiaalne pind* on pind, mis koosneb materiaalsest punktidest

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(R, Q), R, Q - \text{parameetrid} \quad (3.235)$$

ning tema asukoht ruumis hetkel  $t$  on

$$\mathbf{x}(R, Q, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}(R, Q), t). \quad (3.236)$$

*Materiaalne maht* on materiaalsest punktide 3D piirkond.

---

<sup>67</sup>Ik. material line, material surface, material volume



## Joonintegraal

Olgu  $\phi$  mingi skalaarne funktsioon (näit. massi tihedus või kiirus või elektrijuh-tivus vms.), mis on defineeritud üle materiaalse joone  $L$ . Vastava joonintegraali muutumise kiirus leitakse materiaalse tuletise abil:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_L \phi dx_k &= \int_L \frac{D}{Dt} (\phi dx_k) = \int_L \left[ \frac{D\phi}{Dt} dx_k + \phi \frac{D}{Dt} (dx_k) \right] = \\ &\stackrel{(3.212)}{=} \int_L [\dot{\phi} dx_k + \phi v_{k,l} dx_l]. \end{aligned} \quad (3.237)$$

Fikseeritud ruumijoone  $l$  puhul ( $\phi$  on defineeritud mingil ruumijoonel  $l$ ) ei vaatle me (fikseeritud) liikuvaid materiaalseid punkte ning joonintegraali muutumise kiirus

$$\frac{d}{dt} \int_l \phi dx_k = \frac{\partial}{\partial t} \int_l \phi dx_k = \int_l \frac{\partial \phi}{\partial t} dx_k, \quad (3.238)$$

sest  $dx_k$  ei sõltu ajast.

### 3.15. Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

## Pindintegraal

Olgu nüüd skalaarne funktsioon  $\phi$  defineeritud üle materiaalse pinnaga  $S$ . Vastava pindintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_S \phi da_k &= \int_S \frac{D}{Dt} (\phi da_k) = \int_S \left[ \frac{D\phi}{Dt} da_k + \phi \frac{D}{Dt} (da_k) \right] = \\ &\stackrel{(3.222)}{=} \int_S [\dot{\phi} da_k + \phi (v_{l,i} da_k - v_{l,k} da_l)]. \end{aligned} \quad (3.239)$$

Fikseeritud ruumipinna  $s$  puhul, ei vaatle me jällegi (fikseeritud) liikuvaid ma-teriaalseid punkte ning pindintegraali muutumise kiirus

$$\frac{d}{dt} \int_s \phi da_k = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \phi da_k = \int_s \frac{\partial \phi}{\partial t} da_k, \quad (3.240)$$

sest  $da_k$  ei sõltu ajast.

## Ruumintegraal

Kui skalaarne funktsioon  $\phi$  on defineeritud üle materiaalse mahu  $\mathcal{V}$ , siis ruumintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{D\phi}{Dt} dv + \phi \frac{D}{Dt}(dv) \right] \stackrel{(3.219)}{=} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_{,k} v_k \right) dv + \phi v_{k,k}(dv) \right] = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\phi v_k)_{,k} \right] dv. \end{aligned} \quad (3.241)$$

Kui kasutada Greeni-Gaussi teoreemi<sup>68</sup>, siis saame viimasest

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_s \phi v_k da_k. \quad (3.242)$$

Siin on materiaalne maht  $\mathcal{V}$  asendatud fikseeritud ruumimahuga  $v$ , mida ümbritseb pind  $s$  ja mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga  $\mathcal{V}$ . Seega, mingi füüsilise suuruse  $\phi$  materiaalses mahus  $\mathcal{V}$  muutumise kiirus võrdub selle suure  $\phi$  muutumise kiiruse ruumilises mahus  $v$  (mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga  $\mathcal{V}$ ) pluss suuruse  $\phi v_k$  voog läbi ruumilist mahtu  $v$  ümbritseva pinna  $s$ .

<sup>68</sup> $\int_{\mathcal{V}} u_k da_k = \int_s u_k da_k$ ,  $da_k = n_k da$  — tuntud ka kui Gaussi-Ostrogradski teoreem või divergentsi teoreem

### 3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

3 - 116

## 3.16 Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

### 3.16.1 Keeriselisus

Euleri *deformatsioonikiiruse tensor* on defineeritud juba punktis 3.14.5 kujul

$$d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{l,k} + v_{k,l}) \equiv v_{(k,l)}, \quad (3.243)$$

Defineerime nüüd lisaks (*Cauchy*) *keeriselisuse tensori*<sup>69</sup>

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} - v_{l,k}) \equiv v_{[k,l]}. \quad (3.244)$$

Viimases kahes avaldises tähistavad  $v_{(k,l)}$  ja  $v_{[k,l]}$  vastavalt kiiruse gradienti (mis on oma olemuselt tensor) sümmeetrilist ja kaldsümmeetrilist (ehk antisümmeetrilist) osa.

Viimase kahe valemi põhjal

$$v_{k,l} = d_{kl} + w_{kl} \equiv v_{(k,l)} + v_{[k,l]}. \quad (3.245)$$

<sup>69</sup>Ik. *vorticity tensor*. Kasutatakse ka terminit pöörlemistensor, ik. vastavalt *spin tensor*.

Samasugune tähistus leiab kasutamist ka edaspidi. Näiteks võime kirjutada tensori  $b_{kl}$  jaoks  $b_{kl} = b_{(kl)} + b_{[kl]}$ .

Kaldsimmeetrilisest tensorist  $w_{kl}$  saab omakorda konstrueerida *keerisvektori*

$$w_k = \epsilon_{klm} w_{ml} = \epsilon_{klm} w_{m,l} \quad \text{ehk} \quad \mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}, \quad (3.246)$$

kus

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv \text{rot } \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{v} \quad \text{ja} \quad \nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (3.247)$$

### 3.16.2 Deformatsioonikiiruse tensori füüsikaline sisu

*Deformatsioonikiiruse tensor*  $d_{kl}$  iseloomustab *materiaalsete joonelementide pikuse ja nende vahelise nurga muutumise (hetkelist) kiirust*. Selle tõestuseks leiame *ühikvektori*  $\mathbf{n}$  *sihhiise elemendi pikennemise kiiruse*<sup>70</sup>  $d_{(\mathbf{n})}$ . Valemi (3.215) põhjal  $D(ds^2)/Dt = 2d_{kl}dx_k dx_l$ .

Seega —

$$d_{(\mathbf{n})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{ds} \frac{D(ds)}{Dt} = d_{kl}n_k n_l, \quad \text{kus} \quad n_k \equiv \frac{dx_k}{ds}. \quad (3.248)$$

<sup>70</sup>Ik. *Stretching, relative rate of stretch, rate of extension*

### 3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

Kui ortogonaalse koordinaadistikku, näiteks DRK, puhul on  $\mathbf{n}$  on võetud piki  $x_1$ , siis

$$d_{(1)} = d_{11}. \quad (3.249)$$

Analoogiliselt saab näidata, et *algse täisnurga muutumise kiirus* avaldub kujul

$$-v_{(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)} = 2d_{kl}n_{k1}n_{l2} \quad (3.250)$$

ning et kui ortogonaalsete koordinaatide puhul on  $\mathbf{n}_1$  ja  $\mathbf{n}_2$  valitud piki koordinaate  $x_1$  ja  $x_2$ , siis

$$-v_{(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)} \equiv -v_{(12)} = 2d_{12}, \quad (3.251)$$

Eelneku võib kokku võtta **teoreemina**: *ortogonaalse koordinaadistikku puhul võrduvad deformatsioonikiiruse tensori normaalkomponendid koordinaatide sihiliste joonelementide pikennemise kiirusega ja segakomponendid ( $k \neq l$ ) poolega nihkekiirusest koordinaatidega  $x_k$  ja  $x_l$  määratud pinnal.*

### 3.16.3 Deformatsioonitensorite materiaalsed tuletised

Alajaotuses 3.14.5 defineerisime Euleri deformatsioonikiiruse tensori  $d_{kl}$  ja näitasime, et Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor avaldub kujul

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = \frac{1}{2}\dot{C}_{KL},$$

vt. valem (3.217). Viimase põhjal  $\dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}$ .

Kuna defnitsiooni põhjal  $C_{KL} = x_{k,K}x_{l,L}$ , siis

$$\begin{aligned} \dot{C}_{KL} &= \frac{Dx_{k,K}}{Dt}x_{l,L} + x_{k,K}\frac{Dx_{l,L}}{Dt} = \\ &\dots \\ &= \end{aligned} \tag{3.252}$$

ja

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl}x_{k,K}x_{l,L}. \tag{3.253}$$

#### 3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

Leiame nüüd seose deformatsioonikiiruse tensori  $d_{kl}$  ja Euleri deformatsiooni-tensori materiaalse tuletise  $e_{kl}$  vahel. Selleks leiame jällegi materiaalse tuletise deformatsiooni moodsust  $ds^2 - dS^2$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(ds^2) &= \frac{D}{Dt}(ds^2 - dS^2) \stackrel{(3.43)}{=} 2\frac{D}{Dt}(e_{kl}dx_kdx_l) \\ &\stackrel{(3.212)}{=} 2(e_{kl} + e_{ml}v_{m,k} + e_{kn}v_{n,l})dx_kdx_l. \end{aligned} \tag{3.254}$$

Kuna valem (3.215) põhjal  $D(ds^2)/Dt = 2d_{kl}dx_kdx_l$ , siis

$$d_{kl} = \dot{e}_{kl} + e_{ml}v_{m,k} + e_{kn}v_{n,l}. \tag{3.255}$$

Arvestades Euleri deformatsioonitensori defnitsiooni ( $2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl}$ ) saame

$$\dot{c}_{kl} = -2\dot{e}_{kl}. \tag{3.256}$$

Meenutame, et kuna  $2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL}$ , siis  $\dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}$ .

### 3.16.4 Kiirusvälja tsirkulatsioon

*Kiirusvälja (kiirusvektori) v tsirkulatsiooniks* mööda suletud taanduvat (laguvat) kõverat<sup>71</sup>  $c$ , nimetatakse joonintegraali

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_c v_k dx_k. \quad (3.257)$$

Siin  $d\mathbf{x} \equiv d\mathbf{p} = (dx_1, dx_2, dx_3)$  on kõvera  $c$  diferentsiaalne puutuja suvalises punktis, st.,  $d\mathbf{x} \equiv d\mathbf{p}$  näitab ka liikumise suunda mööda kõverat  $c$ . †

*Stokesi teoreemi* põhjal  $\oint_c \mathbf{b} \cdot d\mathbf{x} = \int_s (\text{curl } \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{a}$ . Arvestades seda, et valemi (3.246) põhjal on just keerisvektor  $\mathbf{w}$  rotor kiiruse vektorist  $\mathbf{v}$ , siis saame

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{a} = \text{ehk } \Gamma = \oint_c v_k dx_k = \int_s w_k da_k, \quad (3.258)$$

kus  $s$  on orienteeritud pind, mis on ümbritsetud orienteeritud kõveraga  $c$ . Kokkuvõttes, kiirusvektori tsirkulatsioon mööda kinnist (ja taanduvat) kõverat võrdub keerisvektori vooga läbi sellele kõverale toetuva “suvalise” pinnal.

<sup>71</sup>Ik. *reducible curve*

### 3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

#### 3.16.5 Keeriselisuse füüsikaline sisu

Käesolevas alajaotuses näitame, milles väljendub keeriselisuse tensori ja keerisvektori füüsikaline sisu.

#### Keeriselisuse tensori füüsikaline sisu

Vaatleme materiaalsel joonelementi, mille siht on antud hetkel määratud vektoriga  $d\mathbf{x}$  ja mis pöörleb ümber vektoriga  $\boldsymbol{\mu}$  määratud telje. Olgu  $\boldsymbol{\nu}$  mingi fikseeritud ühikvektor ja  $\varphi$  vektorite  $d\mathbf{x}$  ja  $\boldsymbol{\nu}$  vaheline nurk. Kui tähistada  $\mathbf{n} = d\mathbf{x}/ds$ , siis

$$\cos \varphi = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = n_k \mathbf{i}_k \nu_l \mathbf{i}_l = \delta_{kl} \nu_l \frac{dx_k}{ds}. \quad (3.259)$$

Võtame viimase avaldise vasakult ja paremast poolest materiaalse tuletise —

$$- (\sin \varphi) \dot{\varphi} = \delta_{kl} \nu_l \frac{D}{Dt} \left( \frac{dx_k}{ds} \right) = \quad (3.260)$$

$$= \nu_{l,m} \nu_m \nu_l - d_{(\mathbf{n})} \cos \varphi.$$

Kui  $\varphi = \pm\pi/2$ , siis saame, et

$$\dot{\varphi} = \mp v_{l,m} n_m v_l. \quad (3.261)$$

Olgu nüüd  $x_k$  ortogonaalne koordinaatsüsteem ja  $\boldsymbol{\nu} \parallel x_2$  ning  $\mathbf{n} \parallel x_1$ . Leia-me millise nurkkiirusega pöörleb  $x_1$  sihiline element  $x_2$  sihilise elemendi suhtes (ümber  $x_3$ -ga määratud telje), st.,

$$\dot{\varphi}_{(12)} = \dots \quad (3.262)$$

Esimene indeks näitab siin milline telg pöörleb ja teine mille suhtes ta pöörleb. Analoogiliselt

$$\dot{\varphi}_{(21)} = \dots \quad (3.263)$$

Seega

$$\dot{\varphi}_{(21)} + \dot{\varphi}_{(12)} = v_{1,2} - v_{2,1} = 2w_{12} = -2w_{21} \quad (3.264)$$

$$\dot{\varphi}_{(21)} - \dot{\varphi}_{(12)} = v_{1,2} + v_{2,1} = 2d_{12} = 2d_{21}$$

### 3.16. Keeriselsus ja deformatsiooni kiirus

3 - 124

Seega oleme näidanud, et *keeriselsuse tensori komponent  $w_{kl}$  võrdub poolega ortogonaalsete koordinaatide  $x_k$  ja  $x_l$  sihiliste joonelementide pöörlemise nurkkiiruste summast. Siinjuures toimub pöörlemine ümber telje, mis on risti mõlema vaadeldava joonelemendiga.* Samuti leidis veelkord kinnitust fakt, et deformatsioonikiiruse tensori segakomponendid võrduvad poolega nihkekiirusest koordinaatidega  $x_k$  ja  $x_l$  määratud pinnal.

#### Keerisvektori füüsikaline sisu

Vaatleme pinnal  $s$  punkti  $\mathbf{x}$ , kus pinnanormaaliks on  $\mathbf{n}$  ja keerisvektoriks  $\mathbf{w}$ .

Kui pinna  $s$  pindala on  $a$ , siis

$$\oint_c v_k dx_k = a w_n + O(a^2) \quad (3.265)$$

kus  $w_n$  on keerisvektori  $\mathbf{w}$  projektsioon pinnanormaalil  $\mathbf{n}$  (ehk keerisvektori normaalkomponent). Seega, kui kõver  $c$  läheneb punktile  $\mathbf{x}$ , siis

$$w_n = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \oint_c v_k dx_k, \quad (3.266)$$

st., kiiruse tsirkulatsioon mööda kontuuri  $c$ , jagatud pindalaga  $a$  võrdub keerisvektori normaalkomponendiga vaadeldavas punktis (kui  $a \rightarrow 0$ ).

### 3.16.6 Keerisevaba ja keeriseline liikumine

#### Keerisevaba liikumine

Liikumine on *keerisevaba* siis ja ainult siis kui keeriselisuse tensor  $w_{ki} = 0$  (ja järelikult ka keerisvektor  $\mathbf{w} = 0$ ) vaadeldava piirkonna igas punktis. Vedeliku puhul nimetatakse sellist liikumist *laminaarseks*<sup>72</sup> voolamiseks, st., vedeliku voolamine toimub paralleelsete kihtidena. Sellisel juhul on kiiruste väli avaldatav läbi potentsiaali  $\phi$  —

$$v_k = -\phi_{,k} \quad (3.267)$$

ja liikumist võib nimetada ka *potentsiaalseks*. Potentsiaalse liikumise puhul joo-  
nintegraal

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} v_k dx_k &= - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\phi = \phi(\mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_2) \\ \Gamma = \oint v_k dx_k &= - \oint d\phi = 0. \end{aligned} \quad (3.268)$$

---

<sup>72</sup>I.k. lamellar or laminar

Viimasele vastab **Kelvini teoreem**: *Liikumine on potentsiaalne siis ja ainult siis kui kiirusvektori tsirkulatsioon mööda igat taanduvat kõverat on null*. Pöördteoreemi tõestus järgeldub Stokesi teoreemist —  $\Gamma = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{a} = 0$  põhjal on  $\mathbf{w} = 0$  kõikjal vaadeldavas piirkonnas ja seega on liikumine keerisevaba.

#### Keeriseline liikumine

Vaatleme juhtu, kus keerisvektor  $\mathbf{w}$  on nullist erinev igas vaadeldava piirkonna punktis. Jooni, mille puutujateks on keerisvektorid nimetatakse *keerisjoonteks*. Keerisjooned on võrrandi

$$\frac{dx_1}{w^1} = \frac{dx_2}{w^2} = \frac{dx_3}{w^3} \quad (3.269)$$

integraalkõverad. *Keerispinnad* on keerisjoontest moodustatud pinnad ja *keeristorud* on “suletud keerispinnad”, st., nad on defineeritud analoogiliselt voolupindade ja voolutorudega.

✓

**Helmholtzi esimene teoreem:** *igas keeristoru lõikes on summaarne keeriselisus sama, mis suvalises teises keeristoru lõikes.*

Tõestus põhineb Greeni-Gaussi teoreemil —  $\int_v \operatorname{div} \mathbf{w} dv = \int_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da$ . Kuna  $\mathbf{w} = \operatorname{curl} \mathbf{v}$  ja  $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) = 0$ , siis

★

$$\int_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (3.270)$$

Keerisvektor  $\mathbf{w}$  on keeristoru külgepinna puutuja. Järelikult seal  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Tähistame  $s_1$  ja  $s_2$  keeristoru kaht suvalist lõiget välisnormaalidega  $\mathbf{n}_1$  ja  $\mathbf{n}_2$ . Seega nimetatud otspindadel

$$\int_{s_1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_1 da = - \int_{s_2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.271)$$

Seega on keeriselisus lõigetes  $s_1$  ja  $s_2$  arvuliselt võrdne —  $\int_{s_1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_1 da = \operatorname{const}$ . See konstant on igal torul erinev ja iseloomustab vaadeldavat toru.

**Järeldus:** Keerisjooned (keeristorud) ei saa alata ega lõppeda suvalises vedeliku punktis — nad on kas kinnised või algavad ja lõpevad keskkonna rajal (k.a.  $\pm\infty$ ).

### 3.16. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

#### § 3.14.3 animatsiooni näite juurde.

Vedeliku kiiruste väli on antud kujul

$$v_1 = \dot{x}_1 = v, \quad v_2 = \dot{x}_2 = vx_1 t. \quad (3.272)$$

Animeerida emissiooni joone ja ajajoonte teke materiaalsetele punktidele, mis lähtuvad ruumpunktist  $(0,0)$  ning kiiruste välja ja voolujoonte muutumine ajavahemikus  $0 \leq t \leq 1$  võttes  $v = 3$ .

**Lahendus:** Voolujooned leitakse võrrandist

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = k \Rightarrow v_2 dx_1 = v_1 dx_2 \Rightarrow \dots \dots \dots x_2 = x_{02} + 0, 5t [(x_1)^2 - (x_{01})^2]. \quad (3.273)$$

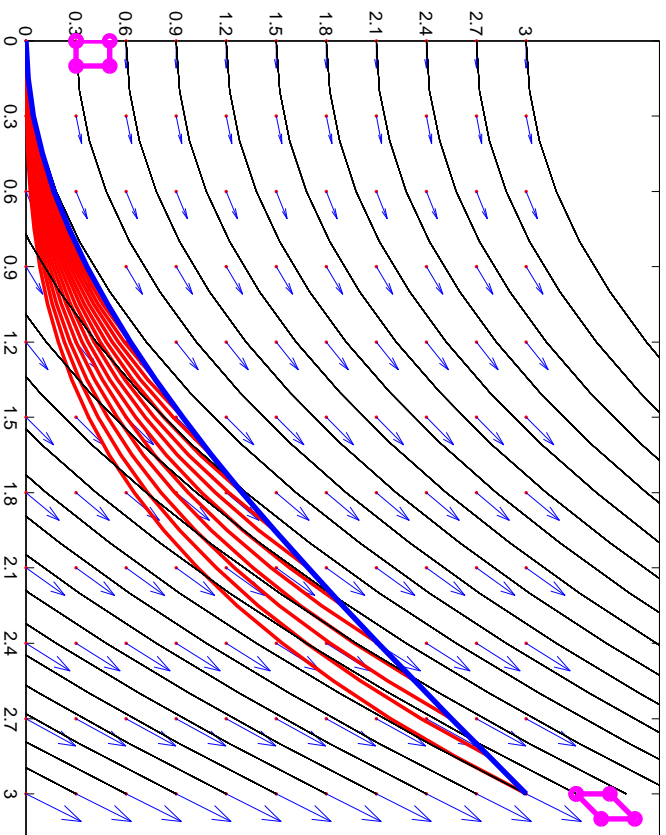
Valemeist (3.272) saame avaldised ajajoontele

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + v(t - t_0), \\ x_2 = x_{02} + 0, 5vx_1(t^2 - t_0^2) = \end{cases} \quad (3.274)$$

$$x_2 = \dots$$



Punktist  $(0,0)$  väljuvate ajajoonte lõpp-punktid moodustavad punktist  $(0,0)$  väljuva emissioonijoonne.



Joonis 3.20: Voolujooned, kiiruste väli, emissioonijooned ja ajajooned

Vt. lisaks näiteid failist „Emissioonijooned.doc”