

## Peatükk 6

# Kovariansus ja kontravariansus ehk mis saab siis, kui koordinaatideks pole Descartes'i ristkoordinaadid

### 6.1. Sissejuhatus

### 6 - 2

## 6.1 Sissejuhatus

Seni oleme kasutanud DRK, kuid ilddjuhul ei pruugi koordinaadid olla sirgjoonelised ja/või ortogonaalsed. Lihtsamateks kõverjooneliste koordinaatide näideteks on silindrilised ja sfäärilised koordinaadid. Sellistel juhtudel tulevad sisse ko- ja kontravariansuse mõisted ning olijseks muutub see, kas indeksid on kirjutatud alla või ülles. Kolmandas peatükis tööme sisse EK ja LK kõverjoonelistena, kuid edaspidi oleme kasutanud vaid DRKē.

Käesolevas peatükis esitame eelnevates peatükkides tuletatud põhitulemused kõverjoonelistes koordinaatides ja defineerime juurde mõned uued mõisted. Pikkemalt on käesolevas peatükis esitatust võimalik lugeda minu loengukonspettist, mis oli pideva keskkonna mehaanika õpetamisel kasutusel kuni 2008/09 õppeaastani, vt. <http://cens.ioc.ee/~salupere>.

**Märkus:** Käesolevas peatükis tähistavad  $j$  ja  $J$  vastavalt (ilddistele) kõverjoonelistele koordinaatidele  $x^k$  ning  $X^K$  ja DRKle  $z^k$  ning  $Z^K$  vastavaid jakobiaane:

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \right| \quad \text{ja} \quad J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right|.$$

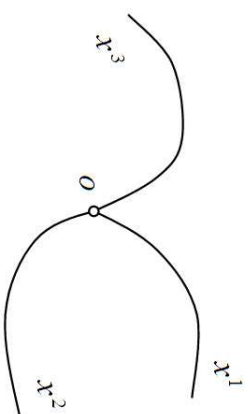
## 6.2 Koordinaadid

### 6.2.1 Euleri koordinaadid

Toome sisse ajas muutumatu kõverjoonelise koordinaatsüsteemi  $\mathbf{x}$ , mille suhtes vaadeldakse keskkonna materiaalsete punktide liikumist.

Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Euleri koordinaatsüsteemiks*

Joonis 6.1: Euleri koordinaadid



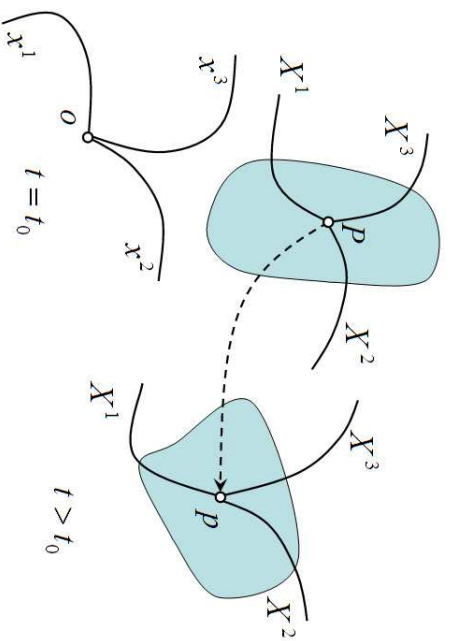
*ehk ruumiliseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate  $\mathbf{x}$  — *Euleri koordinaatideks (EK) ehk ruumilisteks koordinaatideks*. Ühe punktmassi liikumist Euleri koordinaatsüsteemis kirjeldavad kolm võrrandit

$$x^i = f^i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$

### 6.2. Koordinaadid

### 6.2.2 Lagrange'i koordinaadid

Fikseerime ajahetkel  $t = t_0$  keskkonna materiaalsete punktide asendi ja seome nendega kõverjoonelise koordinaatsüsteemi  $\mathbf{X}$ . Kui nüüd ajahetkel  $t > t_0$  keskkond liigub ja muudab kuju, siis liigub ja muudab kuju ka koordinaatsüsteem  $\mathbf{X}$ . Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Lagrange'i koordinaatsüsteemiks ehk materiaalsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate  $\mathbf{X}$  — *Lagrange'i koordinaatideks (LK) ehk materiaalseteks koordinaatideks*.



Joonis 6.2: Lagrange'i koordinaadid

### 6.2.3 Kõverjooneliste koordinaatide avaldamine Descartes'i ristkoordinaatide kaudu

Eukleidiises ruumis  $E^3$  saab alati sisse tuua Descartes'i ristkoordinaadid (DRK). Toome nüüd Euleri kõverjoonelised koordinaadid sisse läbi Euleri Descartes'i ristkoordinaatide (EDRK)  $\mathbf{z} \equiv (z^1, z^2, z^3)$ . Selleks eeldame, et EDRK  $\mathbf{z}$  sõltuvad kolmest Eukleidiilise ruumi  $E^3$  muutujast  $\mathbf{x}$ , st.,

$$z^k = f^k(\mathbf{x}) = z^k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3, \quad (6.2)$$

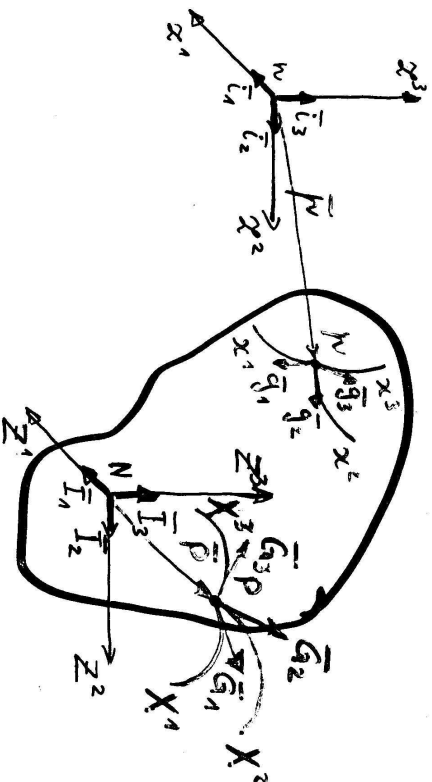
kus funktsioonid  $f^k$  kuuluvad klassi  $C^r$ ,  $r \geq 1$  (st., nad on pidevad funktsioonid, mis omavad pidevaid osatuletisi kuni järguni  $r$ ) ja on defineeritud mingis ruumi  $E^3$  piirkonnas. Nüüd tuleb määratleda tingimused, mille puhul õnnestub võrranditest (6.2) avaldada

$$x^k = x^k(\mathbf{z}), \quad k = 1, 2, 3 \quad (6.3)$$

nii, et (6.2) ja (6.3) oleksid teineteise tihesed pöördteisendused.

#### 6.2. Koordinaadid

#### 6 - 6



Joonis 6.3: Kõverjoonelised koordinaadid ja DRK

Matemaatilisest analüüsist tuntud teoreemi (teoreem ilmutamata funktsiooni-st)<sup>1</sup> põhjal omab teisendus (6.2) punkti  $p$  ümbruses  $\delta$  tihesest pöördteisendust (6.3) siis ja ainult siis kui jakobiaan

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| \neq 0; \quad |x^k - x_0^k| < \delta. \quad (6.4)$$

<sup>1</sup>Tõestust vaata näiteks M.N.L. Narasimhani'i õpikust *Principles of Continuum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New-York et al., 1993. lk. 28–30

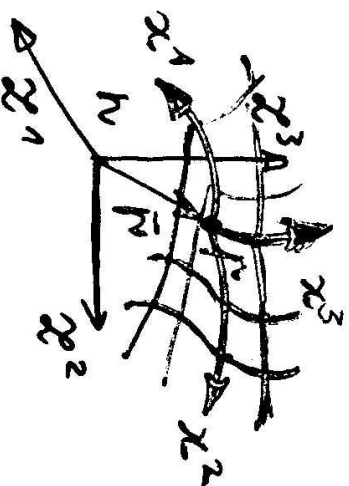
Siin  $x_0^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , on ruumipunkti  $p$  koordinaadid ja

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| = \begin{vmatrix} \partial z^1 / \partial x^1 & \partial z^1 / \partial x^2 & \partial z^1 / \partial x^3 \\ \partial z^2 / \partial x^1 & \partial z^2 / \partial x^2 & \partial z^2 / \partial x^3 \\ \partial z^3 / \partial x^1 & \partial z^3 / \partial x^2 & \partial z^3 / \partial x^3 \end{vmatrix}. \quad (6.5)$$

Kui fikseerime avaldise (6.2) vasakul poolel  $(z^1, z^2, z^3) = (z_*^1, z_*^2, z_*^3)$ , siis saame kolme lõikuva pinnavaõrrandid.

Teatavasti esitavad kaks lõikuvat pinda kõvera (kõverjoone) ja kolm lõikuvat pinda punkti. Kui  $\mathbf{p} = (z_*^1, z_*^2, z_*^3)$  on punkti  $p$  kohavektor, siis paarikaupa lõikuvad pinnad esitavad kolm ruumipunkti  $p$  läbivat kõverat.

Neid ruumipunkti  $p$  läbivat kolme



Joonis 6.4: Koordinaatkõverad ja koordinaatpinnad

pinda nimetatakse *koordinaatpindadeks* ja kolme kõverat *koordinaatkõverateks*.

## 6.2. Koordinaadid

Ajahetkel  $t = t_0$  toome analoogiliselt sisse Lagrange'i kõverjoonelised koordinaadid — eeldame, et LDRK  $\mathbf{Z}$  on avaldatavad LK  $\mathbf{X}$  kaudu kujul

$$Z^K = Z^K(\mathbf{X}), \quad K = 1, 2, 3. \quad (6.6)$$

Vastav pöördteisendus

$$X^K = X^K(\mathbf{Z}), \quad K = 1, 2, 3. \quad (6.7)$$

eksisteerib ja on tihene materiaalse punkti  $P$  ümbruses  $\delta$  parajasti siis kui ja-kobiaan

$$J_L = \left| \frac{\partial Z^K}{\partial X^L} \right| \neq 0; \quad |X^K - X_0^K| < \delta. \quad (6.8)$$

Avaldisi (6.2), (6.3), (6.6) ja (6.7) nimetatakse *koordinaatteisendusteks*, kusjuures (6.2) ja (6.3) kehtivad suvalisel ajahetkel, kuid (6.6) ja (6.7) vaid  $t = t_0$  puhul (viimaseid kasutatakse vaid selleks, et LK sisse tuua).

Edaspidises eeldame, et

- kõverjoonelised koordinaatsüsteemid on sisse toodud Descartes'i ristkoordinaatide kaudu (EK kujul (6.2) ja LK kujul (6.6)) selliselt, et jakobiaanid (6.4) ja (6.8) pole samaselt nullid ruumis  $E^3$  või vähemalt mingis meid huvitavas ruumi  $E^3$  piirkonnas (v.a. mõned singulaarsed punktid, jooned või pinnad);

- tildjuhul on pikkuse mõõtmiseks piki telgi  $z^k$  ja  $Z^K$  valitud tihtne mastaap.

**Märkused:**

- Selliselt sisse toodud kõverjoonelised koordinaadid on tildjuhul lokaalsed ja pole tildjuhul ortogonaalsed.
- $J \neq 0 \Rightarrow J > 0$  või  $J < 0$  igas ruumipunktis.  $\checkmark$

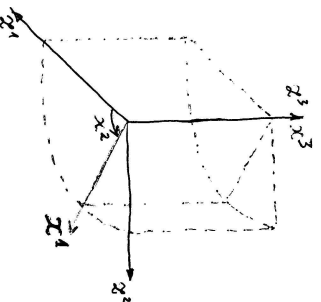
**Näide 6.2.1.** *Euleri koordinaatideks  $x^k$  on silindrilised koordinaadid. Kas EK on üheselt määratud EDRK kaudu? Millised on koordinaatpinnad ja koordinaatkõverad?*

Defineerime  $x^k$  läbi  $z^k$ :

$$\begin{cases} z^1 = x^1 \cos x^2 \\ z^2 = x^1 \sin x^2 \\ z^3 = x^3 \end{cases} \quad (6.9)$$

Pöördeisendus

$$\begin{cases} x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2} \\ x^2 = \arctan(z^2/z^1) \\ x^3 = z^3 \end{cases} \quad (6.10)$$



Joomis 6.5: Silindrilised koordinaadid

*Jakobiaan*

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| = \dots$$

*Järelikult, ühene pöördeisendus eksisteerib ...*

## 6.3 Liikumise kirjeldamine

*Liikumisseaduseks* nimetatakse üheparameetrilist koordinaatide teisendust

$$x^k = x^k(\mathbf{X}, t) \quad (6.11)$$

või

$$X^K = X^K(\mathbf{x}, t), \quad (6.12)$$

mis siirdab materiaalse punkti  $\mathbf{X}$  ruumipunkti  $\mathbf{x}$ . Parameetriks on siin aeg  $t$ . Alghetkel  $t = t_0$  kujutavad teisendused (6.11) ja (6.12) (parameetrist sõltumatuid) koordinaatiseisendusi. Tihti on kasulik kui  $t = t_0$  puhul teljestikud  $x^k$  ja  $X^K$  ühtiksid, st., hetkel  $t = t_0$   $x^k = X^K$  kui  $k = K$ . Sel juhul on materiaalse punkti asukoht alghetkel  $t = t_0$  automaatselt teada ning asukoha muutus algasendi suhtes on hetkel  $t > t_0$  lihtsalt leitav.

Analoogiliselt eelmise punktiga 6.2.3 tekib ka siin küsimus liikumisseaduse ühesusest, st., teisendused (6.11) ja (6.12) peavad olema teineteise ühesed pöördteisendused. Eeldades, et nii funktsioon (6.11) kui (6.12) kuuluvad klassi  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , on see tingimus täidetud ruumipunkti  $p$  ümbruses  $\delta$  parajasti siis kui jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \right| \neq 0 \quad |x^k - x_0^k| < \delta. \quad (6.13)$$

\*

### 6.4. Skalaar, vektor ja tensor

6 - 12

Jakobiaan (6.13) väljendab tegelikult pidevuse aksiooni, mille põhjal positiivne † lõplik aine maht ei saa deformeeruda nullmahuks ega lõpmata suureks mahuks<sup>2</sup> ning ükski ainehulk ei tungi teise ainehulga sisse<sup>3</sup> (joon deformeerub jooneks, pind pinnaks ja maht mahuks).

## 6.4 Skalaar, vektor ja tensor

### 6.4.1 Skalaar

Vaatleme koordinaatsüsteeme  $\zeta^i$  ja  $\eta^i$ . Funktsiooni  $\varphi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) \equiv \varphi(\zeta)$  nimetatakse (absoluutseks) *skalaariks* kui ta ei muuda koordinaatiseisendusega  $\zeta^k = \zeta^k(\eta^1, \eta^2, \eta^3) \equiv \zeta^k(\boldsymbol{\eta})$ ,  $k = 1, 2, 3$  oma algväärtust, st.,

$$\varphi(\zeta^1(\boldsymbol{\eta}), \zeta^2(\boldsymbol{\eta}), \zeta^3(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi(\boldsymbol{\eta}) = \varphi(\zeta). \quad (6.14)$$

Seega ei sõltu skalaari väärtus antud punktis koordinaatide valikust.

**Näide 6.4.1.** *Temperatuur on absoluutne skalaar.*

<sup>2</sup>ik. *indestructibility of matter*

<sup>3</sup>ik. *impenetrability of matter*



### 6.4.2 Kontravariantne vektor

Suurusi  $\varphi^k(\boldsymbol{\zeta})$  nimetatakse *vektori kontravariantseteks komponentideks ehk lihtsalt kontravariantseteks vektoriks* kui koordinaatseisenduse  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$  puhul muutub ta vastavalt seadusele

$$\varphi^k(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi^k(\boldsymbol{\eta}) = \varphi^m(\boldsymbol{\zeta}) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.15)$$

Suurusi  $\psi^k(\boldsymbol{\eta})$  tuleb siin mõista kui suuruste  $\varphi^k(\boldsymbol{\zeta})$  komponente koordinaatsüsteemis  $\eta^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Samuti on siin kasutatud *summeerimiskokkulepet*, mida kõverjoonelistel koordinaatide korral jääme kasutama kujul  $\sum_{i=1}^3 a^i b_i \equiv a^i b_i$ , st. üks summeerimisindeksitest peab olema all ja teine üleval.

**Näide 6.4.2.** *Diferentsiaal on kontravariantne vektor, sest võttes*

$\varphi^k = d\zeta^k$ , *saame*

$$\psi^k = d\eta^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} d\zeta^m \equiv \varphi^m \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}.$$

### 6.4. Skalaar, vektor ja tensor

### 6.4.3 Kovariantne vektor

Suurusi  $\varphi_k(\boldsymbol{\zeta})$  nimetatakse *vektori kovariantseteks komponentideks ehk lühidalt kovariantseks vektoriteks* kui nad koordinaatide teisenduse  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$  puhul teisenevad vastavlt seadusele

$$\varphi_k(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi_k(\boldsymbol{\eta}) = \varphi_m(\boldsymbol{\zeta}) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.16)$$

**Näide 6.4.3.** *Osataletis absoluutsest skalarist on kovariantne vektor, sest tähistades*

$$\varphi_m = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m}$$

*kus  $\Phi$  on absoluutne skalaar, saame*

$$\varphi_k(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi_k(\boldsymbol{\eta}) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} = \varphi_m(\boldsymbol{\zeta}) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

### 6.4.4 Kontravariantne, kovariantne ja segatensor

Suurusi  $\Phi^{kl}(\zeta)$ ,  $\Phi_{kl}(\zeta)$  ja  $\Phi^k_l(\zeta)$  nimetatakse vastavalt *kontravariantseteks*-, *kovariantseteks*- ja *segatensoreteks* kui nad koordinaatteisenduse  $\zeta = \zeta(\eta)$  puhul teisenevad seaduste

$$\Phi^{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^{kl}(\eta) = \Phi^{mn}(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \eta^l}{\partial \zeta^n}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (6.17)$$

$$\Phi_{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi_{kl}(\eta) = \Phi_{mn}(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (6.18)$$

ja

$$\Phi^k_l(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^k_l(\eta) = \Phi^m_n(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (6.19)$$

järgi.

‡

---

### 6.5. Baasivektor, meetriline tensor

## 6.5 Baasivektor, meetriline tensor

### 6.5.1 Kovariantsed baasivektorid

Vaatleme kahte DRK — üks neist on EDRK  $z^k$  ja teine LDRK  $Z^K$ . Vastavad ühikbaasid tähistame  $\mathbf{i}_k$  ja  $\mathbf{I}_K$ . Kui eeldame, et pikkuse mastaap piki telgi  $z^k$  ja  $Z^K$  on sama, siis omavad vektorid  $\mathbf{i}_k$  ja  $\mathbf{I}_K$  võrdset ühikpikkust. Kõverjoonelised EK tuuakse teatavasti sisse kujul (6.2), st.,

$$z^k = z^k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3.$$

ja kõverjoonelised LK kujul (6.6), st.,

$$Z^K = Z^K(\mathbf{X}), \quad K = 1, 2, 3,$$

Kohavektorid  $\mathbf{P}$  ja  $\mathbf{p}$  avalduvad läbi LDRK ja EDRK kujul

$$\mathbf{P} = Z^K(\mathbf{X})\mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{p} = z^k(\mathbf{x})\mathbf{i}_k. \quad (6.20)$$

Viimastest leiame kohavektorite  $\mathbf{P}$  ja  $\mathbf{p}$  diferentsiaalid (ehk kohavektorite lõpmata väikesed muudud)



$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} dX^K = \mathbf{G}_K dX^K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} dx^k = \mathbf{g}_k dx^k, \quad (6.21)$$

kus vektoreid

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}^M \quad (6.22)$$

ja

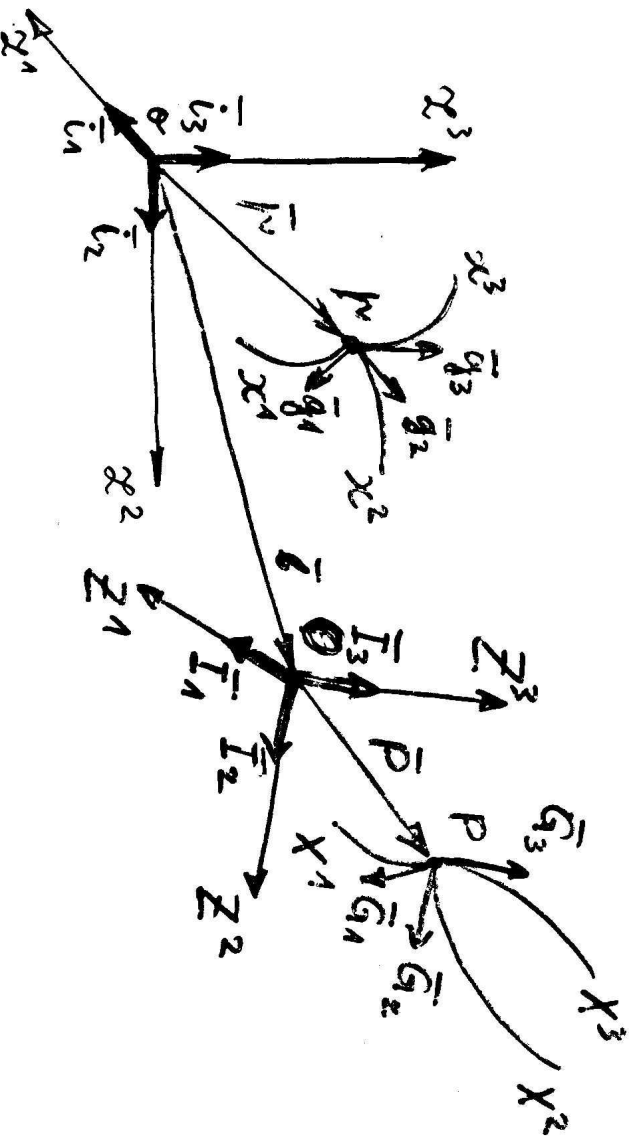
$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{i}^m \quad (6.23)$$

nimetatakse vastavalt kõverjooneliste koordinaatide  $X^K$  ja  $x^k$  *kovariantseteks baasivektoriteks* ehk lihtsalt *baasivektoriteks*. Nad on suunatud piki koordinaatkõverate puutujaid (vaadeldavas punktis) ja liikumisel ühest punktist teise muutuvad nad illdjuhul nii suuruselt kui suunalt. Seega moodustavad nad vektorvälja. Loomulikult saab suurusi  $d\mathbf{P}$  ja  $d\mathbf{p}$  avaldada DRK kaudu kujul

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z^K} dZ^K = \mathbf{I}_K dZ^K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^k} dz^k = \mathbf{i}_k dz^k \quad (6.24)$$

ning DRK baasivektoreid  $\mathbf{I}_K$  ja  $\mathbf{i}_k$  omakorda baasivektorite  $\mathbf{G}_K$  ja  $\mathbf{g}_k$  kaudu ✓ kujul

$$\mathbf{I}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z^K} = \frac{\partial X^L}{\partial Z^K} \mathbf{G}_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^k} = \frac{\partial x^l}{\partial z^k} \mathbf{g}_l. \quad (6.25)$$



Joonis 6.6: Kovariantsed baasivektorid

### 6.5.2 Kovariantne meetriline tensor

*Elementaarpiikkuse ruut*  $dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P}$  avaldub lähtudes valemitest (6.24) ja (6.21) kujul

$$dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = dZ^K \mathbf{I}_K \cdot dZ^L \mathbf{I}_L = dX^K \mathbf{G}_K \cdot dX^L \mathbf{G}_L.$$

Järgnevalt defineerime *kovariantse meetrilise tensori*

$$G_{KL} = G_{LK} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L \stackrel{(6.22)}{=} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M \cdot \frac{\partial Z^N}{\partial X^L} \mathbf{I}_N = \delta_{MN} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \frac{\partial Z^N}{\partial X^L} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \frac{\partial Z^N}{\partial X^L}, \quad (6.26)$$

kus *Kroneckeri delta* on defineeritud traditsioonilisel moel:

$$\delta_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{I}_L = \begin{cases} 1, & K = L, \\ 0, & K \neq L. \end{cases} \quad (6.27)$$

Arvestades viimaseid avaldisi saame elementaarpiikkuse ruudu avaldada kujul

$$dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL} dX^K dX^L = \delta_{KL} dZ^K dZ^L = dZ^K dZ^K. \quad (6.28)$$

#### 6.5. Baasivektor, meetriline tensor

Analoogiliselt — elementaarpiikkuse ruut

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl} dx^k dx^l = \delta_{kl} dz^k dz^l = dz^k dz^k, \\ \delta_{kl} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \end{aligned} \quad (6.29)$$

ja *kovariantne meetriline tensor*

✓

$$g_{kl} = g_{lk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \stackrel{(6.23)}{=} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m \cdot \frac{\partial z^n}{\partial x^l} \mathbf{i}_n = \delta_{mn} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^n}{\partial x^l} = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^n}{\partial x^l}. \quad (6.30)$$

**Märkus.** Suurused  $ds^2$  ja  $dS^2$  on skalarid ja nende väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi valikust, st.,  $ds^2(\mathbf{x}) = ds^2(\mathbf{z})$  ja  $dS^2(\mathbf{X}) = dS^2(\mathbf{Z})$ .

### 6.5.3 Kontravariantset baasivektorid ja meetrilised tensorid

Kovariantsete baaside  $\mathbf{G}_K$  ja  $\mathbf{g}_k$  duaalsed<sup>4</sup> baasid on defineeritud läbi ortonormaalsustingimuse

$$\mathbf{G}^K \cdot \mathbf{G}_L = \delta^K_L \text{ ja } \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_l = \delta^k_l \quad (6.31)$$

Vektoreid  $\mathbf{G}^K$  ja  $\mathbf{g}^k$  nimetatakse *kontravariantseteks baasivektoriteks* ja nad avalduvad võrrandisüsteemide (6.31) lahendina kujul

$$\mathbf{G}^K = G^{KL} \mathbf{G}_L \text{ ja } \mathbf{g}^k = g^{kl} \mathbf{g}_l. \quad (6.32)$$

Viimastes avaldistes esinevad *kontravariantset meetrilised tensorid* avalduvad läbi kovariantsete meetriliste tensorite kujul

$$G^{KL} = \frac{\text{cofactor } G_{KL}}{G} \equiv \frac{(-1)^{K+L} \Delta_{LK}^G}{G} \quad (6.33)$$

ja

$$g^{kl} = \frac{\text{cofactor } g_{kl}}{g} \equiv \frac{(-1)^{k+l} \Delta_{lk}^g}{g}, \quad (6.34)$$

<sup>4</sup>Lad. k. *dualis* — kahene

kus

$$G = |G_{KL}| \text{ ja } g = |g_{kl}| \quad (6.35)$$

on determinandid ning  $\Delta_{KL}^G$  ja  $\Delta_{kl}^g$  on determinantide  $|G_{KL}|$  ja  $|g_{kl}|$  elementide indeksipaariga  $KL$  või  $kl$  vastav miinor. Meetrilised tensorid rahuldavad  $\surd$ tingimusi

$$G_{KL} G^{LM} = \delta_K^M \text{ ja } g_{kl} g^{lm} = \delta_k^m. \quad (6.36)$$

Kuuna meetrilised tensorid  $G_{KL}$  ja  $G^{KL}$  on muutujate  $X^I$  ning meetrilised tensorid  $g_{kl}$  ja  $g^{kl}$  muutujate  $x^i$  funktsioonid, siis kujutavad  $G_{KL}$  ja  $G^{KL}$  endast tensorvälju Lagrange'i koordinaatides  $X^I$  ning  $g_{kl}$  ja  $g^{kl}$  tensorvälju Euleri koordinaatides  $x^i$ .

Vt. ka faili kojokoord.pdf

**Märkused:**

1. Üldjuhul pole baasivektorid  $\mathbf{G}^K$ ,  $\mathbf{G}_K$ ,  $\mathbf{g}^k$  ja  $\mathbf{g}_k$  ühikvektorid. Nende pikkused avalduvad läbi meetrilise tensori diagonaali elementide —

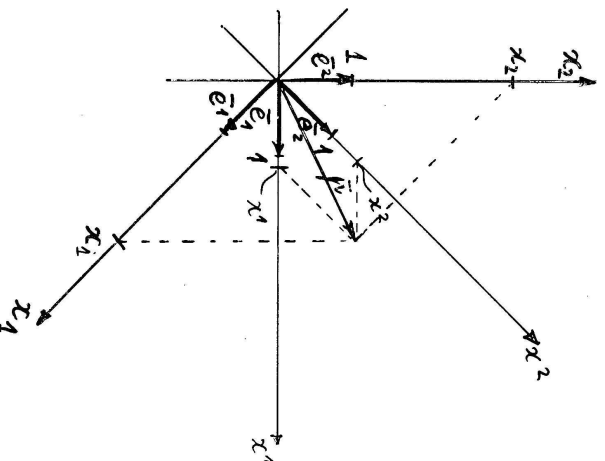
$$\begin{aligned} |\mathbf{G}^K| &= \sqrt{G^K K}, & |\mathbf{G}_K| &= \sqrt{G^K K}, & K &= \underline{K} \\ |\mathbf{g}^k| &= \sqrt{g^k k}, & |\mathbf{g}_k| &= \sqrt{g_k k}, & k &= \underline{k}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

*Allkriips tähendab sin seda, et korduvaa indeks järgi ei summeerita.* Eelnenud näite 6.5.3 puhul  $|\mathbf{g}_1| = |\mathbf{g}_3| = 1$  ja  $|\mathbf{g}_2| = x^1$ .

2. Kui kõverjoonelised koordinaadid on ortogonaalsed, siis  $g^{kl} = g_{kl} = 0$  kui  $k \neq l$ . Näite 6.5.3 puhul see nii oligi. Lisaks olid vektorid  $\mathbf{g}^k$  ja  $\mathbf{g}_k$  kollineaarsed.

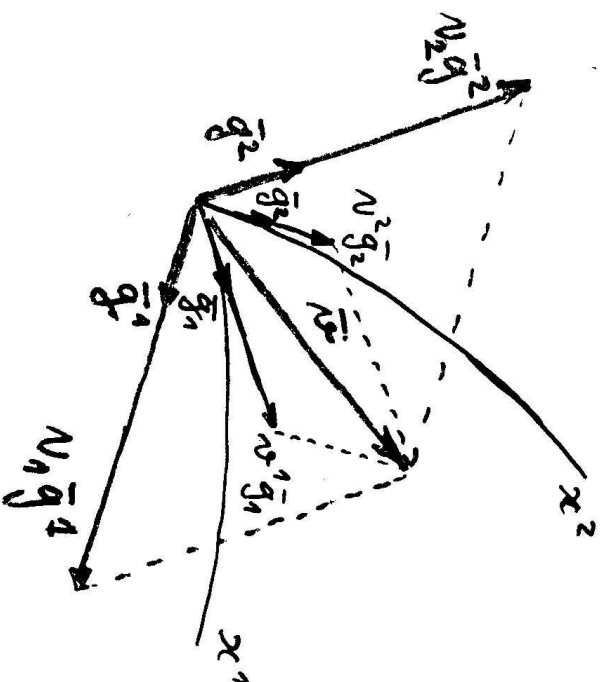
**6.5. Baasivektor, meetriline tensor****6 - 24**

**Näide 6.5.1.** Vektorite avaldamine kovariantsete ja kontravariantsete baasivektorite kaudu.



Joonis 6.7:

**Näide 6.5.2.** Vektorite avaldamine kovariantsete ja kontravariantsete baasivektorite kaudu.



Joonis 6.8:

### Lahendatakse loengus

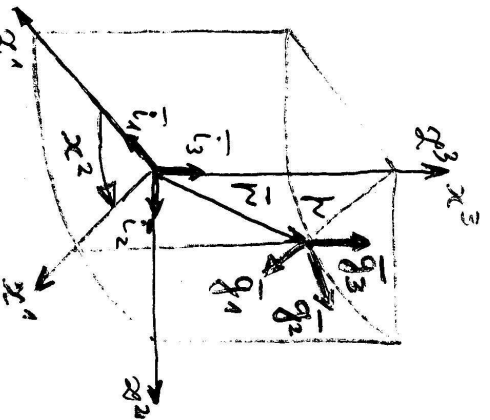
#### 6.5. Baasivektor, meetriline tensor

**Näide 6.5.3.** Pöördume tagasi Näite 6.2.1 (lk. 9) juurde. Euleri koordinaatideks  $x^k$  on silindrilised koordinaadid, mis on defineeritud läbi DRK järgmiselt:

$$\begin{cases} z^1 = x^1 \cos x^2 \\ z^2 = x^1 \sin x^2 \\ z^3 = x^3 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2} \\ x^2 = \arctan \frac{z^2}{z^1} \\ x^3 = z^3 \end{cases}$$



Vaatleme suvalist punkti  $p$  koordinaatidega ( $\mathbf{x}$ ) ehk kohavektoriga  $\mathbf{p}$ . Leida sellele punktile vastavad kovariantsed ja kontravariantsed baasivektorid ning meetrilised tensorid!

Lahendatakse loengus.

Joonis 6.9: Silindrilised koordinaadid

### 6.5.4 Indeksite tõstmine ja langetamine

Suvaline vektor  $\mathbf{v}$  on avaldatav nii kovariantse kui kontravariantse baasi kaudu:

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{g}^k = v^k \mathbf{g}_k, \quad (6.38)$$

kus  $v_k$  ja  $v^k$  on vastavalt vektori  $\mathbf{v}$  kovariantsed ja kontravariantsed komponendid, mis ühtivad vaid ortonormeeritud baasi puhul.

Korrutame nüüd avaldist (6.38) kontravariantse baasivektoriga  $\mathbf{g}^l$

$$v_k \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^l = v^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^l.$$

Kuna  $v^k \delta_k^l = v^l$ , siis  $v_k g^{kl} = v^l$ , ehk nimetades indeksid ümber,

$$v^k = g^{kl} v_l. \quad (6.39)$$

Kui korrutada aga avaldist (6.38) kovariantse baasivektoriga  $\mathbf{g}_l$ , siis saame analoogiliselt, et

$$v_k = g_{kl} v^l. \quad (6.40)$$

Sellist protseduuri nimetatakse *vektori indeksite tõstmiseks ja langetamiseks*. Seega, meetriliste tensorite abil saab indeksid tõsta ja langetada ehk teisistõnu — minna kovariantsetelt komponentidelt üle kontravariantsetele ja vastupidi.

---

### 6.5. Baasivektor, meetriline tensor

Lagrange'i koordinaatide puhul analoogiliselt

$$V^K = G^{KL} V_L \quad \text{ja} \quad V_K = G_{KL} V^L \quad (6.41)$$

Peale vektorite indeksite saab meetriliste tensorite abil tõsta ja langetada ka tensorite indeksid, näiteks

$$\begin{aligned} C^K{}_L &= G^{KM} C_{ML} \\ C^L{}_K &= G^{KM} C_{LM} \\ C^K{}_L &= G_{LM} C^{KM} \\ C^{KL} &= G_{LM} C^K{}_M \\ g^K{}_k &= G_{KL} g^{kl} g^L{}_l \\ g^{Kk} &= G^{KL} g^{kl} g_{Ll} \\ g^K{}_k &= G^{KL} g_{kl} g^L{}_l \\ g_{Kk} &= G_{KL} g_{kl} g^L{}_l \end{aligned}$$



### 6.5.5 Vahetaja<sup>5</sup>

Seni oleme hoidnud EK ja LK lahus, kuid vahel on vaja ihes koordinaatsüsteemis esitatud vektoreid projekteerida teise koordinaatsüsteemi baasivektoritele. Vaatleme joonist 6.6 (lk. 18) Punktide  $P$  ja  $p$  kohavektorid

$$\mathbf{P} = P^L \mathbf{G}_L \text{ ja } \mathbf{p} = p^l \mathbf{g}_l.$$

Korrutame neist esimest kontravariantse baasivektoriga  $\mathbf{G}^K$  —

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^K = P^L \mathbf{G}_L \cdot \mathbf{G}^K = P^L \delta_L^K = P^K.$$

Seega,

$$P^K = \mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^K \text{ ja } p^k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}^k. \quad (6.42)$$

Viimased kujutavad endast vektorite  $\mathbf{P}$  ja  $\mathbf{p}$  projektsioone vastavalt baasivektorite  $\mathbf{G}^K$  ja  $\mathbf{g}^k$  sihtidele<sup>6</sup> (vt. Näited 6.5.1 ja 6.5.2).

<sup>5</sup>Varasemas konspektris nihutaja, i.k. *shifter*.

<sup>6</sup>Tegelikult võiks siin öelda tildistatud projektsioon, sest ei ko- ega kontravariantset baasivektorid pole ihikvektorid.

### 6.5. Baasivektor, meetriline tensor

### 6 - 30

Oletame nüüd, et tahame viia vektori  $\mathbf{p}$  paralleellükkega punkti  $P$  ja projekteerida teljestikku  $X^K$ , st., baasivektorite  $\mathbf{G}_K$  sihile. Tähistame vastava projektsiooni  $p^K$ . Nüüd

$$\mathbf{p} = p^K \mathbf{G}_K(\mathbf{X}) = p^k \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \quad (6.43)$$

Korrutame avaldist (6.43) kontravariantse baasivektoriga  $\mathbf{G}^L$

$$p^K \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}^L = p^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}^L.$$

Defineerime nn. *vahetaja*

$$g_k^K \stackrel{\text{def}}{=} g^k_K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}^K = \mathbf{G}^K \cdot \mathbf{g}_k. \quad (6.44)$$

Seega, tähistades timber indeksid  $L \rightarrow K$  saame

$$p^K = g_k^K p^k = g^k_K p^k, \quad (6.45)$$

mis esitabki kohavektori  $\mathbf{p}$  projektsiooni kovariantse baasivektori  $\mathbf{G}_K$  sihil. Korrutades avaldist (6.43) kontravariantse baasivektoriga  $\mathbf{g}^l$  ja defineerides *vahetajad*

$$g^k_K \stackrel{\text{def}}{=} g_K^k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{G}_K = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{g}^k, \quad (6.46)$$

saame vektori  $\mathbf{p}$  tagasi EK-sse:

$$p^k = g^k_K p^K = g_K^k p^K. \quad (6.47)$$

Analoogiliselt eelnevaga saab defineerida vahetajad

$$g_{kK} \stackrel{\text{def}}{=} g_{Kk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}_K = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{g}_k \quad (6.48)$$

ja

$$g^{kK} \stackrel{\text{def}}{=} g^{Kk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{G}^K = \mathbf{G}^K \cdot \mathbf{g}^k. \quad (6.49)$$

Vahetajad  $g^k_K$ ,  $g^K_k$  jne. on nii muutujate  $\mathbf{X}$  kui ka  $\mathbf{x}$  funktsioonid, sest baasivektorid  $\mathbf{G}_K$  ja  $\mathbf{G}^K$  sõltuvad Lagrange'i koordinaatidest  $\mathbf{X}$  ning baasivektorid  $\mathbf{g}_k$  ja  $\mathbf{g}^k$  Euleri koordinaatidest  $\mathbf{x}$ . Enamgi veel, nad osutuvad nn. kahepunktillis- teks tensorväljadeks, sest teisenevad kui tensorid mõlemas koordinaatsüsteemis. Järgnevalt näitame, et

$$g^k_K g^l_K = \delta^l_k. \quad (6.50)$$

Teatavasti

$$v_k = v_K g^K_k = v_l g^l_K g^k_K.$$

Kuna

$$v_k = v_l \delta^l_k,$$

siis peab kehtima võrdus (6.50) ehk vahetajad  $g^K_k$  ja  $g^l_K$  on teineteise pöördtensorid. Analoogiliselt

$$g^k_K g^k_L = \delta^K_L. \quad (6.51)$$

### 6.5. Baasivektor, meetriline tensor

### 6 - 32

Teisendame nüüd vahetajat  $g_{kK}$  —

$$g_{kK} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}_K \stackrel{(6.23), (6.22)}{=} \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \mathbf{i}_l \cdot \frac{\partial Z^L}{\partial X^K} \mathbf{I}_L = \delta_{lL} \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \frac{\partial Z^L}{\partial X^K}, \quad (6.52)$$

kus

$$\delta_{lL} = \delta_{Ll} = \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{I}_L. \quad (6.53)$$

Suurus  $\delta_{lL}$  on Kroneckeri delta vaid juhul kui  $z^k \uparrow\uparrow Z^K$ .

**Näide 6.5.4.** Vaatleme juhtu, kus  $LK$  ihtib  $LDRK$  ning  $EK$  ihtib  $EDRK$ , st.,  $\mathbf{X} = \mathbf{Z}$  ja  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ . Baasivektorid punktides  $P$  ja  $p$  on avaldiste (6.22) ja (6.23) põhjal

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M = \frac{\partial Z^M}{\partial Z^K} \mathbf{I}_M = \delta_{MK} \mathbf{I}_M = \mathbf{I}_K, \quad \mathbf{g}_k = \dots = \mathbf{i}_k. \quad (6.54)$$

Antud juhul ihtivad kovariantsed ja kontravariantsed koordinaadid ja baasid, st.,

$$G_{KL} = G^{KL} = \delta_{KL}, \quad g_{kl} = g^{kl} = \delta_{kl}, \quad g_{Kk} = g^{Kk} = \delta_{Kk}, \quad (6.55)$$

millest viimane on Kroneckeri delta kui  $\mathbf{i}_k \uparrow\uparrow \mathbf{I}_K$ .

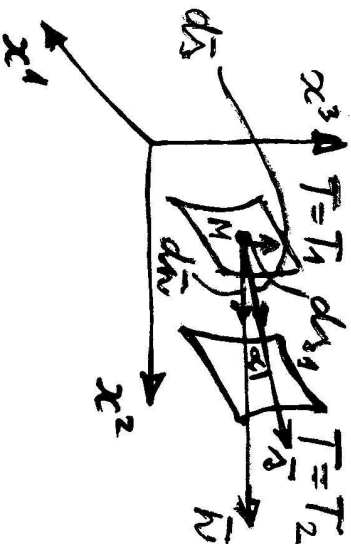
## 6.5.6 Gradient

### Samaväärtuspinnad, tuletis antud suunas

Vaatleme skalaarset funktsiooni (näit. temperatuuri)

$$T = T(\mathbf{x}, t) \quad (6.56)$$

Igal ajahetkel võib vaadelda pindu  $T = \text{const}$ , mida nimetatakse *samaväärtus-pindadeks* ehk *ekvipotentsiaalpindadeks*.



Joonis 6.10: Tuletis antud suunas

## 6.5. Baasivektor, meetriline tensor

### Tuletis antud suunas

Vaatleme punkti  $M$  pinnal  $T = T_1$  ja uurime skalaarse suuruse  $T$  sõltuvust suunast  $s$ . Suurust

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta s} \quad (6.57)$$

nimetatakse *tuletiseks suunas s*.<sup>7</sup>

Kui vektor  $s$  on ekvipotentsiaalpinna  $T = T_1$  suvalise puutuja sihis, siis me liigume mööda vaadeldavat pinda  $T = T_1$  ja tuletis  $\partial T / \partial s = 0$ .

Kui  $\Delta T = T_2 - T_1$ , ja liigume vaadeldava pinna  $T = T_1$  normaali sihis, siis  $dn = ds \cos \alpha$ , st.,

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial s \cos \alpha} \quad \text{ehk} \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial n} \cos \alpha. \quad (6.58)$$

Kui  $\alpha \rightarrow 0$ , siis  $\partial T / \partial s \rightarrow \max$ .

<sup>7</sup>Kasutatakse ka terminit *tuletis suuna järgi*. I.k. *directional derivative*

## Gradient

Ühest kiljest on skalaarse funktsiooni  $T$  *gradient* on defineeritud järgmiselt —

$$\text{grad } T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}^\circ}, \quad (6.59)$$

kus  $\mathbf{n}^\circ$  on normaalisihiline ühikvektor, mis on suunatud funktsiooni  $T$  kasvamise suunas ja  $\frac{\partial T}{\partial n}$  on skalaari  $T$  tuletis suunas  $\mathbf{n}$ .

Teisest kiljest —

$$\text{grad } T \stackrel{\text{def}}{=} \nabla T = \mathbf{g}^k \frac{\partial T}{\partial x^k}, \quad (6.60)$$

kus *nabla*

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = g^{kl} \mathbf{g}^l \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (6.61)$$

Valemeis (6.60) ja (6.61) peame kasutama kontravariantset baasi, sest osatuletis absoluutsest skalaarist on kovariantne vektor, st.,  $\partial T / \partial x^k = \Phi_k$ .

\*

## 6.5.7 Deformatsioonigradient

*Deformatsioonigradientid* on defineeritud järgmiselt<sup>8</sup> :

✓

$$x^k_{,K} = \frac{\partial x^k(\mathbf{X}, t)}{\partial X^K} \quad \text{ja} \quad X^K_{,k} = \frac{\partial X^K(\mathbf{x}, t)}{\partial x^k}, \quad (6.62)$$

Vastavalt liikumisseadustele avalduvad *koordinaatide diferentsiaalid* kujul

$$dx^k = x^k_{,K} dX^K \quad \text{ja} \quad dX^K = X^K_{,k} dx^k. \quad (6.63)$$

*Deformatsioonigradientide vahelised seosed*

$$x^k_{,K} X^K_{,l} = \delta^k_l \quad \text{ja} \quad X^K_{,k} x^k_{,L} = \delta^K_L \quad (6.64)$$

Valemite (6.21) põhjal avalduvad kohavektorite diferentsiaalid (lõpmata väikesed muudud) läbi baasivektorite  $\mathbf{G}_K$  ja  $\mathbf{g}_k$ . Teisendame neid avaldisi:

$$\begin{cases} d\mathbf{P} = \mathbf{G}_K dX^K \stackrel{(6.63)}{=} \mathbf{G}_K X^K_{,k} dx^k = \mathbf{c}_k dx^k, \\ d\mathbf{p} = \mathbf{g}_k dx^k \stackrel{(6.63)}{=} \mathbf{g}_k x^k_{,K} dX^K = \mathbf{C}_K dX^K, \end{cases} \quad (6.65)$$

<sup>8</sup>Indeks peale koma tähistab siin ja edaspidi osatuletist vastava (kontravariantse) koordinaadi järgei.

kus suurused

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} X^K_{,k} = \mathbf{G}_K X^K_{,k} \\ \text{ja} \\ \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} x^k_{,K} = \mathbf{g}_k x^k_{,K} \end{array} \right. \quad (6.66)$$

on vaadeldavad kui uued, keskkonna deformeeritud olekule vastavad, baasivektorid. Teisisõnu, *keskkonna liikumisel transformeeruvad baasivektorid  $\mathbf{g}_k$  ja  $\mathbf{G}_K$  uuteks baasivektoriteks  $\mathbf{C}_K$  ja  $\mathbf{c}_k$* .

Järgnevalt avaldame vana baasi  $\mathbf{G}_K$  uue baasi  $\mathbf{c}_k$  kaudu:

$$(6.66)_1 \cdot x^k_{,L} \rightarrow \dots \Rightarrow \mathbf{G}_K = \mathbf{c}_k x^k_{,K}. \quad (6.67)$$

$$(6.66)_2 \cdot X^K_{,l} \rightarrow \dots \Rightarrow \mathbf{g}_k = \mathbf{C}_K X^K_{,k}. \quad (6.68)$$

*Kontravariantsed baasid* saadakse ortonormaalustingimustest

$$\mathbf{c}^k \cdot \mathbf{c}_l = \delta^k_l \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{C}_L = \delta^K_L, \quad (6.69)$$

kust

$$\mathbf{c}^k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}^K(\mathbf{X}) x^k_{,K} \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}^K(\mathbf{X}, t) = \mathbf{g}^k(\mathbf{x}) X^K_{,k}. \quad (6.70)$$

### 6.5. Baasivektor, meetriline tensor

Meil oli eeldatud, et  $t = t_0$  puhul EK ja LK ühtivad, st.,  $x^1 = X^1, \dots, x^3 = X^3$ . Järelikult alghetkel

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_K(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t)$$

Vaatleme avaldisi (6.65) —

$$d\mathbf{P} = \underbrace{\mathbf{G}_K}_{\text{i}} dX^K = \underbrace{\mathbf{c}_k}_{\text{ii}} dx^k \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \underbrace{\mathbf{g}_k}_{\text{iii}} dx^k = \underbrace{\mathbf{C}_K}_{\text{iv}} dX^K. \quad (6.71)$$

i määrab  $d\mathbf{P}$  kui  $t = t_0$

ii  $d\mathbf{P}$  muutumise seadus EK-s

iii määrab  $d\mathbf{p}$  igal ajahetkel, sest vastavalt definitsioonile (6.21) ja (6.23) ei muutu  $d\mathbf{p}$  ajas

iv määrab muutumatu suuruse  $d\mathbf{p}$  muutuvates koordinaatides  $X^K$  suvalisel hetkel  $t \geq t_0$ .

## 6.6 Deformatsioonitensordid

### 6.6.1 Cauchy ja Greeni deformatsioonitensordid

$$\begin{cases} c_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} c_k \cdot c_l \stackrel{(6.66)}{=} G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l} & \text{ja} \\ C_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} C^K \cdot C^L \stackrel{(6.66)}{=} g_{kl} x^k_{,K} x^l_{,L}. \end{cases} \quad (6.72)$$

Suurust  $c_{kl}$  nimetatakse *Cauchy deformatsioonitensoriks* ja suurust  $C_{KL}$  *Greeni deformatsioonitensoriks*. Nad on sümmeetrilised ja positiivselt määratud. † Tensorid  $c_{kl}$  ja  $C_{KL}$  võib interpreteerida ka kui meetrilisi tensoreid, sest meetriline tensor  $G_{KL}(\mathbf{X})$  transformeerub läbi keskkonna liikumise tensoriks  $c_{kl}(\mathbf{x})$  ja  $g_{kl}(\mathbf{x}) \rightarrow C_{KL}(\mathbf{X})$ . Kovariantsete tensorite  $c_{kl}$  ja  $C_{KL}$  indekseid saab kontravariantsete meetriliste tensoritega tõsta. Saadud kontravariantsete tensorite maatriksid  $[c^{kl}]$  ja  $[C^{KL}]$  ei osutu aga kovariantsete tensorite maatriksite  $[c_{kl}]$  ja  $[C_{KL}]$  pöörDMAatriksiteks (nagu oli  $g_{kl}$  ja  $G_{KL}$  puhul). Antud juhul tuleb sisse tuua tensorid

$$\begin{cases} c^{-1kl} \stackrel{\text{def}}{=} c^k \cdot c^l \stackrel{(6.70)}{=} G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L} & \text{ja} \\ C^{-1KL} \stackrel{\text{def}}{=} C^K \cdot C^L \stackrel{(6.70)}{=} g^{kl} X^K_{,k} X^L_{,l}, \end{cases} \quad (6.73)$$

### 6.6. Deformatsioonitensordid

## 6 - 40

mille puhul  $c_{km}^{-1nl} = \delta_k^l$  ja  $C_{KM}^{-1ML} = \delta_K^L$ . Tensorit  $c^{-1kl}$  nimetatakse *Fingeri † deformatsioonitensoriks* ja  $C^{-1KL}$  *Piola deformatsioonitensoriks*

### 6.6.2 Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensordid

Pöördume tagasi suuruste  $d\mathbf{p}$  ja  $d\mathbf{P}$  juurde —

$$\begin{cases} dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL} dX^K dX^L = c_{kl} dx^k dx^l, \\ ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl} dx^k dx^l = C_{KL} dX^K dX^L \end{cases}$$

Viimastest leiame *elementaarpiikuse ruudu muudu*

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL} dX^K dX^L = 2e_{kl} dx^k dx^l, \quad (6.74)$$

kus

$$2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} \quad \text{ja} \quad 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl}. \quad (6.75)$$

Tensorit  $E_{KL} = E_{KL}(\mathbf{X}, t)$  nimetatakse *Lagrange'i deformatsioonitensoriks* ja tensorit  $e_{kl} = e_{kl}(\mathbf{x}, t)$  *Euleri deformatsioonitensoriks*.



Kehtivad seosed:

$$E_{K L} = e_{k l} x^k \cdot_K x^l \cdot_L \text{ ja } e_{k l} = E_{K L} X^K \cdot_k X^L \cdot_l \quad (6.76)$$

Valemi (6.76)<sub>1</sub> kasutamise puhul tuleb avaldada  $e_{k l}(\mathbf{X}, t)$  ja (6.76)<sub>2</sub> puhul vastupidi  $E_{K L}(\mathbf{x}, t)$ .

Meetriliste tensorite abil saame leida vastavaid sega- ja kontravariantseid tensoreid:

$$\begin{aligned} E^K{}_L &= G^{K M} E_{M L}, & E^{K L} &= G^{K M} G^{L N} E_{M N} = G^{L M} E^K{}_M, \\ e^k{}_l &= g^{k m} e_{m l}, & e^{k l} &= g^{k m} g^{l n} e_{m n} = g^{l m} e^k{}_m. \end{aligned}$$

---

6.7. Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

6 - 42

## 6.7 Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

### 6.7.1 Vektori kovariantne osatuletis

*Kõigepealt püüame siirdevektori  $\mathbf{u}$  kaudu avaldada vektorid  $\mathbf{C}_K$  ja  $\mathbf{c}_k$ .*

Kohavektor  $\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u}$  (kui LK ja EK nullpunktid ei ühti siis  $\mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{P} + \mathbf{u}$ ).  
Seega *siirdevektor*

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P}. \quad (6.77)$$

Siirdevektori  $\mathbf{u}$  saab avaldada nii LK kui EK kaudu —

$$\mathbf{u} = U^K \mathbf{G}_K = U_K \mathbf{G}^K = u^k \mathbf{g}_k = u_k \mathbf{g}^k, \quad (6.78)$$

kus  $U^K(\mathbf{X}, t)$  ja  $u^k(\mathbf{x}, t)$  on vektori  $\mathbf{u}$  kontravariantsed komponendid ning  $U_K(\mathbf{X}, t)$  ja  $u_k(\mathbf{x}, t)$  kovariantsed komponendid vastavalt LK-s ja EK-s.

Definitsioonide (6.66) põhjal

$$\mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K}, \quad \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k}.$$

Avaldame valemist (6.77) kohavektorid  $\mathbf{p}$  ja  $\mathbf{P}$  ning asendame viimastesse avaldistesse. Saame

$$\mathbf{C}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^K} = \mathbf{G}_K + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^K}, \quad \mathbf{c}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = \mathbf{g}_k - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k}. \quad (6.79)$$

Valemite (6.78) põhjal  $\mathbf{u} = U^L \mathbf{G}_L = u^l \mathbf{g}_l$  ning (6.79) saab kuju

$$\mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + \frac{\partial}{\partial X^K} (U^L \mathbf{G}_L), \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - \frac{\partial}{\partial x^k} (u^l \mathbf{g}_l). \quad (6.80)$$

Analoogilised avaldised siirdevektori kovariantsete komponentide jaoks:

$$\mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + \frac{\partial}{\partial X^K} (U_L \mathbf{G}^L), \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - \frac{\partial}{\partial x^k} (u_l \mathbf{g}^l). \quad (6.81)$$

*Järgnevalt püüame leida avaldistes (6.80) ja (6.81) olevaid osatuletisi*

$$\frac{\partial}{\partial X^K} (U^L \mathbf{G}_L) = \frac{\partial U^L}{\partial X^K} \mathbf{G}_L + U^L \frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K}, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (u^l \mathbf{g}_l) = \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \mathbf{g}_l + u^l \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k}, \quad (6.82)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^K} (U_L \mathbf{G}^L) = \frac{\partial U_L}{\partial X^K} \mathbf{G}^L + U_L \frac{\partial \mathbf{G}^L}{\partial X^K}, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (u_l \mathbf{g}^l) = \frac{\partial u_l}{\partial x^k} \mathbf{g}^l + u_l \frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial x^k}. \quad (6.83)$$

Esimeste liidetavate leidmine pole probleemiks — see on lihtne. Teiste liidetavate jaoks on lugu keerukam, sest osatuletisi tuleb leida baasivektoritest  $\mathbf{G}_L, \dots, \mathbf{g}^l$ .

### 6.7. Deformatsioonitensorige avaldamine siirete kaudu

Vastavalt definitsioonidele (6.22) ja (6.23)

$$\mathbf{G}_L = \frac{\partial Z^N}{\partial X^L} \mathbf{I}_N, \quad \mathbf{I}_N = \frac{\partial X^L}{\partial Z^N} \mathbf{G}_L, \quad \mathbf{g}_l = \frac{\partial z^n}{\partial x^l} \mathbf{i}_n, \quad \mathbf{i}_n = \frac{\partial x^l}{\partial z^n} \mathbf{g}_l.$$

Seega osatuletised võrrandis (6.82)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K} = \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \mathbf{I}_N = \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \mathbf{G}_M, \\ \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \mathbf{i}_n = \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial z^n} \mathbf{g}_m. \end{cases} \quad (6.84)$$

Võtame kasutusele *Christoffeli teist liiki sümboolid*

$$\begin{cases} M \\ KL \end{cases} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} m \\ kl \end{cases} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial z^n}. \quad (6.85)$$

Valemid (6.84) saavad nüüd kuju

$$\frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K} = \begin{cases} M \\ KL \end{cases} \mathbf{G}^M \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k} = \begin{cases} m \\ kl \end{cases} \mathbf{g}^m. \quad (6.86)$$

analoogiliselt saab näidata, et

$$\frac{\partial \mathbf{G}^L}{\partial X^K} = - \begin{cases} L \\ KM \end{cases} \mathbf{G}^M \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial x^k} = - \begin{cases} l \\ km \end{cases} \mathbf{g}^m. \quad (6.87)$$

*Christoffeli esimest liiki sümbolid* on defineeritavad kahel moel.

i) Läbi Christoffeli teist liiki sümbolite

$$\begin{cases} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} G_{MN} \begin{cases} N \\ KL \end{cases}, \begin{cases} M \\ KL \end{cases} = G^{MN} [KL, N], \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} g_{mn} \begin{cases} n \\ kl \end{cases}, \begin{cases} m \\ kl \end{cases} = g^{mn} [kl, n]. \end{cases} \quad (6.88)$$

ii) Arvestades meetriliste tensorite definitsioone (6.26) ja (6.30),

$$G_{KL} = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L = \delta^{MN} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \frac{\partial Z^N}{\partial X^L}, \quad g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l = \delta^{mn} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^n}{\partial x^l},$$

saame

$$\begin{cases} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial G_{KM}}{\partial X^L} + \frac{\partial G_{LM}}{\partial X^K} - \frac{\partial G_{KL}}{\partial X^M} \right), \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \end{cases} \quad (6.89)$$

Väga tihti defineeritaksegi Christoffeli esimest liiki sümbolid kujul (6.89).

---

### 6.7. Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

Valemeist (6.85) ja (6.89) järeldub, et Christoffeli sümbolid on sümmeetrilised indeksite  $K$  ja  $L$  ( $k$  ja  $l$ ) suhtes:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} M \\ KL \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ LK \end{Bmatrix}, \quad [KL, M] = [LK, M], \quad \begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ lk \end{Bmatrix}, \quad [kl, m] = [lk, m]. \end{cases} \quad (6.90)$$

**NB!** *Christoffeli sümbolid pole tensorid!*

Tuleme tagasi valemite (6.82) ja (6.83) juurde ning esitame nad kujul

$$\frac{\partial}{\partial X^K} (U^L \mathbf{G}_L) = U^M{}_{;K} \mathbf{G}_M, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (u^l \mathbf{g}_l) = u^m{}_{;k} \mathbf{g}_m, \quad (6.91)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^K} (U_L \mathbf{G}^L) = U_{M;K} \mathbf{G}^M, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (u_l \mathbf{g}^l) = u_{m;k} \mathbf{g}^m, \quad (6.92)$$

Siin

$$U^M{}_{;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U^M}{\partial X^K} + \begin{Bmatrix} M \\ KL \end{Bmatrix} U^L, \quad u^m{}_{;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} u^l \quad (6.93)$$

on *kontravariantsete vektorite kovariantsed osatuletised* ning

$$U_{M;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U^M}{\partial X^K} - \left\{ \begin{matrix} L \\ MK \end{matrix} \right\} U_L, \quad u_{m;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_m}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} l \\ mk \end{matrix} \right\} u_l \quad (6.94)$$

on *kovariantsete vektorite kovariantseted osatuletised*.

Suurused  $U^M_{;K}$  ja  $u^m_{;k}$  on segatensordid ning  $U_{M;K}$  ja  $u_{m;k}$  kovariantseted tensorid.

Meetriliste tensoritega saab teostada üleminekuid (6.93)  $\rightarrow$  (6.94) ja vastupidi:

$$\begin{cases} U^L_{;K} = G^{LM} U_{M;K} & U_{L;K} = G_{LM} U^M_{;K} \\ u^l_{;k} = g^{lm} u_{m;k} & u_{l;k} = g_{lm} u^m_{;k} \end{cases}$$

**Kovariantse osatuletise geomeetiline interpretatsioon.** Kovariantse osatuletise avaldised (6.93) ja (6.94) koosnevad kahest osast. Neist esimene iseloomustab vektori  $\mathbf{u}$  muutumist kui muutub koordinaat  $X^K$  (või  $x^k$ ) ning teine  $\mathbf{u}$  muutumist kui seoses  $X^K$  (või  $x^k$ ) muutumisega muutub baas  $\mathbf{G}_M$  (või  $\mathbf{g}_m$ ).

*Sirgjooneliste koordinaatide* puhul on Christoffeli sümbolid samaselt nullid ja seega kovariantne osatuletis on võrdne “harilikku” osatuletisega.

★

### 6.7. Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

6 - 48

Pöördume nüüd tagasi uute baasvektorite  $\mathbf{C}_K$  ja  $\mathbf{c}_k$  avaldiste (6.80) ja (6.81) juurde. Arvestades avaldisi (6.91) ja (6.92) saame

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + U^M_{;K} \mathbf{G}_M, \\ \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - u^m_{;k} \mathbf{g}_m, \end{cases} \quad (6.95)$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + U_{M;K} \mathbf{G}^M, \\ \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - u_{m;k} \mathbf{g}^m. \end{cases} \quad (6.96)$$

Avaldame nüüd Greeni ja Cauchy deformatsioonitensordid läbi siirete võttes arvesse valemeid (6.95) —

$$\begin{aligned} C_{KL} &= \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L \stackrel{(6.95)}{=} \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

Kokku saame

$$\begin{cases} C_{KL} = G_{KL} + U_{K;L} + U_{L;K} + U_{N;K} U^N_{;L}, \\ c_{kl} = g_{kl} - u_{k;l} - u_{l;k} + u_{n;k} u^n_{;l}. \end{cases} \quad (6.97)$$

Arvestades Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorite definitsioone (6.75) saame omakorda

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K} + U_{M;K}U_{M;L}^M, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{k;l} + u_{l;k} - u_{m;k}u_{m;l}^m. \end{cases} \quad (6.98)$$

*Need võrrandid on PKM tihed põhivõrrandid, mis seovad omavahel Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid ning materiaalsete punktide siirded  $\mathbf{u}$ .*

Sirgjooneliste koordinaatide puhul  $U_{M;K} \equiv U_{M,K}$  jne.

DRK puhul lisaks eelnevale  $U_{M;L}^M \equiv U_{M,K}$  jne. ning võrrandid (6.98) saavad kuju

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L,K} + U_{K,L} + U_{M,K}U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{l;k} + u_{k;l} - u_{m;k}u_{m;l}^m. \end{cases} \quad (6.99)$$

Avaldame kohavektorite  $\mathbf{P}$  ja  $\mathbf{p}$  diferentsiaalid (lõpmata väikesed muudud)  $d\mathbf{P}$  ja  $d\mathbf{p}$  läbi siirete. Valemite (6.65) põhjal

$$d\mathbf{P} = \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t)dx^k \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t)dX^K.$$

---

### 6.7. Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu

Asendades siia  $\mathbf{c}_k$  ja  $\mathbf{C}_K$  valemeist (6.95) ja (6.96) saame

$$d\mathbf{P} = (\mathbf{g}_k - u_{m;k}\mathbf{g}_m)dx^k, \quad d\mathbf{p} = (\mathbf{G}_K + U_{M;K}^M\mathbf{G}_M)dX^K, \quad (6.100)$$

$$d\mathbf{P} = (\mathbf{g}_k - u_{m;k}\mathbf{g}_m)dx^k, \quad d\mathbf{p} = (\mathbf{G}_K + U_{M;K}\mathbf{G}_M^M)dX^K. \quad (6.101)$$

**Märkused:**

1. Ortogonaalse kõverjoonelise koordinaatsüsteemi puhul lihtsustuvad mõned avaldised tunduvalt:

- meetriline tensor

$$g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \Rightarrow g_{kl} = 0 \text{ kui } k \neq l; \quad (6.102)$$

- elementaarpiikkuse ruut

$$ds^2 = g_{kl}dx^k dx^l = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2; \quad (6.103)$$

- determinant

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}; \quad (6.104)$$

- kontravariantne meetriline tensor

†

$$g^{\underline{k} \underline{k}} = 1/g_{\underline{k} \underline{k}}; \quad (6.105)$$

- kontravariantne baas

$$\mathbf{g}^k = g^{\underline{k} \underline{k}} \mathbf{g}_k, \quad k = \underline{k}; \quad (6.106)$$

- Christoffeli teist liiki sümboolid

†

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ \underline{k} \underline{k} \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{\underline{l} \underline{l}}} \frac{\partial g_{\underline{k} \underline{k}}}{\partial x^l}, \quad l \neq \underline{k}; \quad (6.107)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k} l \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^l} \ln \sqrt{g_{\underline{k} \underline{k}}}, \quad l \neq \underline{k}; \quad (6.108)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k} \underline{k} \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^{\underline{k}}} \ln \sqrt{g_{\underline{k} \underline{k}}}; \quad (6.109)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ lm \end{matrix} \right\} = 0, \quad l \neq k \neq m. \quad (6.110)$$

### 6.8. Vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid

6 - 52

2. Alghetkel  $t = t_0$  toome sisse Lagrange'i koordinaadid (mis võivad kuid ei pruugi tihtida Euleri koordinaatidega). Sel hetkel loeme keskkonna deformatsioonid ja siirded nulliks ning titleme, et keskkond on *loomulik* *olekus*.

3. Siirete ja deformatsioonide määramiseks hetkel  $t = t_1$  on vaja teada liikumisest, st., ajast kui parameetrist sõltuvat koordinaatseisendust. Kui meid ei huvita kuidas deformatsioon toimub, siis piisab tegelikult sellest kui me teame liikumisest esitavat koordinaatseisendust vaid kahel ajahetkel:  $t = t_0$  ja  $t = t_1$ .

4. Suurusid  $u_{t;k}$ ,  $u^m_{,j}$  jne. nimetatakse *siirdegradientideks*.

## 6.8 Vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid

Vektorite ja tensoritega opereerides ei pöörata tavaliselt tähelepanu dimensioonile — erinevad komponendid on sageli erineva dimensiooniga (näiteks silindrilised koordinaadid). Et sellest füüsikaliselt vastuvõtmatust olukorrast puhtalt ✓



välja tulla, tuuakse sisse vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid. Teatavasti pole baasivektorid kõverjoonelise koordinaatsüsteemi puhul tildjuhul ühikvektorid ja valemite (6.37) põhjal on nende pikkused määratud meetrilise tensori diagonaalelementidega

$$|\mathbf{g}_k| = \sqrt{g_{k\ k}} \quad \text{ja} \quad |\mathbf{g}^k| = \sqrt{g^{k\ k}} \quad \text{kui} \quad k = \underline{k}. \quad (6.111)$$

Defneerime ühikvektorid

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{g}_k}{\sqrt{g_{k\ k}}} \quad \text{ja} \quad \mathbf{e}^k = \frac{\mathbf{g}^k}{\sqrt{g^{k\ k}}}, \quad k = \underline{k}. \quad (6.112)$$

Nüüd

$$\mathbf{u} = u^k \mathbf{g}_k = u^{(k)} \mathbf{e}_k = u_k \mathbf{g}^k = u_{(k)} \mathbf{e}^k, \quad (6.113)$$

kus  $u^{(k)}$  ja  $u_{(k)}$  on vektori  $\mathbf{u}$  *kontra- ja kovariantse füüsikalised komponendid*. Valemite (6.112) ja (6.113) põhjal vektori füüsikalised komponendid

$$u^{(k)} = u^k \sqrt{g_{k\ k}} \quad \text{ja} \quad u_{(k)} = u_k \sqrt{g^{k\ k}}. \quad (6.114)$$

Ortogaalse baasi puhul  $g_{k\ k} = 1/g^{k\ k}$ , järelikult on kovariantne füüsikaline komponent leitav kovariantse meetrilise tensori abil:

$$u_{(k)} = \frac{u_k}{\sqrt{g_{k\ k}}}. \quad (6.115)$$

### 6.8. Vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid

6 - 54

Analoogiliselt saab defneerida tensorite füüsikalised komponendid. Näiteks ortogaalse baasi puhul

$$\begin{aligned} t^{(k)\ (l)} &= t^k_l \sqrt{\frac{g_{k\ k}}{g_{l\ l}}} = t^k_l \sqrt{\frac{1}{g^{k\ k} g_{l\ l}}} = t^k_l \sqrt{g_{k\ k} g^{l\ l}}, \\ t_{(k)\ (l)} &= t_k^l \sqrt{\frac{g_{l\ l}}{g_{k\ k}}} = t_k^l \sqrt{\frac{1}{g_{k\ k} g^{l\ l}}} = t_k^l \sqrt{g^{k\ k} g_{l\ l}}, \end{aligned} \quad (6.116)$$

$$\begin{aligned} t^{(k)\ (l)} &= t^{kl} \sqrt{g_{k\ k} g_{l\ l}} = t^{kl} \sqrt{\frac{1}{g^{k\ k} g^{l\ l}}}, \\ t_{(k)\ (l)} &= t_{kl} \sqrt{g^{k\ k} g^{l\ l}} = t_{kl} \sqrt{\frac{1}{g_{k\ k} g_{l\ l}}}. \end{aligned}$$

### Märkused

1. Tavaliselt lahendatakse üllesanded ko- ja kontravariantsetes tensorites ning lõpus minnakse üle füüsikalistele komponentidele.
2. DRK puhul  $\mathbf{g}_k \equiv \mathbf{g}^k \equiv \mathbf{e}_k \equiv \mathbf{e}^k \equiv \mathbf{i}_k$ .

**Näide 6.8.1.** Leida ühikbaas ja sirdevektori füüsikalised komponendid silindriliste koordinaatide jaoks.

## 6.9 Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

### 6.9.1 Lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid

Eeldame, et siirdegradiendid on väikesed võrreldes ühega. See võimaldab meil hiljata kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed ning saada *lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid*<sup>9</sup>

$$\begin{cases} 2\tilde{E}_{KL} = 2\tilde{E}_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L;K} + U_{K;L}, \\ 2\tilde{e}_{kl} = 2\tilde{e}_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{l;k} + u_{k;l}. \end{cases} \quad (6.117)$$

*Selliseid deformatsioonitensoreid kasutatakse klassikalises lineaarses teoorias.*

---

<sup>9</sup>Neid nimetatakse ka lihtsalt väikeste deformatsioonide tensoriteks “unustades” sõna *lõpmata* lisamata.

### 6.9.2 Pöördetensordid ja pöördvektorid

$$\tilde{R}_{KL} = \frac{1}{2}(U_{K;L} - U_{L;K}) \quad \text{ja} \quad \tilde{r}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k;l} - u_{l;k}). \quad (6.118)$$

Viimased on *klassikalise lineaarse teooria pöördetensordid*. On selge, et tegu on kaldsümmeetriliste tensoritega, st.,  $R_{KL} = -R_{LK}$  ja  $r_{kl} = -r_{lk}$ . Pöördetensorite indekseid saab meetriliste tensoritega tõsta ja langetada.

Järgnevalt toome sisse Lagrange'i ja Euleri *lineaarsed pöördvektorid*  $\tilde{\mathbf{R}}^K$  ja  $\tilde{\mathbf{r}}^k$ :

$$\tilde{\mathbf{R}}^K = \frac{1}{2}\epsilon^{KLM}\tilde{R}_{ML}, \quad \text{ja} \quad \tilde{\mathbf{r}}^k = \frac{1}{2}\epsilon^{klm}\tilde{r}_{ml}, \quad (6.119)$$

kus  $\epsilon^{KLM}$  ja  $\epsilon^{klm}$  on *permutatsioonisümbolid* ehk *permutatsioonitensordid*.

Permutatsioonisümbolid ehk permutatsioonitensordid<sup>10</sup>

$$\begin{cases} \epsilon^{klm} = \frac{e^{klm}}{\sqrt{g}}, \\ \epsilon_{klm} = e_{klm} \sqrt{g}, \quad g = |g_{kl}|, \end{cases} \quad (6.120)$$

kus<sup>11</sup>

$$e_{klm} = e_{klm} = \begin{cases} 1 & \text{kui } klm \text{ on } 123 \text{ paaris permutatsioon,} \\ -1 & \text{kui } klm \text{ on } 123 \text{ paaritu permutatsioon,} \\ 0 & \text{muudel juhtudel.} \end{cases} \quad (6.121)$$

<sup>10</sup>Tuntud ka kui Levi-Civita tensor või Levi-Civita permutatsioonitensor.Ik. on kasutusel ka nimetused *Levi-Civita symbol*, *permutation symbol*, *antisymmetric symbol*, *alternating symbol*.<sup>11</sup>Vt. ka 2. ptk. Tullio Levi-Civita (29. 03. 1873 – 29. 12. 1941) oli Itaalia matemaatik.

## 6.9. Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

Näide 6.9.1. Avaldame pöördvektoreid  $\tilde{\mathbf{r}}^1$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}^2$  ja  $\tilde{\mathbf{r}}^3$  sirdegradientide kaudu.

Valemite (6.119) ja (6.120) põhjal

$$\tilde{\mathbf{r}}^k = \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{klm} r_{ml},$$

Seega

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}^1 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [\dots\dots\dots + \dots\dots\dots] = \dots\dots \\ \tilde{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [ \dots\dots\dots + \dots\dots\dots ] = \dots\dots \\ \tilde{\mathbf{r}}^3 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [ \dots\dots\dots + \dots\dots\dots ] = \dots\dots \end{cases} \quad (6.122)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{3;2} - u_{2;3}) = r_{32},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{1;3} - u_{3;1}) = r_{13},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{2;1} - u_{1;2}) = r_{21}.$$

## 6.10 Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensorigeomeetria tõlgendus

### 6.10.1 Pikenemine, pikenemiskoeffitsendid ja suhteline pikenemine

Pikenemiskoeffitsient suunas  $\mathbf{N}$ :

$$\begin{cases} \Lambda^{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{dS^2}} = \sqrt{\frac{C_{KL}dX^KdX^L}{dS^2}} = \sqrt{C_{KL}N^KN^L}, \\ \lambda^{(\mathbf{n})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{dS^2}} = \sqrt{\frac{ds^2}{c_{kl}dx^kdx^l}} = \frac{1}{\sqrt{c_{kl}n^kn^l}}. \end{cases} \quad (6.123)$$

Füüsikaliselt on suurused  $\Lambda^{(\mathbf{N})}$  ja  $\lambda^{(\mathbf{n})}$  samad — esimene on vaid esitatud LK-s, teine EK-s.

*Suhteline pikenemine*<sup>12</sup> (suunas  $\mathbf{N}$ ) esitatakse kujul

$$E^{(\mathbf{N})} = e^{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda^{(\mathbf{N})} - 1 \equiv \lambda^{(\mathbf{n})} - 1. \quad (6.124)$$

<sup>12</sup>Lk. *extension*

---

### 6.10. Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensorigeomeetria tõlgendus 6 - 60

**Lagrange'i koordinaadid.** Pikenemiskoeffitsendid ja suhteline pikenemine koordinaatkõvera  $X^K$  puutuja sihis ( $\mathbf{N}$  on koordinaatkõvera  $X^K$  puutuja sihis):

$$\Lambda^{(K)} = \sqrt{\frac{C_{KK}}{G_{KK}}} = \sqrt{1 + \frac{2E_{KK}}{G_{KK}}}, \quad E^{(K)} = \sqrt{1 + \frac{2E_{KK}}{G_{KK}}} - 1. \quad (6.125)$$

Et anda füüsikalist tõlgendust deformatsioonitensorigeomeetria komponentidele, esitatakse viimased valemid sageli kujul

$$\frac{2C_{KK}}{G_{KK}} = \Lambda^{(K)^2}, \quad \frac{2E_{KK}}{G_{KK}} = \Lambda^{(K)^2} - 1 = (1 + E^{(K)})^2 - 1. \quad (6.126)$$

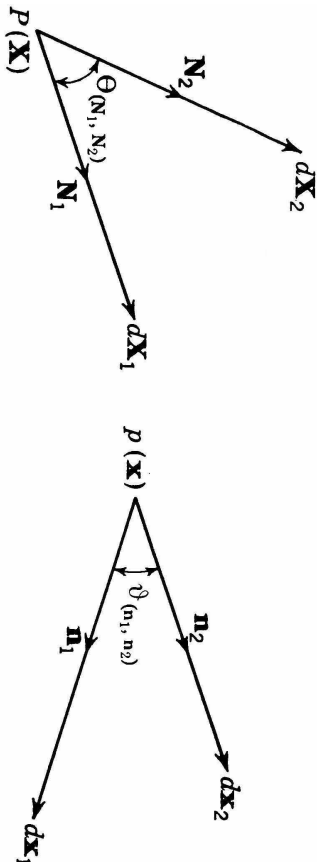
**Euleri koordinaadid.** Lähtudes avaldistest (6.123)<sub>2</sub> saame tuletada analoogilised valemid EK jaoks —

$$\begin{cases} \lambda^{(k)} = \sqrt{\frac{g_{kk}}{C_{kk}}} = \left(1 - \frac{2e_{kk}}{g_{kk}}\right)^{-\frac{1}{2}}, & e^{(k)} = \left(1 - \frac{2e_{kk}}{g_{kk}}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1, \\ \frac{C_{kk}}{g_{kk}} = \lambda^{(k)^{-2}}, & \frac{2e_{kk}}{g_{kk}} = 1 - \lambda^{(k)^{-2}} = 1 - (1 + e^{(k)})^{-2} \end{cases} \quad (6.127)$$

✓

### 6.10.2 Nurga muutus ja nihkedeformatsioon

Vaatleme kahte lõpmata väikest vektorit  $d\mathbf{X}_1$  ja  $d\mathbf{X}_2$ , mille vaheline nurk on  $\Theta \equiv \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}$  ja mis deformeeruvad vektoriteks  $dx_1$  ja  $dx_2$ , mille vaheline nurk on  $\vartheta \equiv \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}$ .



Joonis 6.11: Nurga muutus

Nurkade koosinused

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} \stackrel{(6.21)}{=} \frac{G_{KL} dX_1^K dX_2^L}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} = G_{KL} N_1^K N_2^L \quad (6.128)$$

ja

*6.10. Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensorite geomeetiline tõlgendus* 6 - 62

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{dx_1 \cdot dx_2}{|dx_1| |dx_2|} \stackrel{(6.65)}{=} \frac{C_{KL} dX_1^K dX_2^L}{\sqrt{C_{MN} dX_1^M dX_1^N} \sqrt{C_{RS} dX_2^R dX_2^S}} = \dots \\ &\dots \stackrel{(6.123)}{=} \frac{C_{KL} N_1^K N_2^L}{\Lambda_{(\mathbf{N}_1)} \Lambda_{(\mathbf{N}_2)}} \stackrel{\text{tähistamine}}{=} H. \quad (6.129) \end{aligned}$$

*Nihe ehk nihkedeformatsioon ehk nihkenurk* vektoritega  $\mathbf{N}_1$  ja  $\mathbf{N}_2$  määratud pinnal on defineeritud kui algse nurga  $\Theta$  muut —

$$\Gamma_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)} = \gamma_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} = \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)} - \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}. \quad (6.130)$$

✓

Võtame viimase avaldise vasakust ja paremast poolst siinuse

$$\begin{aligned} \sin \Gamma = \sin(\Theta - \vartheta) &= \dots \\ &\stackrel{(6.129)}{=} H \sin \Theta - \sqrt{1 - H^2} \cos \Theta. \quad (6.131) \end{aligned}$$

Kui  $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_2$ , siis saame viimasest, et

$$\sin \Gamma = H \stackrel{(6.129)}{=} \frac{C_{KL} N_1^K N_2^L}{\Lambda(\mathbf{N}_1) \Lambda(\mathbf{N}_2)}. \quad (6.132)$$

Seega, kaks algsest ristuvat vektorit jäävad ka peale deformatsiooni risti parajasti siis kui

$$C_{KL} dX_1^K dX_2^L = 0. \quad (6.133)$$

Kui valida suunad  $\mathbf{N}_1$  ja  $\mathbf{N}_2$  piki koordinaatkõverate  $X^K$  puutujaid, siis saab nurgamuutuste hindamiseks kasutada baasivektoreid  $\mathbf{G}_K$  ja  $\mathbf{C}_K$  (kuigi nad pole ühikvektorid) —

$$\begin{cases} \cos \Theta_{(KL)} = \frac{G_{KL}}{\sqrt{G_K^K G_L^L}}, \\ \cos \vartheta_{(KL)} = \frac{C_{KL}}{\sqrt{C_K^K C_L^L}} = \frac{G_{KL} + 2E_{KL}}{\sqrt{(G_K^K + 2E_K^K)(G_L^L + 2E_L^L)}}. \end{cases} \quad (6.134)$$

---

6.10. Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensori geomeetiline tõlgendus

EK-s saavad viimased valemid kuju

$$\begin{cases} \cos \vartheta_{(kl)} = \frac{g_{kl}}{\sqrt{g_k^k g_l^l}}, \\ \cos \Theta_{(kl)} = \frac{C_{kl}}{\sqrt{C_k^k C_l^l}} = \frac{g_{kl} - 2e_{kl}}{\sqrt{(g_k^k - 2e_k^k)(g_l^l - 2e_l^l)}}. \end{cases} \quad (6.135)$$

Kuna LK ja EK on valitavad sõltumatult, siis üldjuhul ei õnnestu siduda nihkeid  $\Gamma_{(KL)}$  ja  $\gamma_{(kl)}$ . Nurkadele  $\Theta_{(KL)} = \pi/2$  ja  $\vartheta_{(kl)} = \pi/2$  vastavad nihked on määratud järgmiselt:

$$\begin{cases} \sin \Gamma_{(KL)} = \frac{1}{\Lambda_{(K)} \Lambda_{(L)}} \frac{C_{KL}}{\sqrt{G_K^K G_L^L}}, \\ \sin \gamma_{(kl)} = -\lambda_{(k)} \lambda_{(l)} \frac{C_{kl}}{\sqrt{g_k^k g_l^l}}. \end{cases} \quad (6.136)$$

Kui  $X^K$  on DRK, siis .....  
see on juba tehtud 3. peatükis.



## 6.11 Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

Tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$(C^K{}_L - C\delta^K{}_L) N^L = 0. \quad (6.137)$$

Viimasel eksisteerib mittetruiviaalne lahend juhul kui tema *karakteristlik determinant* on null, st.,

$$|C^K{}_L - C\delta^K{}_L| = 0. \quad (6.138)$$

Selle determinandi arendamise tulemusena saadakse *karakteristlik võrrand* (mis kujutab endast kuupvõrrandit)

$$C^3 - I_C C^2 + II_C C - III_C = 0 \quad (6.139)$$

tundmatu  $C$  määramiseks. Kogu protseduur on tegelikult analoogiline DKR korral käsitletule.

---

### 6.11. Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

**Invariantide III<sub>C</sub> ja III<sub>c</sub> geomeetiline tõlgendus.** Maatriksite teooriast on teada, et determinant maatriksite korrutisest on võrdne korrutatavate maatriksite determinantide korrutisega, st.,  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ . Meil

$$C^K{}_L = G^{KM} C_{ML} \stackrel{(6.72)}{=} G^{KM} g_{kl} x^k{}_{,M} x^l{}_{,L}. \quad (6.140)$$

Invariandi III<sub>C</sub> definitsiooni põhjal

†

$$III_C = |C^K{}_L| \stackrel{(6.140)}{=} |G^{RS}| |g_{mn}| |x^k{}_{,K}|^2 = \frac{g}{G} j^2 = J^2, \quad (6.141)$$

kus  $J$  on teisenduse  $z^k = z^k(Z^K, t)$  jakobiaan fikseeritud ajahetkel  $t$  ja mis on leitav järgmiselt:

†

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \right| \left| \frac{\partial x^n}{\partial X^N} \right| \left| \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right| = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} j. \quad (6.142)$$

Vaatleme peatelgede sihilisi joonelemente  $ds_\alpha$  ja  $dS_\alpha$ . Elementaarruumalad  $d\mathcal{V} = dS_1 dS_2 dS_3$  ja  $dv = ds_1 ds_2 ds_3$ . Kuna

$$\frac{ds_\alpha}{dS_\alpha} = \Lambda_\alpha = \lambda_\alpha,$$

siis

$$\frac{dv}{d\mathcal{V}} = \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{dS_1 dS_2 dS_3} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \sqrt{\text{III}_C} \stackrel{(6.141)}{=} J.$$

Seega

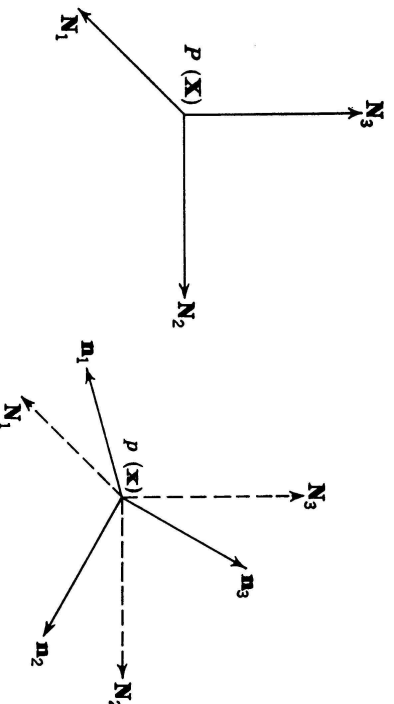
$$dv = \sqrt{\text{III}_C} d\mathcal{V} \quad \text{ja} \quad d\mathcal{V} = \sqrt{\text{III}_C} dv. \quad (6.143)$$

Kokkuvõttes — *invariandid III<sub>C</sub> ja III<sub>e</sub> iseloomustavad ruumala muutust.*

## 6.12 Pööre, pöördetensor ja deformatsiooni dekompositsioon

### 6.12.1 Pöördetensor

Deformeeruva keskkonna (või keha) „fikseeritud kiu” lokaalse pööride määramiseks toome sisse pöördetensori. Olgu vektorid  $\mathbf{N}_\alpha$  peatelgede sihilised ortogonaalsed tihikvektorid  $\mathbf{X}$ -s. Peale deformatsiooni on see kolmik pööratud



Joonis 6.12: Peatelgede siire koos pööridega

ortogonaalseks kolmnikuks  $\mathbf{n}_\alpha$  koordinaatides  $\mathbf{x}$ . Kui vahetada (siirata) kolmik  $\mathbf{N}_\alpha$  ruumipunkti  $p(\mathbf{x})$  siis saab defineerida ühese ortogonaalse tensori  $\mathbf{R}$ , mida nimetatakse *pöördetensoriks* ja mis pöörab vahetatud kolmiku  $\mathbf{N}_\alpha$  kolmnikuks  $\mathbf{n}_\alpha$ .

$$\begin{cases} n_\alpha^k = R_m^k g_m^m K N_\alpha^K = g_L^k R_L^L K N_\alpha^K = R_K^k N_\alpha^K \\ N_\alpha^K = g_m^K R_m^m n_\alpha^k = R_L^{-1K} g_L^L n_\alpha^k = R_K^{-1} n_\alpha^k \end{cases} \quad (6.144)$$

Siin  $\mathbf{R}$  on tensori  $\mathbf{R}$  pöördtensor (duaalne tensor):  $\mathbf{R}$  pöörab  $\mathbf{N}_\alpha \rightarrow \mathbf{n}_\alpha$  ja vastupidi —  $\mathbf{R}^{-1}$  pöörab  $\mathbf{n}_\alpha \rightarrow \mathbf{N}_\alpha$  tagasi. Tensor

$$R_K^k = R_m^k g_m^m K = R_L^L K g_L^k \quad (6.145)$$

esitab siiret  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$  koos järgneva pöördega.

Defineerime nüüd vektorite kolmnikud  $\mathbf{N}^\alpha$  ja  $\mathbf{n}^\alpha$  —

$$N_\alpha^\alpha N_L^L \stackrel{\text{def}}{=} \delta_K^L, \quad n_\alpha^\alpha n_\alpha^l \stackrel{\text{def}}{=} \delta_k^l, \quad (6.146)$$

st., (vektorite) kolmnikud  $\mathbf{N}^\alpha$  ja  $\mathbf{n}^\alpha$  ning  $\mathbf{N}_\alpha$  ja  $\mathbf{n}_\alpha$  teineteise pöördkolmnikud<sup>13</sup>. Maatrikskirjaviisis tähendaks eelnev seda, et  $[N_\alpha^\alpha K][N_L^L] = \mathbf{I}$ , kus  $\mathbf{I}$  on

<sup>13</sup>Lk. *reciprocal triads*

---

### 6.12. Pööre, pöördetensor ja deformatsiooni dekompositsioon

ühikmaatriks. Korrutame avaldisi (6.144) vastavalt vektoritega  $N_\alpha^\alpha$  ja  $n_\alpha^\alpha$ . Arvestades definitsioone (6.146) saame pöördetensorite määramiseks valemid

$$R_K^k = n_\alpha^k N_\alpha^\alpha K \quad \text{ja} \quad R_K^{-1} = N_\alpha^K n_\alpha^\alpha. \quad (6.147)$$

Pöördeta deformatsiooni (deformatsiooni, kus peateljed ei pöördu) puhul, seega

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \text{ehk} \quad R_l^k = \delta^k_l; \quad R_K^k = g^k_K; \dots \quad (6.148)$$

### 6.12.2 Mõned pöörd- ja deformatsioonitensorite vahelised seosed.

Toupin (1956) tõestas, et

- Greeni ja Cauchy deformatsioonitensorite  $n$ -ndad astmed on seotud  $\checkmark$  järgmiselt

$$C_{L}^{-nK} = R_K^{-1} n_k^k R_L^l, \quad c_l^{-nk} = R_K^k C_L^K R_L^{-1} \quad (6.149)$$

ning lisaks veel, et

$$C_{L}^{-nK} = \sum_{\alpha} (C_{\alpha}^{\alpha})^{-n} N_{\alpha}^K N_{\alpha}^{\alpha} \quad (6.150)$$

2. Deformatsioonigradiendid avalduvad kujul

$$x^k_{,K} = R^k_L \overset{\frac{1}{2}}{C}^L_K = R^l_K \overset{-\frac{1}{2}}{c}^k_l, \quad X^K_{,k} = R^{-1}K^{\frac{1}{2}}_l = R^{-1}L_k \overset{-\frac{1}{2}}{C}^K_L. \quad (6.151)$$

Viimastest omakorda

$$R^k_K = x^k_{,L} \overset{-\frac{1}{2}}{C}^L_K \quad \text{ja} \quad R^{-1}K_k = X^K_{,l} \overset{-\frac{1}{2}}{c}^k_l. \quad (6.152)$$

Saab näidata, et teiselt poolt  $x^k_{,K} = g^{kl} g^L_l (G_{KL} + U_{L;K})$ , kust  $U_{L;K} = g_{kl} g^l_{,K} - G_{KL}$ . Arvestades nüüd (6.151)<sub>1</sub>, saame, et

$$U_{L;M} = R_{KL} \overset{\frac{1}{2}}{C}^L_M - G_{KM} = R_K^L \overset{\frac{1}{2}}{C}^L_{LM} - G_{KM}. \quad (6.153)$$

Lisaks ehnenule saab tõestada seosed tensorite  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}$  ja  $\mathbf{R}$  vahel —

$$R_{KM} = \left( G_{KL} + \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \right) \overset{-\frac{1}{2}}{C}^L_M. \quad (6.154)$$

Väikeste deformatsioonigradientide puhul saame viimasest

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - G_{KM}, \quad (6.155)$$

---

6.12. Pööre, pöördetensor ja deformatsiooni dekompositsioon

6 - 72

ning arvestades (6.153) analoogi EK jaoks, et

$$\tilde{R}_{KM} \approx g^k_K g^m_M r^r_{km}. \quad (6.156)$$

### 6.12.3 Deformatsiooni dekompositsioon<sup>14</sup>

*Iga joonelemendi deformatsiooni mingis punktis võib vaadelda koosnevana kolmest osast — 1) paralleellikkest, 2) peatelgede jäigast pöördest ja 3) pikkuse muudust peatelgede sihis.*

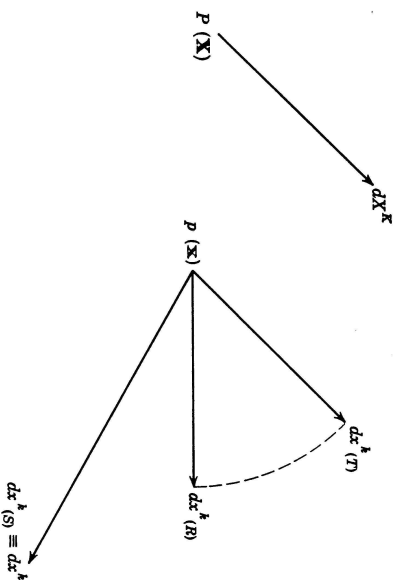
Vaatleme vektorit  $dX^K$   $\mathbf{X}$ -s, mis läheb deformatsiooni käigus vektoriks  $dx^k = x^k_{,K} dX^K$ . Kasutades seoseid (6.151)<sub>1</sub> saame

$$dx^k = g^k_L R^L_M \overset{\frac{1}{2}}{C}^M_K dX^K = \overset{-\frac{1}{2}}{c}^k_l R^l_m g^m_K dX^K. \quad (6.157)$$

Avaldisele (6.157) saab anda järgmise tõlgenduse (joonis 6.13).

---

<sup>14</sup>Tuntud ka kui pöördede põhiteoreem.



Joonis 6.13: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon

1. Vektori  $d\mathbf{X}$  lüke<sup>15</sup> (koos peatelgedega) vektoriks  $d\mathbf{x}^{(T)}$ .
2. Vektori  $d\mathbf{x}^{(T)}$  jäik pööre<sup>16</sup> (koos peatelgedega) vektoriks  $d\mathbf{x}^{(R)}$ .
3. Läbi peatelgede pikkuste muutmise<sup>17</sup> muudetakse vektor  $d\mathbf{x}^{(R)}$  vektoriks  $d\mathbf{x}^{(S)} = d\mathbf{x}$ . Täiendavat pööret ei toimu siin siis ja ainult siis kui  $d\mathbf{X}$  on paralleelne ühega tensori  $C_{KL}$  peavektoritest.

<sup>15</sup>Ik. translation<sup>16</sup>Ik. rotation<sup>17</sup>Ik. stretch

## 6.12. Pööre, pöördetensor ja deformatsiooni dekompositsioon

Valemites on eelnev esitatav kujul

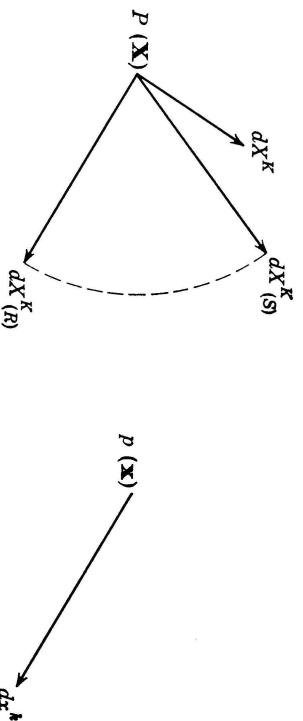
$$dx^k{}^{(T)} = g^k{}_K dX^K, \quad dx^k{}^{(R)} = R^k{}_i dx^i{}^{(T)}, \quad dx^k = \bar{c}^{\frac{1}{2}k}{}_l dx^l{}^{(R)}. \quad (6.158)$$

Kui asendame (6.158)<sub>1</sub>  $\rightarrow$  (6.158)<sub>2</sub>  $\rightarrow$  (6.158)<sub>3</sub>, siis saame (6.157).

Joonis 6.14 esitab sama protsessi teises järjekorras: pikenenine, pööre, lüke, st.,

$$dX^M{}_{(S)} = \bar{C}^{\frac{1}{2}M}{}_K dX^K, \quad dX^L{}_{(T)} = R^L{}_M dX^M{}_{(S)}, \quad dx^k = g^k{}_L dX^L{}_{(R)}. \quad (6.159)$$

Seega sellise dekompositsiooni puhul pole operatsioonide järjekord tähtis.



Joonis 6.14: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon

## 6.13 Kiirus ja kiirendus

### 6.13.1 Materiaalne tuletis

Materiaalne tuletis vektorist. *Materiaalseks tuletiseks vektorist (aja järgi)* nimetatakse operatsiooni

$$\dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{\mathbf{X}=\text{const}}. \quad (6.160)$$

Kui vektorfunktsiooni  $\mathbf{f}$  argumentideks on LK, siis langevad materiaalne tuletis ja osatuletis aja järgi kokku:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (6.161)$$

Nii leitakse materiaalsel tuletist liikumisseadusest.

---

### 6.13. Kiirus ja kiirendus

### 6 - 716

Keerukam on lugu siis, kui  $\mathbf{f}$  on avaldatud EK-s. Vaatleme vektorfunktsiooni  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f^k \mathbf{g}_k = f_k \mathbf{g}^k$ . Nüüd

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f^k \mathbf{g}_k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f^k \mathbf{g}_k) x^l, \\ \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f_k \mathbf{g}^k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f_k \mathbf{g}^k) x^l. \end{cases} \quad (6.162)$$

kuna baasivektorid  $\mathbf{g}_k$  ja  $\mathbf{g}^k$  on ajast sõltumatud, saavad valemid (6.162) kuju

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{Df^k}{Dt} \mathbf{g}_k = \frac{Df_k}{Dt} \mathbf{g}^k, \quad (6.163)$$

kus suurus

$$\frac{Df^k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f^k}{\partial t} + f^k_{;j} x^j \quad \text{ja} \quad \frac{Df_k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_k}{\partial t} + f_{k;j} x^j \quad (6.164)$$

nimetatakse *materiaalseks tuletiseks vastavalt vektori kontravariantsest ja kovariantsest komponendist*.

**Tensorite kovariantsed osatuletised.** Enne kui saab asuda materiaalse teuletiste leidmisele tensoritest tuleb sisse tuua tensorite kovariantsed osatuletised. Need on defineeritud analoogiliselt vektorite kovariantsete osatuletistega (vt. lk. 46) —

$$f^{kl}{}_{;m} = f^{kl}{}_{,m} + f^{nl} \left\{ \begin{matrix} k \\ mn \end{matrix} \right\} + f^{kn} \left\{ \begin{matrix} l \\ mn \end{matrix} \right\} \quad (6.165)$$

on *kontravariantse tensori kovariantne osatuletitis*. Analoogiliselt saab defineerida *kovariantse osatuletise segatensorit*

$$f^k{}_{l;m} = f^k{}_{,l;m} + f^n{}_l \left\{ \begin{matrix} k \\ mn \end{matrix} \right\} - f^k{}_n \left\{ \begin{matrix} n \\ lm \end{matrix} \right\} \quad (6.166)$$

ja *kovariantse osatuletise kovariantsest tensorist*

$$f_{kl;m} = f_{kl,m} - f_{nl} \left\{ \begin{matrix} n \\ km \end{matrix} \right\} - f_{kn} \left\{ \begin{matrix} n \\ lm \end{matrix} \right\}. \quad (6.167)$$

**Materiaalne teuletis tensoritest.** *Materiaalne teuletis tensorite kontravariantsetest, kovariantsetest ja segakomponentidest* on defineeritud järgmiselt —

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Df^{kl}}{Dt} = \frac{\partial f^{kl}}{\partial t} + f^{kl}{}_{;m} \dot{x}^m \\ \frac{Df_{kl}}{Dt} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial t} + f_{kl;m} \dot{x}^m \\ \frac{Df^k{}_l}{Dt} = \frac{\partial f^k{}_l}{\partial t} + f^k{}_{l;m} \dot{x}^m \end{array} \right. \quad (6.168)$$



### 6.13.2 Materiaalse punkti kiirus ja kiirendus

Kiirus

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (6.169)$$

Lagrange'i koordinaadid. Olgu siirdevektor esitatud läbi LK kujul  $\mathbf{u} = U^K \mathbf{G}_K$ , kus  $U^K = U^K(\mathbf{X}, t)$ . Nüüd

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial U^K}{\partial t} \mathbf{G}_K, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{v} = V^K \mathbf{G}_K, \quad \text{kus} \quad V^K = \frac{\partial U^K}{\partial t}. \quad (6.170)$$

Viimased avaldised esitavadki *kiiruse (kiirusvektori) Lagrange'i koordinaatides*.

**Euleri koordinaadid.** Kui siirdevektor on esitatud läbi Euleri koordinaatide, siis  $\mathbf{u} = u^k \mathbf{g}_k$ , kus  $u^k = u^k(\mathbf{x}, t)$ . Nüüd saame *kiiruse avaldised Euleri koordinaatides*:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{X}=\text{const}} = \frac{Du^k}{Dt} \mathbf{g}_k \equiv \left[ \frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k_{;j} v^j \right] \mathbf{g}_k, \quad (6.171)$$

ehk

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k, \quad \text{kus} \quad v^k = \frac{Du^k}{Dt} \equiv \frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k_{;j} v^j.$$

Seega on kiiruse- ja siirdekomponeentide vahelised seosed Euleri koordinaatide puhul ilmutamata kujul.

---

#### 6.13. Kiirus ja kiirendus

Kiirendus

*Materiaalse punkti kiirendus* on defineeritud kui tema kiirusvektori esimene tuletis aja järgi —

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (6.172)$$

*Lagrange'i koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = A^K \mathbf{G}_K, \quad A^K = \frac{\partial V^K}{\partial t} = \frac{\partial^2 U^K}{\partial t^2} \quad (6.173)$$

ning *Euleri koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{g}_k, \quad a^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k_{;i} \underbrace{v^i}_{\dot{x}^i} \quad (6.174)$$

Seega avalduvad kiirenduse komponendid nii LK-s kui EK-s ilmutatud kujul.

### 6.13.3 Deformatsioonikiiruse tensor

Materiaalne tuletis deformatsioonigradiendist  $x^k_{,K}$ .

$$\frac{D(x^k_{,K})}{Dt} = v^k_{;l} x^l_{,K}. \quad (6.175)$$

Materiaalne tuletis koordinaadi diferentsiaalset.

$$\frac{D(dx^k)}{Dt} = v^k_{;l} dx^l. \quad (6.176)$$

Euleri deformatsioonikiiruse tensor.

$$2d_{kl} = v_{l;k} + v_{l;k}, \quad (6.177)$$

Materiaalne tuletis joonelemendi ruudust

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = 2d_{kl} dx^k dx^l. \quad (6.178)$$

Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor.

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl} x^k_{,K} x^l_{,L}. \quad (6.179)$$

### 6.13. Kiirus ja kiirendus

#### 6.13.4 Elementaarruumala muutumise kiirus

Käesolevas alajaotuses leiame materiaalse tuletise EK-s esitatud elementaarruumalast  $dv$ . Alghetkel  $t_0$  on meil tahke keha (ruumiipiirkond)  $B$ , mida ümbritseb pind  $A$  ja mille ruumala on  $\mathcal{V}$ . Deformatsiooni käigus  $B \rightarrow b$ ,  $A \rightarrow a$  ja  $\mathcal{V} \rightarrow v$ .

Kasutame tähistusi

✓

$$\begin{aligned} j &= \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \right| = |x^k_{,K}|, & J &= \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = |z^k_{,K}|, \\ g &= |g_{kl}|, & G^{-1} &= |G^{KL}|. \end{aligned} \quad (6.180)$$

Pideva liikumise puhul on koordinaatteisendused  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  ja  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  teineteise ühised pöördteisendused ja  $j \neq 0$ . Kõverjoonelised koordinaadid  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{X}$  olid sissetoodud läbi DRK. Seega

$$\frac{\partial z^k}{\partial Z^K} = \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial Z^K}$$

ning jakobiaan

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \right| \cdot \left| \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \right| \cdot \left| \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right|. \quad (6.181)$$

...

$$\frac{DJ}{Dt} = Jv^k{}_{;k} \quad (6.182)$$

Kokku saame aga avaldise

$$\frac{D(dv)}{Dt} = Jv^k{}_{;k}d\mathcal{V} = v^k{}_{;k}dv, \quad (6.183)$$

mis väljendabki *elementaarruumala muutumise kiirust*.

### 6.13.5 Elementaarpinna muutumise kiirus

Materiaalne tuletis deformatsioonigradiendist  $\mathbf{X}^K{}_{,k}$ :

$$\frac{D(X^K{}_{,k})}{Dt} = -X^K{}_{,j}v^l{}_{;k} \quad (6.184)$$

Pinnaelemendi materiaalne tuletis (muutumise kiirus):

$$\frac{D(da_k)}{Dt} = v^m{}_{;m}da_k - v^m{}_{;k}da_m. \quad (6.185)$$

*6.14. Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika*

*6 - 84*

## 6.14 Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

**Joonintegraal.** Olgu  $\phi$  mingi funktsioon (näit. massi tihedus või kiirus või elektrijuh tivus vms.), mis on defineeritud üle materiaalse joone  $L$ . Vastava joonintegraali muutumise kiirus leitakse materiaalse tuletise abil:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_L \phi dx^k &= \int_L \frac{D}{Dt} (\phi dx^k) = \int_L \left[ \frac{D\phi}{Dt} dx^k + \phi \frac{D}{Dt} (dx^k) \right] = \\ &\stackrel{(6.176)}{=} \int_L [\dot{\phi} dx^k + \phi v^k{}_{;j} dx^j]. \end{aligned} \quad (6.186)$$

**Pindintegraal.** Olgu nüüd suvaline funktsioon  $\phi$  defineeritud üle materiaalse pinna  $S$ . Vastava pindintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_S \phi da_k &= \int_S \frac{D}{Dt} (\phi da_k) = \int_S \left[ \frac{D\phi}{Dt} da_k + \phi \frac{D}{Dt} (da_k) \right] = \\ &\stackrel{(6.185)}{=} \int_S [\dot{\phi} da_k + \phi (v^l{}_{;j} da_k - v^l{}_{;k} da_l)]. \end{aligned} \quad (6.187)$$

**Ruumintegraal.** Kui nüüd funktsioon  $\phi$  on defineeritud üle materiaalse mahu  $\mathcal{V}$ , siis ruumintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{D\phi}{Dt} dv + \phi \frac{D}{Dt}(dv) \right] \stackrel{(6.183)}{=} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_{:k} v^k \right) dv + \phi v^k_{:k}(dv) \right] = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\phi v^k)_{:k} \right] dv. \end{aligned} \quad (6.188)$$

Kui kasutada Greeni-Gaussi teoreemi<sup>18</sup>, siis saame viimasest

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_s \phi v^k da_k. \quad (6.189)$$

Siin on materiaalne maht  $\mathcal{V}$  asendatud fikseeritud ruumimahuga  $\nu$ , mida ümbritseb pind  $s$  ja mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga  $\mathcal{V}$ . Seega, mingi füüsikalise suuruse  $\phi$  materiaalses mahus  $\mathcal{V}$  muutumise kiirus võrdub selle suuruse  $\phi$  muutumise kiirus ruumilises mahus  $\nu$  (mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga  $\mathcal{V}$ ) pluss suuruse  $\phi v^k$  voog läbi ruumilist mahtu  $\nu$  ümbritseva pinna  $s$ .

<sup>18</sup>  $\int_{\mathcal{V}} u^k_{:k} dv = \int_s u^k da_k$ ,  $da_k = n_k da$  — tuntuud ka kui Gaussi-Ostrogradski teoreem

### 6.15. Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

6 - 86

## 6.15 Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

### 6.15.1 Keeriselisus

*(Cauchy) keeriselisuse tensor*<sup>19</sup>

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k;l} - v_{l;k}) \equiv v_{[k;l]}. \quad (6.190)$$

Kaldsümmeetrilisest tensorist  $w_{kl}$  saab omakorda konstrueerida *keerisvektori*

$$w^k = \epsilon^{klm} w_{ml} = \epsilon^{klm} v_{m;l} \text{ ehk } \mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}, \quad (6.191)$$

kus

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv \text{rot } \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{v} \text{ ja } \nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (6.192)$$

Keerisvektori kovariantsed komponendid

$$w_k = g_{kl} w^l. \quad (6.193)$$

<sup>19</sup>Ik. *vorticity tensor*. Kasutatakse ka terminit pöörlemistensor, i.k. vastavalt *spin tensor*.

### 6.15.2 Deformatsioonitensorite materiaalsed tuletised

Analoogiliselt alajaotustes 3.14.4 ja 3.16.3 esitatule avaldub Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor nüüd kujul

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl}x^k \cdot Kx^l \cdot L.$$

Ka Euleri deformatsioonikiiruse tensori  $d_{kl}$  (6.177) ja Euleri deformatsioonitensori materiaalse tuletise  $\dot{e}_{kl}$  vahelised seoste tuletuskäik on analoogiline alajaotuses 3.16.3 esitatule. Selleks leiame jällegi materiaalse tuletise deformatsiooni moodsust  $ds^2 - dS^2$

$$\frac{D}{Dt}(ds^2) = \frac{D}{Dt}(ds^2 - dS^2) \stackrel{(6.74)}{=} \frac{D}{Dt}2(e_{kl}dx^k dx^l) \stackrel{(6.176)}{=} 2(\dot{e}_{kl} + e_{ml}v^m \cdot_{;k} + e_{km}v^m \cdot_{;l}) dx^k dx^l. \quad (6.194)$$

$$d_{kl} = \dot{e}_{kl} + e_{ml}v^m \cdot_{;k} + e_{km}v^m \cdot_{;l}. \quad (6.195)$$

Arvestades Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensorite definitsioone ( $2e_{kl} = g_{kl} - c_{kl}$  ja  $2E_{KL} = C_{KL} - G_{KL}$ ) saame

$$\dot{c}_{kl} = -2\dot{e}_{kl} \quad \text{ja} \quad \dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}. \quad (6.196)$$

### 6.16. Mass

## Deformeeruva keskkonna dünaamika

### 6.16 Mass

**Pideva keskkonna mehaanika I põhiaksioom** — massi jäävuse seadus

**Globaalne massi jäävuse aksioom.** Globaalse massi jäävuse aksioomi juures muutub seoses kõverjoonelistele koordinaatidele üleminekuga vaid jakobiaani  $J$  tähistus, kuid muu jääb kõik samaks. Keskkonna kogumass on liikumisel invariantne —

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_0 d\mathcal{V} = \int_v \rho dv. \quad (6.197)$$

Kuna  $dv = Jd\mathcal{V}$ , siis saab viimase võrduse esitada nii LK-s kui EK-s —

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho_0 - \rho J) d\mathcal{V} = 0 \quad \text{või} \quad \int_v (\rho - \rho_0 J^{-1}) dv = 0, \quad (6.198)$$

kus

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}}.$$

**Lokaalse massi jäävuse aksioomi** saame kui rakendame globaalset massi jäävuse aksioomi materiaalse punkti lõpmata väikeses tibruses. Valemite (6.198) põhjal saame

$$\rho_o = \rho J = \rho \sqrt{\text{III}_C} \quad \text{või} \quad \rho = \rho_o J^{-1} = \rho_o \sqrt{\text{III}_c}. \quad (6.199)$$

Avaldisi (6.199) nimetatatakse *materiaalseteks pidevusvõrranditeks* ja nad esitatakse Lagrange'i koordinaatides (Lagrange'i kirjeldus).

Ruumilise pidevusvõrrandi (Euleri kirjeldus) saame kui esitame globaalse massi jäävuse aksioomi kujul

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv \stackrel{(6.188)}{=} \int_v \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} \right] dv = 0. \quad (6.200)$$

kust saame *ruumilist pidevusvõrrandi*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} = 0. \quad (6.201)$$

### 6.17. Liikumishulk, kineetiline moment, energia

6 - 90

## 6.17 Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Keha (mahus  $v$  sisalduva massi  $\mathfrak{M}$ ) *liikumishulk*<sup>20</sup>  $\mathcal{P}$  avaldub kujul

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} v^k(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} V^K(\mathbf{X}, t) \mathbf{G}_K(\mathbf{X}) d\mathfrak{M} \quad (6.202)$$

kusjuures baasivektorid  $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$  või  $\mathbf{G}_K(\mathbf{X})$  saab integraali ette tuua vaid sirgjooneliste koordinaatide puhul. Kuna pideva massijaotuse puhul  $d\mathfrak{M} = \rho dv$ , siis pole oluline, kas integreeritakse üle ruumala või massi. Kui korrutame liikumishulga vektori  $\mathcal{P}$  skalaarselt baasivektoriga  $\mathbf{G}^K(\mathbf{X})$  siis saame liikumishulga  $\mathcal{P}$  komponendid  $\mathcal{P}^K$  LK-s kui aga baasivektoriga  $\mathbf{g}^k(\mathbf{x})$  siis saame liikumishulga  $\mathcal{P}$  komponendid  $\mathcal{P}^k$  EK-s.

Keha (mahus  $v$  sisalduva massi  $\mathfrak{M}$ ) *kineetiline moment*<sup>21</sup>  $\mathcal{H}_o$  ruumipunkti  $o$  suhtes:

<sup>20</sup>Ik. *momentum or linear momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka terminit impulss.

<sup>21</sup>Ik. *moment of momentum or angular momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid impulsi moment ja pöördeimpulss.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{g}_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{G}_K \epsilon^{KLM} P_L V_M d\mathfrak{M} \\ &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{g}^k \epsilon_{klm} p^l v^m d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{G}^K \epsilon_{KLM} P^L V^M d\mathfrak{M}. \end{aligned} \quad (6.203)$$

Siin  $\mathbf{p} = p_k \mathbf{g}^k = p^K \mathbf{G}^K = p^K \mathbf{G}_K$  vektorikorrutised<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} \epsilon^{klm} \mathbf{g}_m &= \mathbf{g}^k \times \mathbf{g}^l, & \epsilon_{klm} \mathbf{g}^m &= \mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_l, \\ \epsilon^{KLM} \mathbf{G}_M &= \mathbf{G}^K \times \mathbf{G}^L, & \epsilon_{KLM} \mathbf{G}^M &= \mathbf{G}_K \times \mathbf{G}_L, \end{aligned} \quad (6.204)$$

Analoogiliselt eelnevaga saab leida kineetilise momendi  $\mathcal{H}_0$  komponendid EK-s  $\mathcal{H}_0^k$  ja LK-s  $\mathcal{H}_0^K$ . Lisaks saab kineetilise momendi avaldada ka bivectori kujul  $\mathcal{H}_0^{kl}$  või  $\mathcal{H}_0^{KL}$ .

Keha (mahus  $v$  sisalduva massi  $\mathfrak{M}$ ) *kineetiline energia*<sup>23</sup>

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} v^2 d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} g_{kl} v^k v^l d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} g^{kl} v_k v_l d\mathfrak{M}. \quad (6.205)$$

<sup>22</sup>Võrdle 2. pkt. valemitega, mis on esitatud DRK jaoks.

<sup>23</sup>Lk. *kinetic energy*

---

### 6.17. Liikumishulku, kineetiline moment, energia

Pideva keskkonna mehaanika II põhiaksioom — liikumishulga tasakaalu seadus

Liikumishulga globaalse tasakaalu seadus.

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F} \quad \text{ehk} \quad \dot{\mathcal{P}}^k = \mathcal{F}^k \quad \text{ehk} \quad \dot{\mathcal{P}}^K = \mathcal{F}^K. \quad (6.206)$$

Pideva keskkonna mehaanika III põhiaksioom — kineetilise momendi tasakaalu seadus

Kineetilise momendi globaalse tasakaalu seadus.

$$\dot{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{M}_0 \quad \text{ehk} \quad \dot{\mathcal{H}}_0^k = \mathcal{M}_0^k \quad \text{ehk} \quad \dot{\mathcal{H}}_0^K = \mathcal{M}_0^K. \quad (6.207)$$

Loomulikult saab viimased avaldised esitada ka kovariantsetes komponentides. Valenitega (6.206) ja (6.207) esitatud pideva keskkonna mehaanika põhiaksioome nimetatakse *Euleri liikumisseedusteks*.

Pideva keskkonna mehaanika IV põhiaksioom — energia jäävuse seadus

Samam, mis DRK korral



## 6.18 Pinge

### 6.18.1 Cauchy pingehüpotees

Valemite tuletuskäik on sama, mis oli 3. peatükis kuid nüüd on kõik kõverjoonelise tetraeedri servad kõverjoonelised (sest koordinaatsirgete asemel on nüüd koordinaatkõverad). Tulemus on analoogiline DRK-s esitatule, ainult nüüd on vaatluse all nii ko- kui kontravartsed vektorid ja vektorite komponendid:

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k \frac{da^k}{da} = \mathbf{t}_k n^k = \mathbf{t}^k n_k. \quad (6.208)$$

6.18. Pinge

6 - 94

### 6.18.2 Pingetensor

Pingetensori komponent (pingekomponent)  $t_{kl}$  on koordinaatpinnal  $x^k = \text{const}$  mõjuva pingevektori  $\mathbf{t}_k$   $l$ -is komponent, st.,

$$\mathbf{t}_k = t_{kl} \mathbf{g}^l \quad (6.209)$$

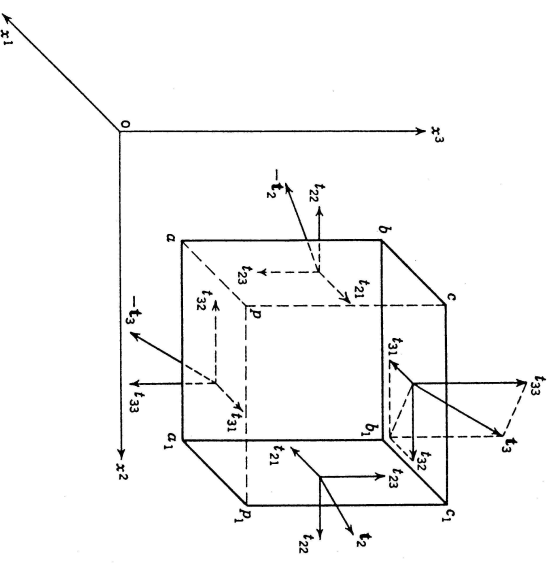
Pingevektori  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  saab nüüd avaldada kujul

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k n^k \stackrel{(6.209)}{=} t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \quad (6.210)$$

kust

$$t_{(\mathbf{n})l} = t_{kl} n^k. \quad (6.211)$$

Joonis 6.15: Pingetensor



*Punkti  $p$  läbiiva suvalisel pinnal (normaaliga  $\mathbf{n}$ ) mõjuv pingevektor  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  avaldub lineaarfunktsioonina vaadeldava punkti pingetensorist  $t_{kl}$ .*

Meetriliste tensoritega indekseid tõstes saame moodustada kontravariantseid ja segatensoreid, näiteks

$$g^{km} g^{ln} t_{mn} = g^{ln} t^k_n = t^{kl}.$$

Seega, lisaks valemile (6.209) ja (6.210), on pingektorite avaldamiseks mitmeid võimalusi —

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{(n)} = t^k m_k \mathbf{g}^l = t_l^n n^l \mathbf{g}_k = t^{lk} n_l \mathbf{g}_k = t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \\ t^k = t^k_l \mathbf{g}^l = t^{kl} \mathbf{g}_l, \quad t_k = t_k^l \mathbf{g}_l = t_{kl} \mathbf{g}^l. \end{cases} \quad (6.212)$$

## Pingetensori füüsikalised komponendid

Alajaotuses 6.8 (lk. 52) toodud valemite põhjal pingektor

$$\mathbf{t}_{(n)} = t_l^k n^l \mathbf{g}_k = t_{(l)}^{(k)} n^{(l)} \mathbf{e}_{(k)}, \quad (6.213)$$

kus

$$\mathbf{e}_{(k)} = \frac{\mathbf{g}_k}{\sqrt{g_{kk}}}, \quad n^{(l)} = n^l \sqrt{g_{ll}} \quad \text{ja} \quad t_{(l)}^{(k)} = t_l^k \frac{\sqrt{g_{kk}}}{\sqrt{g_{ll}}}. \quad (6.214)$$

Siinjuures  $t_{(l)}^{(k)}$  nimetatakse pingetensori *vasakpoolseteks füüsikalisteks komponentideks*. *Parempoolsed füüsikalised komponendid*

$$t_{(l)}^{(l)} = t^l_k \frac{\sqrt{g_{ll}}}{\sqrt{g_{kk}}}. \quad (6.215)$$

### 6.19. Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

Sümmeetrilise pingetensori ja ortogonaalsete koordinaatide puhul

$$t_{(l)}^{(k)} = t_{(k)}^{(l)} = t^k_l \sqrt{\frac{g_{kk}}{g_{ll}}} = t_k^l \sqrt{\frac{g_{ll}}{g_{kk}}} = t^{kl} \sqrt{\frac{g_{kk}}{g_{ll}}} = t_{kl} \frac{1}{\sqrt{g_{kk} g_{ll}}}. \quad (6.216)$$

## 6.19 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seaduste tuletuskäik on sama, mis DRK korral, nad omavad kuju

$$\begin{aligned} t^{jk}_{;j} + \rho (f^k - a^k) &= 0, \\ e^{ijk} t_{jk} &= 0 \end{aligned} \quad (6.217)$$

ja neid nimetatakse vastavalt *Cauchy esimeseks ja teiseks liikumisseaduseks*. ★

Avaldisest (6.217)<sub>2</sub> järeldub, et pingetensor peab olema sümmeetriline:

$$e^{ijk} t_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{jk} - t_{kj} = 0, \quad (6.218)$$

**Järeldus:** Kui liikumishulk on lokaalses tasakaalus (ning mahu- ja pinnamomendid puuduvad), on kineetiline moment lokaalses tasakaalus parajasti siis kui pingetensor on sümmeetriline.

Seega on meil vaadeldaval juhul vaid kuus sõltumatut pingekomponenti:  $t^{11}, t^{22}, t^{33}, t^{12} = t^{21}, t^{13} = t^{31}, t^{23} = t^{32}$ , st.,

$$t_{kl} = t_{lk}, \quad t^{kl} = t^{lk}, \quad t^k_l = t_l^k. \quad (6.219)$$

Arvestades avaldisi (6.219) ning tõstes ja langetades indekseid, saab anda Cauchy esimesele liikumisseadusele (6.217)<sub>1</sub> alternatiivseid kujusid —

$$\begin{cases} t^{kl}{}_{;l} + \rho (f^k - a^k) = 0, \\ t^l{}_{k;l} + \rho (f_k - a_k) = 0, \\ t_k{}^l{}_{;l} + \rho (f_k - a_k) = 0. \end{cases} \quad (6.220)$$

Enamgi veel, Cauchy liikumisseadusi on võimalik esitada ka füüsikalistes komponentides.

## 6.20 Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

Cauchy liikumisvõrrandid (6.217) on esitatud EK-s. Lagrange'i kirjelduse jaoks toome sisse pingevektori  $\mathbf{T}^K$  ruumipunktis  $\mathbf{x}$ , mis vastab deformeerumata pinnale  $dA$  materiaalses punktis  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ , nii et

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} d\mathbf{a} = \mathbf{t}^k da_k = \mathbf{T}^K dA_K. \quad (6.221)$$

Kuna  $da_k = JX^K{}_{,k} dA_K$  ja  $dA_K = J^{-1}x^k{}_{,K} da_k$  siis

$$\mathbf{t}^k = J^{-1}x^k{}_{,K} \mathbf{T}^K \quad \text{ja} \quad \mathbf{T}^K = JX^K{}_{,k} \mathbf{t}^k \quad (6.222)$$

Piola (1833, 1836 ja 1848) tõi sisse pseudopinge tensorid  $T^{Kl}$  ja  $T^{KL}$  nii, et

$$\mathbf{T}^K = T^{Kl} \mathbf{g}_l = T^{KL} x^l{}_{,L} \mathbf{g}_L = T^{KL} \mathbf{C}_L. \quad (6.223)$$

Tänapäeval on need tensorid tuntud kui *esimene ja teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor*

Seosed Cauchy pingetensoriga:

$$\begin{aligned} T^{Kl} &= JX^K{}_{,k} t^{kl}, & t^{kl} &= J^{-1}x^k{}_{,K} T^{Kl}, \\ T^{KL} &= T^{Kl} X^L{}_{,l} = JX^K{}_{,k} X^L{}_{,l} t^{kl}, & & \\ t^{kl} &= J^{-1}x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} T^{KL}, & T^{Kl} &= x^l{}_{,L} T^{KL}. \end{aligned} \quad (6.224)$$

Järgnevalt defineerime *tensori kovariantse täistuletise*. Kui  $A^{Kk} = A^{Kk}(\mathbf{X}, \mathbf{x})$ , siis kovariantne täistuletis

$$A^{Kk}{}_{;L} = \underbrace{A^{Kk}{}_{;L}}_{A^{Kk}{}_{;L}} + \underbrace{\left\{ \begin{matrix} K \\ ML \end{matrix} \right\}}_{A^{Mk}} + \underbrace{\left( A^{Kk}{}_{;l} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} A^{Km} \right)}_{A^{Kk}{}_{;l}} x^l{}_{;L}. \quad (6.225)$$

Nüüd saab avaldada Cauchy esimese liikumisseaduse läbi tensori  $T^{Kl}$  —

$$T^{Kk}{}_{;K} + T^{Kk}{}_{;l} + T^{Km} \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} x^l{}_{;K} + T^{Kk} \left\{ \begin{matrix} L \\ LK \end{matrix} \right\} + \rho_{\circ} (f^k - a^k) = 0 \quad (6.226)$$

ehk

$$T^{Kk}{}_{;K} + \rho_{\circ} (f^k - a^k) = 0.$$

Viimase puhul on arvestatud, et siin  $T^{Kk} = T^{Kk}(\mathbf{X})$ . Cauchy teine liikumisseadus saab kuju

$$T^{Kk} x^m{}_{;K} = T^{Km} x^k{}_{;K}. \quad (6.227)$$

---

6.20. Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

6 - 100

Läbi tensori  $T^{KL}$  saavad liikumisseadused (6.226) ja (6.227) kuju

$$\begin{cases} (T^{KL} x^k{}_{;K})_{;K} + \left( \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} x^m{}_{;L} x^l{}_{;K} + \left\{ \begin{matrix} M \\ MK \end{matrix} \right\} x^k{}_{;L} \right) T^{KL} + \rho_{\circ} (f^k - a^k) = 0, \\ T^{KL} = T^{LK}. \end{cases} \quad (6.228)$$

# Energia ja entroopia

## 6.21 Energia jäävuse seadus

Globaalne energia jäävuse seadus on termodünaamikas tuntud kui termodünaamika esimene seadus ja ta esitatakse kujul

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + Q, \quad (6.229)$$

kus  $Q$  on soojuse juurdevool ajaihikus, ja teda mõõdetakse samades ühikutes kui mehaanikalist võimsust  $\mathcal{W}$ . Pideva massijaotusega keskkonnas

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho v_p v^p dv \quad \text{ja} \quad \mathcal{E} = \int_{\mathcal{V}} \rho \varepsilon dv, \quad (6.230)$$

---

6.21. *Energia jäävuse seadus — termodünaamika esimene seadus*

6 - 102

kus  $\varepsilon$  on siseenergia tihedus. Mehaanikaline võimsus

$$\mathcal{W} = \int_S t^{rP} v_p da_r + \int_{\mathcal{V}} \rho f^P v_p dv. \quad (6.231)$$

Soojuse juurdevool

$$Q = \int_S q^p da_p + \int_{\mathcal{V}} \rho h dv. \quad (6.232)$$

Siin  $q^p$  on soojuse juurdevool pinnaihiku kohta ja  $h$  — keha sisellikaist toodetud soojus massiühiku kohta.

Avaldame nüüd kõik valemis (6.229) olevad liikmed läbi ruumintegraalide —

$$\dot{\mathcal{K}} = \int_{\mathcal{V}} [\rho a^p v_p dv + \underbrace{\frac{1}{2} v_p v^p \frac{D}{Dt}(\rho dv)}_{=0}], \quad \dot{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{V}} [\rho \dot{\varepsilon} dv + \varepsilon \underbrace{\frac{D}{Dt}(\rho dv)}_{=0}], \quad (6.233)$$

$$\mathcal{W} = \int_{\mathcal{V}} [t^{rP}{}_{;r} v_p + t^{rP} v_{p;r} + \rho f^P v_p] dv, \quad Q = \int_{\mathcal{V}} (q^p{}_{;p} + \rho h) dv. \quad (6.234)$$

Nüüd saame anda *globaalsele energia jäävuse seadusele* kuju

$$\int_{\mathcal{V}} [\rho \dot{\varepsilon} - t^{pP}{}_{;p} v_p - q^p{}_{;p} - \rho h] dv = \int_{\mathcal{V}} v_p (t^{rP}{}_{;r} + \rho f^P - \rho a^P) dv. \quad (6.235)$$

Lokaalse energia jäävuse seaduse saame võrdusest (6.235) kui vaatleme integraalaluseid avaldisi. Selgub, et p.p. olev integraalilume avaldis kujutab endast liikumishulga lokaalse tasakaalu seadust ja on seega võrdne nulliga. Seega, arvestades et  $t^{pr}v_{p;r} = t^{pr}d_{pr}$ , saame

$$\rho \dot{\epsilon} = t^{pr}d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h. \quad (6.236)$$

Saadud diferentsiaalvõrrand väljendab *lokaalset energia jäävuse seadust* ja teda nimetatakse ka *energia lokaalse tasakaalu diferentsiaalvõrrandiks*. Viimases avaldises esinevat mehaanikalist energiat

$$\phi = t^{pq}d_{pq} \quad (6.237)$$

nimetatakse *pinge võimsuseks*.

### 6.22. Potentsiaalne energia

## 6.22 Potentsiaalne energia

Juhtul, kus välisjõud  $f_p$  on stationaarsed saame tuua sisse *potentsiaalse energia*:

$$f_p = -U_{;p}. \quad \mathcal{U} = \int_v \rho U dv. \quad (6.238)$$

Mehaanikalise võimsuse avaldis (6.231) saab nüüd kuju

$$\mathcal{W} = \int_s t^{rp}v_p da_r - \int_v \rho U_{;p}v^p dv. \quad (6.239)$$

Kuna

$$\dot{\mathcal{U}} = \frac{D}{Dt} \int_v \rho U dv = \int_v \rho \dot{U} dv = \int_v \rho U_{;p}v^p dv. \quad (6.240)$$

siis saab avaldis (6.239) omakorda kuju

$$\mathcal{W} = \int_s t^{rp}v_p da_r - \dot{\mathcal{U}} \quad (6.241)$$

ja globaalne energia jäävuse seadus (termodünaamika esimene seadus)

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{U}} = \int_s t^{rp}v_p da_r + Q. \quad (6.242)$$

### 6.22.1 Entroopia tootmine

**Lokaalne entroopia tootmine.** Kasutame lokaalset energia jäävuse seadust (6.236) ja järeldust Gibbs'i võrrandist ( $de = \vartheta d\eta + \tau^\alpha d\nu_\alpha$ ):

$$\rho \dot{\varepsilon} = t^{pr} d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h, \quad \dot{\varepsilon} = \vartheta \dot{\eta} + \tau^\alpha \dot{\nu}_\alpha.$$

Kui elimineerida viimasest  $\dot{\varepsilon}$  ning arvestada, et entroopia tootmine on seotud vaid pingetensori dissipatiivse osaga, saame *lokaalse entroopia tootmise võrrandi*

$$\rho \vartheta \dot{\eta} = D t^{pr} d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h - \rho \tau^\alpha \dot{\nu}_\alpha. \quad (6.243)$$

**Globaalne entroopia tootmine.** Vastav võrrand saadakse kui integreerida lokaalset entroopia tootmise avaldist (6.243) (avaldades elnevalt  $\rho \dot{\eta}$ ) üle mahu  $\mathcal{V}$  ning kasutada seoseid

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\eta} d\nu = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \eta d\nu = \dot{H} \quad (6.244)$$

ja

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\vartheta} q^p{}_{;p} d\nu = \int_{\mathcal{V}} \left[ \left( \frac{q^p}{\vartheta} \right)_{;p} + \frac{q^p \vartheta_{;p}}{\vartheta^2} \right] d\nu = \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \frac{q^p \vartheta_{;p}}{\vartheta^2} d\nu. \quad (6.245)$$

### 6.22. Potentsiaalne energia

### 6 - 106

Globaalne entroopia tootmise võrrand avaldub seejärel kujul

$$\dot{H} = \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \left( \Delta + \frac{\rho h}{\vartheta} \right) d\nu, \quad (6.246)$$

kus

$$\Delta = \frac{1}{\vartheta} \left[ D t^{pr} d_{rp} + q^p (\ln \vartheta)_{;p} - \rho \tau^\alpha \dot{\nu}_\alpha \right]. \quad (6.247)$$

Seega entroopia muutust põhjustavad: 1) entroopia juurdevool  $q^p/\vartheta$  läbi keha pinna ja 2) entroopia tootmine keha sees.

### 6.22.2 Entroopia seadus — termodünaamika teine seadus

**Globaalne entroopia seadus.** Eksperimentaalsete tulemuste põhjal on teada, et soojusallikatest vaba süsteem tarbib mehaanikalist tööd st.,

$$\Delta \geq 0. \quad (6.248)$$

Seega valemite (6.246)–(6.248) põhjal

$$\dot{H} \geq \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho h}{\vartheta} d\nu. \quad (6.249)$$



Avaldis (6.249) väljendab *globaalset entroopia seadust* — summaarse entroopia juurdekasv on suurem-võrdne läbi keha pinnal toimuva entroopia juurdevoolu ja keha siseallikaist toodetud entroopia summast.<sup>24</sup>

**Lokaalne entroopia seadus.** Selleks et saada termodünaamika teist seadust lokaalsel kujul, minnakse avaldises (6.249) Greeni-Gaussi teoreemi abil üle ruumintegraalile. Arvestades (6.244)

$$\int_V \left\{ \rho \dot{\eta} - \left( \frac{q^k}{\vartheta} \right)_{;k} - \frac{\rho h}{\vartheta} \right\} dv \geq 0, \quad (6.250)$$

kust globaalse võrratuse lokaliseerimise tulemusena saame *lokaalse entroopia seaduse*

$$\rho \dot{\eta} - \left( \frac{q^k}{\vartheta} \right)_{;k} - \frac{\rho h}{\vartheta} \geq 0. \quad (6.251)$$

Ellimineerime nüüd lokaalse energia jäävuse seaduse abil lokaalsest entroopia-seadusest kehasisest allikast toodetud soojuse  $h$ . Kasutades samasusi (6.245)

---

<sup>24</sup>Erinngeni (1962) põhjal nimetatakse (6.249) Clausiuse-Duhemi võrratuseks. Tavaliselt esitatakse nimetatud võrratus siiski lokaalsel kujul.

saame *Clausiuse-Duhemi võrratuse*

$$\rho \left( \dot{\eta} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\vartheta} \right) + \frac{1}{\vartheta} t^{kl} d_{kl} + \frac{1}{\vartheta^2} q^k \vartheta_{;k} \geq 0, \quad (6.252)$$

mis väljendab samuti lokaalset entroopia seadust.

Võrratusele (6.252) saab anda alternatiivse kuju, tuues sisse *Helmholtzi vaba energia tiheduse*

$$\psi = \varepsilon - \vartheta \eta. \quad (6.253)$$

Funktsioon  $\psi$  väljendab seda osa siseenergiast, mis on võimeline tegema mehaanikalist tööd. Avaldades nüüd avaldisest (6.253) siseenergia tiheduse  $\varepsilon$ , saame anda võrratusele (6.252) kuju

$$-\rho \left( \dot{\psi} + \eta \dot{\vartheta} \right) + t^{kl} d_{kl} + \frac{1}{\vartheta} q^k \vartheta_{;k} \geq 0. \quad (6.254)$$

Võrratused (6.252) ja (6.254) peavad kehtima kõikide termomehaanikaliste protsesside puhul.