Peatükk 4

Deformeeruva keskkonna dünaamika

Dünaamika on mehaanika osa, mis uurib materiaalsete keskkondade liikumist välismõjude (välisjõudude) toimel. Uuritavaks materiaalseks keskkonnaks võib olla nii tahke keha, gaas kui vedelik. Üheks vaadeldavaid materiaalseid keskkondi iseloomustavaks suuruseks on *inerts*. Inertsi mõõduks on mass.

4.1 Mass

Mass on positiivne suurus, mis on invariantne liikumise suhtes. Tema dimensioon M ei sõltu ei pikkuse dimensioonist L ega aja dimensioonist T. Kui mass on absoluutselt pidev, siis leidub funktsioon ρ, mida nimetatakse *massi tiheduseks*. Sel juhul keha kogu mass √

$$\mathfrak{M} = \int_{v} \rho dv. \tag{4.1}$$

Kui mass pole pidev üle kogu ruumala v, siis

$$\mathfrak{M} = \int_{v_1} \rho dv + \sum_{\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha}, \tag{4.2}$$

kus v_1 on pideva massijaotusega piirkond. •

Edaspidi vaatleme vaid pideva massijaotusega keskkondi, st., et igas (elementaar)mahus on etteantud massi tihedus ning kui $v \to 0$, siis $\mathfrak{M} \to 0$ — seega $0 < \rho < \infty$.

Pideva keskkonna mehaanika I põhiaksioom — massi jäävuse seadus

Globaalne massi jäävuse aksioom: keskkonna kogumass on liikumisel invariantne —

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_0 d\mathcal{V} = \int_{\upsilon} \rho d\upsilon. \tag{4.3}$$

Kuna $d\upsilon = jd\mathcal{V}$, kus

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \right| = \sqrt{\mathrm{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{III}_c}},$$

siis saab viimase võrduse esitada nii LK-s kui EK-s —

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho_0 - \rho j) d\mathcal{V} = 0 \quad \text{või} \quad \int_{\upsilon} (\rho - \rho_0 j^{-1}) d\upsilon = 0. \tag{4.4}$$

Lokaalse massi jäävuse aksioomi saame kui rakendame globaalset massi jäävuse aksioomi materiaalse punkti lõpmata väikeses ümbruses. Valemite (4.4) põhjal saame

$$\rho_0 = \rho j = \rho \sqrt{\mathrm{III}_C} \quad \text{või} \quad \rho = \rho_0 j^{-1} = \rho_0 \sqrt{\mathrm{III}_c}. \tag{4.5}$$

Avaldisi (4.5) nimetatakse *materiaalseteks pidevusvõrranditeks* ja nad esitatakse Lagrange'i koordinaatides (Lagrange'i kirjeldus).

Ruumilise pidevusvõrrandi (Euleri kirjeldus) saame kui esitame globaalse massi jäävuse aksioomi kujul

$$\frac{D}{Dt} \int_{\upsilon} \rho d\upsilon = \int_{\upsilon} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} \right] d\upsilon = 0. \tag{4.6}$$

Viimase põhjal avaldub lokaalne massi jäävuse aksioom kujul

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0, \tag{4.7}$$

mis kujutabki endast *ruumilist pidevusvõrrandit*.

Avaldised (4.5) ja (4.7) esitavad ühe ja sama nähtuse kaht erinevat kirjeldust — (4.5) on mugavam kasutada tahke keha mehaanikas, (4.7) aga vedelike ja gaaside puhul.

4.2 Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Keha (mahus υ sisalduva massi $\mathfrak{M}$) *liikumishulk*[1] $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ on defineeritud kujul

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{x},t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v} d\mathfrak{M}. \tag{4.8}$$

Euleri ja Lagrange koordinaatides avaldub liikumishulk vastavalt kujul

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{i}_k \int_{\mathfrak{M}} v_k(\mathbf{x},t) d\mathfrak{M} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{I}_K \int_{\mathfrak{M}} V_K(\mathbf{X},t) d\mathfrak{M}, \tag{4.9}$$

kusjuures baasivektorid $\mathbf{i}_k$ ja $\mathbf{I}_K$ saab integraali ette tuua vaid seetõttu, et me kasutame sirgjoonelisi koordinaate. Kuna pideva massijaotuse puhul $d\mathfrak{M} = \rho d\upsilon$, siis pole oluline, kas integreeritakse üle ruumala või massi. On selge, et liikumishulga $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ komponendid

$$\mathcal{P}_k(\mathbf{x},t) = \int_{\mathfrak{M}} v_k(\mathbf{x},t) d\mathfrak{M} \quad \text{ja} \quad \mathcal{P}_K(\mathbf{X},t) = \int_{\mathfrak{M}} V_K(\mathbf{X},t) d\mathfrak{M}. \tag{4.10}$$

[1] I.k. *momentum or linear momentum.* Eesti keeles kasutatakse ka terminit impulss.

Keha (mahus υ sisalduva massi $\mathfrak{M}$) *kineetiline moment*[2] $\boldsymbol{\mathcal{H}}_o$ ruumipunkti o suhtes

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_o \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \mathbf{i}_k \int_{\mathfrak{M}} e_{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \tag{4.11}$$

Analoogiliselt eelnevaga saame ka kineetilise momendi komponendid esitada nii EK-s kui LK-s[3] —

$$\mathcal{H}^o_k = \int_{\mathfrak{M}} e_{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}, \qquad \mathcal{H}^o_K = \delta_{Kk} \int_{\mathfrak{M}} e_{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \tag{4.12}$$

Lisaks saab kineetilise momendi avaldada ka bivektori kujul

$$\mathcal{H}^o_{kl} = \int_{\mathfrak{M}} (p_k v_l - p_l v_k) d\mathfrak{M}, \qquad \mathcal{H}^o_{KL} = \delta_{Kk}\delta_{Ll} \int_{\mathfrak{M}} (p_k v_l - p_l v_k) d\mathfrak{M}. \tag{4.13}$$

[2] I.k. *moment of momentum or angular momentum.* Eesti keeles kasutatakse ka termineid impulsi moment ja pöördeimpulss.

[3] Siin $\boldsymbol{\mathcal{H}}_o = \mathcal{H}^o_K \mathbf{I}_K = \mathcal{H}^o_k \mathbf{i}_k$

Pideva keskkonna mehaanika II põhiaksioom — liikumishulga tasakaalu seadus[4]

Liikumishulga muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude peavektoriga[5] —

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{P}}} = \boldsymbol{\mathcal{F}} \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt}\int_{\mathfrak{M}} v_k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}_k \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt}\int_{\mathfrak{M}} \delta_{Kk} v_k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}_K. \tag{4.14}$$

[4]I.k. *principle of balance of momentum*

[5]Siin ja edaspidi võib nii Kroneckeri deltad kui permutatsioonisümbolid tuua integraali ette.

Pideva keskkonna mehaanika III põhiaksioom — kineetilise momendi tasakaalu seadus[6]

Kineetilise momendi muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude peamomendiga (mõlemad momendid peavad olema võetud ühe ja sama ruumipunkti suhtes)—

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_o = \boldsymbol{\mathcal{M}}_o \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt}\int_{\mathfrak{M}} \delta_{Kk} e_{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}^o_K \quad \text{ehk} \\
&\frac{D}{Dt}\int_{\mathfrak{M}} \delta_{Kk}\delta_{Ll}(p_k v_l - p_l v_k) d\mathfrak{M} = \mathcal{M}^o_{KL} \quad \text{ehk} \\
&\frac{D}{Dt}\int_{\mathfrak{M}} e_{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}^o_k \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt}\int_{\mathfrak{M}} (p_k v_l - p_l v_k) d\mathfrak{M} = \mathcal{M}^o_{kl}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Valemitega (4.14) ja (4.15) esitatud pideva keskkonna mehaanika põhiaksioome nimetatakse *Euleri liikumisseadusteks* ning nad kujutavad endast Newtoni seaduste laiendust punktmassilt keskkonnale.

[6]I.k. *principle of balance of moment of momentum*

Pideva keskkonna mehaanika IV põhiaksioom — energia jäävuse seadus[7]

Keha (mahus υ sisalduva massi $\mathfrak{M}$) *kineetiline energia*[8]

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{M}} v^2 d\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\delta_{kl}\int_{\mathfrak{M}} v_k v_l d\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{M}} v_k v_k d\mathfrak{M}. \tag{4.16}$$

Energia jäävuse seadus. Kineetilise ja siseenergia summa muutumise kiirus võrdub välisjõudude töö ja keskkonda sisse tulnud või sealt lahkunud energiate summa muutumise kiirusega —

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + \sum_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}. \tag{4.17}$$

Siin $\mathcal{K}$ on kineetiline energia, $\mathcal{E}$– siseenergia, $\mathcal{W}$– välisjõudude töö ajaühikus ja $\mathcal{U}_{\alpha}$ – ajaühikus muundunud energiate mehaanikaline ekvivalent. *Seega eeldame, et energiad on aditiivsed*.

Suurused $\mathcal{K}$, $\mathcal{W}$ ja $\mathcal{U}_{\alpha}$ on selgelt määratletavad, siseenergia $\mathcal{E}$ on aga

[7] I. k. *principle of conservation of energy*

[8] I.k. *kinetic energy*

ebamäärasem ja teda võib vaadelda kui võrrandi (4.17) tasakaalustavat liiget. Ta on nn. oleku funktsioon ja sõltub olekut väljendavatest muutujatest[9].

Kui on teada siseenergia tihedus ε (ühikmassi kohta), siis

$$\mathcal{E} = \int_{\mathfrak{M}} \varepsilon d\mathfrak{M} \equiv \int_{\upsilon} \rho\varepsilon d\upsilon. \tag{4.18}$$

[9] I.k. *constitutive variables*

4.3 Pinge

4.3.1 Sise- ja välisjõud

Materiaalne keha deformeerub sise- ja välisjõudude[10] toimel. Jõudude päritolu võib olla väga mitmesugune — mehaanikaline, elektriline, keemiline jne. jne. Punktmassi ja jäiga keha mehaanikas vaadeldakse jõudusid, mis võivad sõltuda vaid ajast, punkti asukohast ja kiirusest, st., $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t)$. Pideva keskkonna mehaanikas me sellist piirangut ei sea ja jõud võib sõltuda lisaks eeltoodule ka näiteks deformatsioonigradiendist, kõrgemat järku tuletistest aja järgi, elektromagnetilistest muutujatest jne. Klassikalises mehaanikas jõudu tavaliselt väga täpselt ei defineerita. Staatika ja dünaamika kursustes jaotatakse jõud tavaliselt sise- ja välisjõududeks. Pideva keskkonna vaatepunktist lähtudes võib jõud jagada kolme kategooriasse.

[10]I.k. *internal and external loads*

1. *Välised mahu- ehk massijõud* [11] mõjuvad keha või keskkonda moodustavatele materiaalsetele punktidele (masspunktidele). Näiteks gravitatsiooni jõud või elektrostaatilised jõud. Summaarne jõud saadakse integreerimisel üle kogu ruumala v. Siin eeldatakse, et on teada jõu tihedus ühikmassi või ühikruumala kohta.
2. *Välised pinna- ehk kontaktjõud* [12] on põhjustatud teiste kehade või keskkondade mõjust kokkupuutepinnal. Siin eeldatakse, et on teada pinnaühikule mõjuv jõud. Näiteks hüdrostaatilise rõhu mõju vette asetatud keha pinnale.
3. *Sisejõud* [13] on põhjustatud vaadeldavat keha moodustavate materiaalsete punktide omavahelisest mõjust. Newtoni III seaduse põhjal mõjutavad kaks masspunkti teineteist võrdvastupidiste jõududega — seega on kõigi sisejõudude summa null. Dünaamika kursuses näidati, et ka kõigi sisejõudude peamoment on null. Punktmasside vahelised jõud (sisejõud) muutuvad pinnajõududeks kui me isoleerime (mõtteliselt) keskkonna või keha ühe osa ülejäänust. See annab pingehüpoteesi, mida vaatleme järgmises alajaotuses.

[11]I.k. *extrinsic volume loads or extrinsic body loads*
[12]I.k. *extrinsic surfice loads or contact loads*
[13]I.k. *mutual or internal loads*

Allpool kasutame välisjõudude ja -momentide jaoks järgmisi tähistusi:

$\mathbf{f}$ — massijõud (jõud massiühiku kohta),
$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ — pinnajõud (jõud pinnaühiku kohta vaadeldavat punkti läbival pinnal normaaliga $\mathbf{n}$),
$\boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha$ — punktis $\mathbf{p}_\alpha$ mõjuv koondatud jõud,
$\mathbf{m}$ — massimoment (moment massiühiku kohta),
$\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ — pinnamoment (moment pinnaühiku kohta vaadeldavat punkti läbival pinnal normaaliga $\mathbf{n}$),
$\boldsymbol{\mathcal{M}}_\alpha$ — punktis $\mathbf{p}_\alpha$ mõjuv jõupaari moment.

Seega, kehale mõjuva jõusüsteemi peavektor

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f}\, d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da + \sum_\alpha \boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha \tag{4.19}$$

ja peamoment

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_o = \int_{\mathfrak{M}} [\mathbf{m} + \mathbf{p} \times \mathbf{f}]\, d\mathfrak{M} + \int_s \left[\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} + \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}\right] da + \\ + \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha \times \boldsymbol{\mathcal{F}}_\alpha + \sum_\beta \boldsymbol{\mathcal{M}}_\beta. \tag{4.20}$$

Märkused:

- Koondatud jõudusid defineeritakse tihti kui piirjuhte pinna- või mahujõududest. Selline käsitlus võib aga mõnikord põhjustada matemaatilisi raskusi ning vajab seetõttu täiendavate tingimuste kasutamist. Näiteks, et vältida määramatusi rakendatakse lokaalseid teoreeme ja printsiipe vaid punktides, kus ei mõju koondatud jõudusid. Globaalsete teoreemide puhul sellist probleemi pole. √
- Tavatingimuste ja -keskkondade korral on pinna- ja mahumomentide eksisteerimine üldjuhul üpris harukordne.

Eeltoodust lähtudes vaadeldakse antud kursuses edaspidi eeskätt vaid jaotatud jõudusid (massijõudusid ja pinnajõudusid) ja nende põhjustatud momente.

Teisisõnu, reeglina esitatakse jõusüsteemi peavektor kujul

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da \tag{4.21}$$

ja peamoment kujul

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_o = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da. \tag{4.22}$$

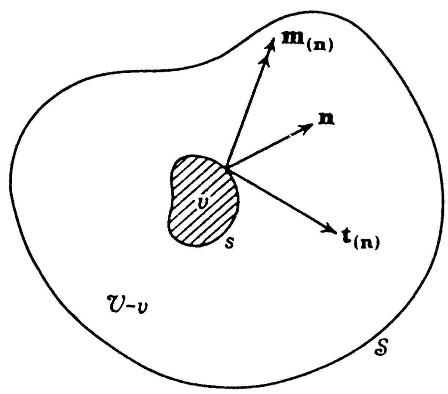
Arvestades avaldisi (4.21) ja (4.22) saavad liikumishulga ja kineetilise momendi globaalse tasakaalu seadused (4.14) ja (4.15) kuju

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\mathcal{P}}} &\overset{(4.8)}{=} \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da, \\
\dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_o &\overset{(4.11)}{=} \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \\
&= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Neid võrrandeid nimetatakse *Euleri liikumisvõrrandeiks* (nagu oli juba eespool kirjas). Kuna sisejõud on tasakaalus, siis nemad neis võrrandeis ei esine.

4.3.2 Cauchy pingehüpotees

Pinnal Δa mõjub keskmine jõud $\Delta\boldsymbol{\mathcal{F}}$ ja keskmine moment punkti p suhtes $\boldsymbol{\mathcal{M}}_p$. Kui $\Delta a \to 0$, siis suhe $\Delta\boldsymbol{\mathcal{F}}/\Delta a \to \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$. Kui vaadeldavas protsessis moment † punkti p suhtes ei lähene nullile, siis saame ka suuruse $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$.

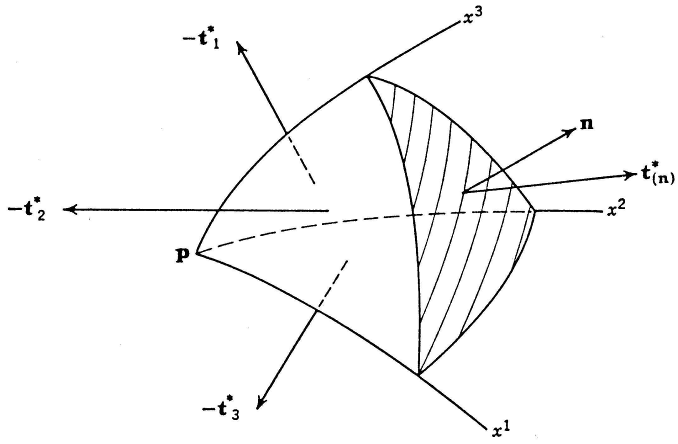


Joonis 4.1: Pinge ja momentpinge

Vaatleme väikest ruumipiirkonda v, mis on ümbritsetud pinnaga s ja mis asub täielikult kehas mahuga $\mathcal{V}$ ja pinnaga S (joonis 4.1). Punktis p, mis asub pinnal s on välisnormaal $\mathbf{n}$ ning mõjuvad jõud $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ ja moment $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ pinnaühiku kohta. Mõlemad nad on põhjustatud mahtude v ja $\mathcal{V} - v$ koosmõjust pinnal s. Suurust $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ nimetatakse *pingeks* ehk *pingevektoriks* ja suurust $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ *momentpingeks* ehk *momentpingevektoriks*[14]. Nad iseloomustavad vaadeldava mahu v välispinnal s mõjuvat väliskoormust, mis ei sõltu ainult vaadeldava punkti kohavektorist $\mathbf{p}$ vaid ka pinnanormaalist $\mathbf{n}$.

[14] I.k. *couple stress*

Vaatleme lõpmata väikest kõverjoonelist tetraeedrit (joonis 4.2), mille tipp p asub vaadeldava piirkonna v sees ja mille kolm tahku on koordinaatpinnad ning neljas asub pinnal s. Koordinaatpinnal $x_i = const.$ mõjuva keskmise pinge tähistame $-\mathbf{t}_i^*$. Kasutame vaadeldava tetraeedri jaoks liikumishulga tasakaalu seadust (integreerimisel on rakendatud keskväärtusteoreeme) —



Joonis 4.2: Tetraeeder

√ † ‡

$$\frac{d}{dt}\left(\rho \mathbf{v}^* \Delta v\right) = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}^* \Delta a - \mathbf{t}_k^* \Delta a_k + \rho \mathbf{f}^* \Delta v. \tag{4.24}$$

Siin Δv on tetraeedri ruumala, Δa ja Δa_k – tetraeedri tahkude pindalad, $\mathbf{v}^*$ – tetraeedri punktide keskmine kiirus ning $\mathbf{f}^*$ – keskmine mahujõud. •

Jagame nüüd viimase avaldise Δa ja laseme $\Delta a \to 0$ nii, et punkt p läheneb

pinnale s mahu v seest. Kuna $\Delta v / \Delta a \to 0$, siis piiril saame

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k \frac{da_k}{da} = \mathbf{t}_k n_k, \tag{4.25}$$

sest teatavasti elementaarpind $d\mathbf{a} = \mathbf{n} da = da_k \mathbf{i}_k$ ja $da_k = n_k da$. ⋆

Kokkuvõttes oleme seega tõestanud **teoreemi** — *pingevektor punkti p läbival pinnal ühiknormaaliga* $\mathbf{n}$ *on lineaarfunktsioon seda punkti läbivatel koordinaatpindadel mõjuvatest pingevektoritest* $\mathbf{t}_k$. *Selle lineaarfunktsiooni kordajateks on pinnanormaali* $\mathbf{n}$ *suunakoosinused n_k.* †

Pingevektorid $\mathbf{t}_k$ ei sõltu pinnanormaalist $\mathbf{n}$. Eeldades, et $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ on pidev funktsioon normaalist $\mathbf{n}$ ja võttes valemis (4.25) $\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ saame

$$\mathbf{t}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}, \tag{4.26}$$

st., punktis p mõjuvad sama pinna vastaskülgedel võrdvastupidised pingevektorid. Rakendades analoogilist mõttekäiku ka momentpingetele, saame

$$\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{m}_k n_k = \mathbf{m}_k n_k \;\text{ ja }\; \mathbf{m}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}. \tag{4.27}$$

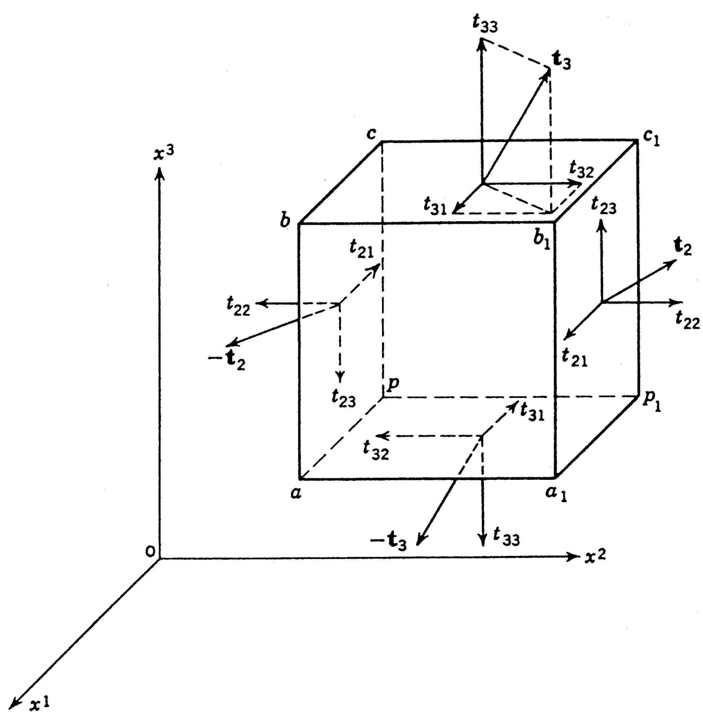
Chauchy pingehüpoteesi sisu: Pinge sõltub vaid pinnanormaalist, mitte aga pinna kujust. Selgitus: vaadeldavas piirprotsessis $\Delta a \to 0$ ei oma pinna kuju mitte mingit tähtsust.

4.3.3 Pingetensor

Pingetensori komponent (pingekomponent) t_{kl} on koordinaatpinnal $x_k = const$ mõjuva pingevektori $\mathbf{t}_k$ l-is komponent, st.,

$$\mathbf{t}_k = t_{kl}\mathbf{i}_l \tag{4.28}$$

Seega näitab esimene indeks koordinaatpinda, millel pingevektor $\mathbf{t}_k$ mõjub ja teine indeks vaadeldava komponendi mõjumise suunda. Pingekomponentide positiivsed suunad on näidatud joonisel 4.3. Pingetensori normaalkomponente $k = l$ nimetatakse *normaalpingeteks*[15] ja segakomponente $k \neq l$ *nihkepingeteks*[16].



Joonis 4.3: Pingetensor

[15] I.k. *normal stress*
[16] I.k. *shear stress*

Pingevektori $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ saab nüüd avaldada kujul

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k n_k \overset{(4.28)}{=} t_{kl} n_k \mathbf{i}_l, \tag{4.29}$$

kust

$$t_{(\mathbf{n})l} = t_{kl} n_k. \tag{4.30}$$

Seega oleme tõestanud teoreemi — *punkti p läbival pinnal normaaliga $\mathbf{n}$ mõjuv pingevektor $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ avaldub lineaarfunktsioonina vaadeldava punkti pingetensorist t_{kl}.*

Erinevate autorite erinevaid tähistusi pingetensori jaoks

t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}	Eringen, Truesdell
A	B	C	D	E	F	Cauchy varasemad tööd
p_{xx}	p_{yy}	p_{zz}	p_{yz}	p_{zx}	p_{xy}	Cauchy hilisemad tööd, St. Venant, Maxwell
X_x	Y_y	Z_z	Y_z	Z_x	X_y	F.Neumann, Kirchhoff, Love
P	Q	R	S	T	V	Kelvin
$\widehat{xx}$	$\widehat{yy}$	$\widehat{zz}$	$\widehat{yz}$	$\widehat{zx}$	$\widehat{xy}$	K. Pearson
σ_x	σ_y	σ_z	τ_{yz}	τ_{zx}	τ_{xy}	Kármán, Timošenko, insenerid
τ_{11}	τ_{22}	τ_{33}	τ_{23}	τ_{31}	τ_{12}	Green, Zerna, Vene ja Saksa autorid
σ_{11} σ_{xx}	σ_{22} σ_{yy}	σ_{33} σ_{zz}	σ_{23} σ_{yz}	σ_{31} σ_{zx}	σ_{12} σ_{xy}	Mõned Inglise ja Ameerika autorid ning teised

4.4 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

Lähtume valemeist (4.23), st. liikumishulga ja kineetilise momendi globaalse tasakaal seadustest

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x},t)d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f}d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}da,$$
$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p}\times\mathbf{v}d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p}\times\mathbf{f}d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p}\times\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}da$$

ning leiame vasakul poolel olevad materiaalsed tuletised.[17] Saame √

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{M}} \mathbf{a}d\mathfrak{M} &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f}d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}da,\\ \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p}\times\mathbf{a}d\mathfrak{M} &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p}\times\mathbf{f}d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p}\times\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}da.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Need on valemite (4.23) alternatiivsed kujud. Vaatleme nüüd väikest mahtu dv, mis asub mahu $\mathcal{V}$ sees ja kus on pidev massijaotus. Kasutades valemeid (4.25) saame viimastest

[17] $d\mathfrak{M} = \rho\, dv = \text{const.}$

$$\begin{aligned} \int_v \mathbf{a}\rho dv &= \int_v \mathbf{f}\rho dv + \int_s \mathbf{t}_k n_k da, \\ \int_v \mathbf{p}\times\mathbf{a}\rho dv &= \int_v \mathbf{p}\times\mathbf{f}\rho dv + \int_s \mathbf{p}\times\mathbf{t}_k n_k da. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Kasutades Greeni-Gaussi teoreemi[18] saame üle minna pindintegraalilt ruumintegraalile

$$\begin{aligned} &\int_v \left[\mathbf{t}_{k,k} + \rho\left(\mathbf{f}-\mathbf{a}\right)\right] dv = 0, \\ &\int_v \left\{\mathbf{i}_k\times\mathbf{t}_k + \mathbf{p}\times\left[\mathbf{t}_{k,k} + \rho\left(\mathbf{f}-\mathbf{a}\right)\right]\right\} dv = 0. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Viimaste valemite tuletamisel on arvestatud, et $\mathbf{p}_{,k} = \mathbf{i}_k$. Valemid (4.33) kehtivad suvalise mahu v jaoks kui integraalide alused avaldised on nullid, st.,

$$\mathbf{t}_{k,k} + \rho\left(\mathbf{f}-\mathbf{a}\right) = 0, \qquad \mathbf{i}_k\times\mathbf{t}_k = 0. \tag{4.34}$$

Need võrrandid väljendavadki *liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadust*. Valemi $(4.34)_2$ saamiseks on kasutatud valemit $(4.34)_1$.

[18]siin kasutame teda kujul $\int_s \mathbf{t}_k n_k da = \int_v \mathbf{t}_{k,k} dv$ ja $\int_s \mathbf{p}\times\mathbf{t}_k n_k da = \int_s \left(\mathbf{p}\times\mathbf{t}_k\right) n_k da = \int_v \left(\mathbf{p}\times\mathbf{t}_k\right)_{,k} dv$

Valemi (4.28) põhjal $\mathbf{t}_k = t_{kl}\mathbf{i}_l$. Asendades selle võrranditesse (4.34) ning arvestades, et $\mathbf{i}_k\times\mathbf{i}_l = e_{klm}\mathbf{i}_m$ saame esitada liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused komponentkujul (koordinaatkujul) —

$$t_{lk,l} + \rho\left(f_k - a_k\right) = 0, \qquad t_{kl} = t_{lk}. \tag{4.35}$$

Võrrand $(4.35)_2$ on saadud avaldisest $e_{ijk}t_{jk} = 0$.

Äsjatuletatud lokaalse tasakaalu seadusi kujul (4.34) või kujul (4.35) nimetatakse vastavalt *Cauchy esimeseks ja teiseks liikumisseaduseks.* [19]

Avaldisest $(4.35)_2$ järeldub, et pingetensor peab olema sümmeetriline — seega on meil vaadeldaval juhul vaid kuus sõltumatut pingekomponenti: $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{12} = t_{21}, t_{13} = t_{31}, t_{23} = t_{32}$.

Järeldus: Kui liikumishulk on lokaalses tasakaalus ning mahu- ja pinnamomendid puuduvad, on kineetiline moment lokaalses tasakaalus parajasti siis kui pingetensor on sümmeetriline.

Ülesanne 4.4.1. *Kirjutada valemid* (4.35) *lahti nii DRK x_i kui x, y, z korral.*

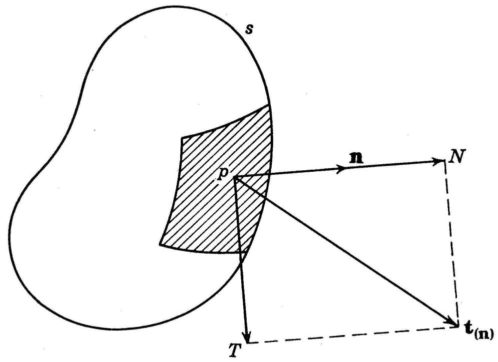
[19]Eringen võtab saadud tulemused kokku kahe teoreemina.
Teoreem 1 Liikumishulga lokaalse tasakaalu tarvilik ja piisav tingimus on esitatav kujul $(4.35)_1$ või $(4.34)_1$.
Teoreem 2 Kineetilise momendi lokaalse tasakaalu tarvilik ja piisav tingimus esitatakse kujul $(4.35)_2$ või $(4.34)_2$, tingimusel, et liikumishulk on lokaalses tasakaalus.

4.5 Peapinged ja pingetensori invariandid

4.5.1 Cauchy pingepinnad

Vaatleme pingevektorit $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$, mis mõjub punktis p pinnal S. Kui $\mathbf{n}$ on pinna s välisnormaal, siis pingevektori $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ normaalkomponent

$$N = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{n} \overset{(4.30)}{=} t_{kl} n_k n_l. \qquad (4.36)$$



Joonis 4.4: Normaal- ja tangentsiaalpinge

Kui fikseerime N väärtuse ja muudame pinna orientatsiooni, siis selleks, et (4.36) oleks rahuldatud, peab muutuma pingetensor t_{kl}. Sel juhul esitab (4.36) teist järku pinda pingete ruumis. Seda pinda nimetatakse Cauchy pingepinnaks (analoogiliselt Cauchy deformatsiooniellipsoidiga).

4.5.2 Peapinged, pingetensori peasuunad ja invariandid

Kui massi- ja pinnamomendid puuduvad, siis on pingetensor t_{kl} sümmeetriline. Seega kehtivad tema kohta samad seaduspärasused, mis deformatsioonitensorite kohta:

(i) pingetensoril leidub vähemalt kolm peasuunda;

(ii) pingetensoril leidub kolm peapinget, $t_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$, mis mõjuvad peapindadel;

(iii) peapindadel on nihkepinged nullid;

(iv) pingetensoril leidub kolm sõltumatut invarianti I_t, II_t ja III_t, mille leidmise eeskirjad, läbi pingetensori t_{kl} või peaväärtuste t_α, on analoogilised Greeni deformatsioonitensori C_{KL} invariantide leidmise eeskirjadele (vt. 3. ptk.)

4.5.3 Pinguse (pingeoleku) erijuhud

Analoogiliselt deformatsioonide erijuhtudele saame eristada ka pinguse erijuhte.

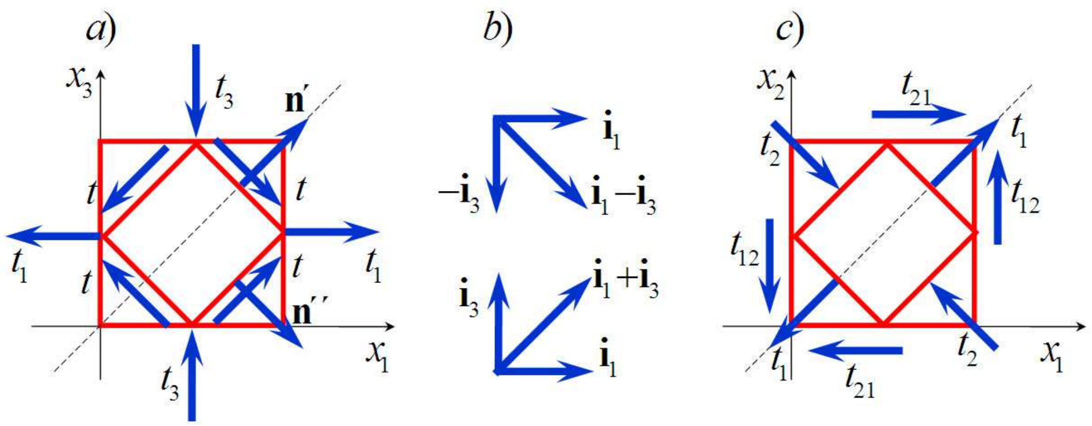
(i) Kaks peapinget on nullid, kolmas pole — *lihtne tõmme ehk üheteljeline pingus*[20].

(ii) Üks peapinge on null, kaks pole — *tasapinnaline pingus ehk tasandpingus ehk kaheteljeline pingus*[21].

(iii) Kui DRK-s esitatud tasandpinguse puhul kaks peapinget on suuruselt võrdsed kuid märgilt vastupidised[22], siis nimetatakse sellist pingust *lihtsaks nihkeks*[23].

Lihtsa nihke korral puuduvad normaalpinged pindadel, mis moodustavad peapindadega 45° nurga. Joonisel 4.5 a) on kahe sellise pinna normaalid tähistatud

[20] I. k. *simple tension or uniaxial stress*
[21] I. k. *plane stress or biaxial stress*
[22] võib öelda ka , et üks nihkepinge on nullist erinev ja teised on nullid
[23] I. k. *simple shear*



Joonis 4.5: Lihtne nihe

$\mathbf{n}'$ ja $\mathbf{n}''$. Kui tähistada $t_1 = -t_3 = t$, ja valida koordinaadid peasuundades (st. $x_1 \parallel \mathbf{n}_1$ ja $x_3 \parallel \mathbf{n}_3$) saab pingetensor kuju

$$[t_{kl}]] = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

Arvestades, et $\mathbf{n}' = \left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right)$ ja $\mathbf{n}'' = \left(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}\right)$ saame arvutada pinged vastavatel pindadel (vt. ka joonist 4.5 b)

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}'} = \mathbf{t}_k n'_k = \ldots = \frac{t}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_3\right) \qquad \text{ja} \qquad \mathbf{t}_{\mathbf{n}''} = \mathbf{t}_k n''_k = \ldots = \frac{t}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3\right). \tag{4.38}$$

Loomulikult kehtib ka vastupidine lähenemine: kui tasandpinguse korral on pingetensoris nullist erinevad vaid komponendid $t_{12} = t_{21} = t$, siis on koordinaattasandite suhtes 45° all olevatel pindadel nullist erinevad vaid normaalpinged $t_1 = -t_2 = t$ (vt. joonist 4.5 c) ja meenuta väändekatset malmiga).

Puhta nihke korral invariandid

$$\mathrm{I}_t = \mathrm{III}_t = 0 \;\text{ ja }\; \mathrm{II}_t = -t^2. \tag{4.39}$$

4.6 Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

Cauchy liikumisvõrrandid (4.34) või (4.35) on esitatud EK-s. Lagrange'i kirjelduse jaoks toome sisse pseudopinge vektori $\mathbf{T}_K$ ruumipunktis $\mathbf{x}$, mis vastab deformeerumata pinnale dA materiaalses punktis $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, nii et

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da = \mathbf{t}_k da_k = \mathbf{T}_K dA_K. \tag{4.40}$$

On selge, et pseudopinge on tõmbekatsetes kasutatava tingliku pingega analoogiline suurus.

Kuna valemi (3.233) põhjal $da_k = jX_{K,k} dA_K$ ja $dA_K = j^{-1} x_{k,K} da_k$ siis

$$\mathbf{t}_k = j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_K \;\text{ ja }\; \mathbf{T}_K = jX_{K,k} \mathbf{t}_k \tag{4.41}$$

Lähtume Cauchy esimesest liikumisseadusest kujul $(4.34)_1$, st.,

$$\mathbf{t}_{k,k} + \rho\left(\mathbf{f} - \mathbf{a}\right) = 0. \tag{4.42}$$

Kuna $\left(j^{-1} x_{k,K}\right)_{,k} = 0$, siis

$$\mathbf{t}_{k,k} = \left(j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_K\right)_{,k} = j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_{K,k} = j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_{K,L} X_{L,k} = j^{-1} \mathbf{T}_{K,K}. \tag{4.43}$$

Arvestades lokaalset massi jäävuse seadust $\rho_0 = j\rho$ saame seega Cauchy esimesele liikumiksseadusele kuju

$$\mathbf{T}_{K,K} + \rho_0 (\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0. \tag{4.44}$$

Piola (1833, 1836 ja 1848) tõi sisse pseudopinge tensorid T_{Kl} ja T_{KL} nii, et

$$\mathbf{T}_K = T_{Kl}\mathbf{i}_l = T_{KL}x_{l,L}\mathbf{i}_l = T_{KL}\mathbf{C}_L. \tag{4.45}$$

Tänapäeval on need tensorid tuntud kui *esimene ja teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor*. Terminit pseudopinge kasutatakse siin seetõttu, et mõlemad √ tensorid väljendavad pinget algse (deformeerumata) pinna kohta. Tensor T_{Kl} (esimene Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor) esitab pinge ruumipunktis $\mathbf{x}$ ja tensor T_{KL} (teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor) materiaalses punktis $\mathbf{X}$.

Kombineerides avaldisi (4.28), (4.41) ja (4.45) saame Cauchy pingetensori ning esimese ja teise Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensori vahelised seosed:

$$\begin{aligned} &T_{Kl} = jX_{K,k}t_{kl}, \qquad t_{kl} = j^{-1}x_{k,K}T_{Kl},\\ &T_{KL} = T_{Kl}X_{L,l} = jX_{K,k}X_{L,l}t_{kl},\\ &t_{kl} = j^{-1}x_{k,K}x_{l,L}T_{KL}, \quad T_{Kl} = x_{l,L}T_{KL}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Kasutades valemeid (4.45) saab avaldada võrrandi (4.44) läbi tensorite T_{Kl} ja T_{KL} —

$$\begin{aligned} T_{Kk,K} + \rho_0 (f_k - a_k) &= 0,\\ (T_{KL}x_{k,K})_{,K} + \rho_0 (f_k - a_k) &= 0. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Pinna ja mahumomentide puudumisel saab Cauchy teine liikumisseadus $t_{kl} = t_{lk}$ LK-s kuju

$$\begin{aligned} T_{Kk}x_{m,K} &= T_{Km}x_{k,K}.\\ T_{KL} &= T_{LK}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Tensoritega T_{KL} ja T_{Kl} seotud valemeid ja Lagrange'i ehk materiaalseid koordinaate (Lagrange'i kirjeldust) on mugav kasutada tahkiste korral. Deformatsiooni käigus keha välispind muutub ja seega tuleb rajatingimused esitada liikuval ja muutuval pinnal ning nad sõltuvad siirdevektorist $\mathbf{u}$, mis on tundmatu. Lagrange'i kirjelduse puhul aga siin probleemi pole, sest rajatingimused esitatakse algse pinna jaoks, mis on teada. Ka tensorid T_{KL} ja T_{Kl} on seotud algpinnaga. Tõsi küll, liikumisvõrrandid ise on sel juhul "pisut" keerukamad kui Euleri kirjelduse korral. Lineaarse teooria puhul erinevus kahe vaadeldava kirjelduse vahel kaob.

Näide P1

Pideva keskkonna deformatsiooni kirjeldab siirdeväli

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 + AX_3, \\ x_3 = X_3 + AX_2. \end{cases}$$

ja Cauchy pingetensor ruumipunktis $(1, 1, 1)$ on

$$[t_{kl}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Leida pingetensorite T_{Kl} ja T_{KL}, st. esimese ja teise Piola-Kirchoffi pingetensori, maatriksid. Milline materiaalne punkt on vaadeldaval hetkel ruumipunktis $(1, 1, 1)$?

Lahenduskäik ja vastused on failis NaideP1.pdf.