

# Peatükk 1

## Sissejuhatus

### 1. osa ülevaade staatika ja dünaamika kursustest

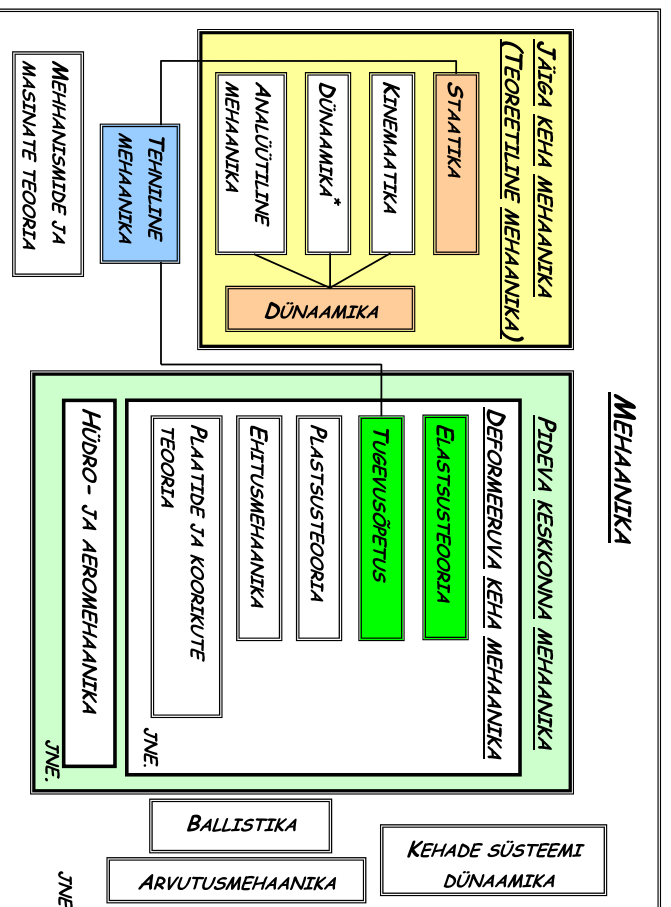
*Märkus:* Ülevaade kursusest „Elastusteooria alused” on antud sissejuhatuses 2. osas ja see on eraldi failina aadressil <http://www.ioc.ee/šalupere/loko.html>

#### 1.1. Mehaanika harud

1 - 2

### 1.1 Mehaanika harud

*Mehaanika* on teadus, mis uurib tahkete kehade, vedelike ja gaaside liikumist, selle liikumise põhjusi ja tagajärgi.



Joomis 1.1: Mehaanika harud

## 1.1.1 Jäiga keha mehaanika

*Teoreetiline mehaanika* ehk jäiga keha mehaanika uurib absoluutselt jäikade kehade liikumist ja paigalseisu neile rakendatud jõudude toimel.

*Absoluutselt jäiga* keha mistahes kahe punkti vaheline kaugus on konstantne.

Laias laastus võib teoreetilise mehaanika jagada *staatikaks*, *kinemaatikaks* ja *dünaamikaks*.

- *Staatika* uurib:

1. kehade tasakaalu (täpsemalt öeldes kehadele rakendatud jõusüsteemide tasakaalu) ja
2. jõusüsteemide lihtsustamist ehk taandamist.

- *Kinemaatika* uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
- *Klassikaline dünaamika* uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimel.

---

### 1.1. Mehaanika harud

### 1 - 4

*Liikumisena* ehk mehaanikalise liikumisena mõistetakse vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes. Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega järgalt koordinaatsüsteem. Tulemust nimetatakse *taustsüsteemiks*.

*Punktmassiks* nimetatakse materiaalsel keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.

*Aeg* loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.

## 1.1.2 Pideva keskkonna mehaanika

*Pideva keskkonna mehaanika* (PKM) uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimel.

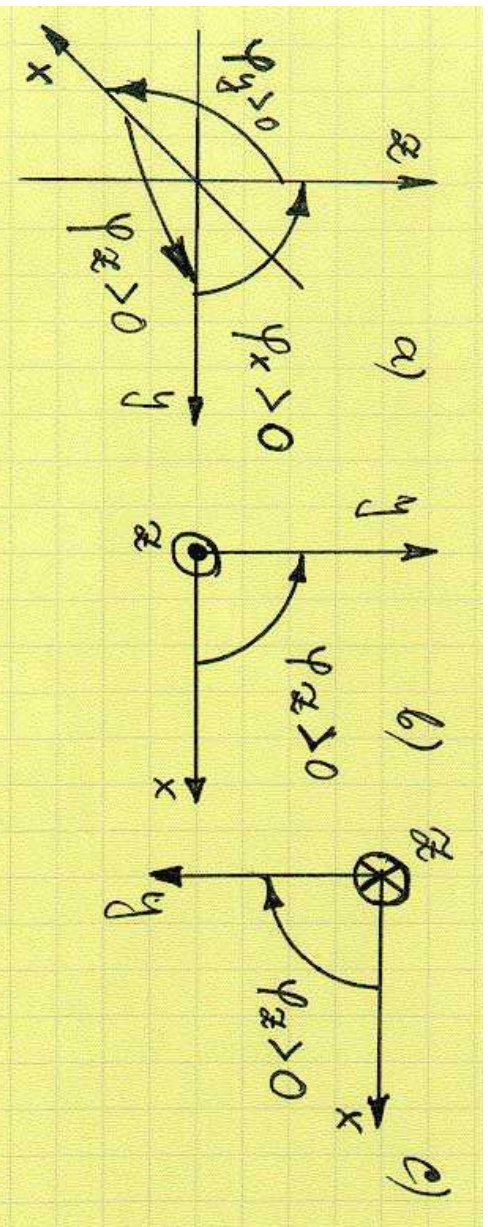
Palju harusid

- tahkise (deformeeruva keha) mehaanika
  - tugevusõpetus
  - elastsusteooria
  - plastusteooria
  - jne.
- hüdro- ja aeromehaanika
  - hüdrostaatika
  - hüdrodünamiika
  - jne.

## 1.2 Staatika

- Jäik keha
- Jõud
  - Kehade vastastikuse mõju mõõt
- Jõusüsteem
  - koonduv JS, paralleeljõudude süsteem, jne.
- Jõu moment, jõupaar
  - $M_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- Jõu ja momendi projektsioonid ning komponendid
  - $\mathbf{Q} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}$

### Koordinaadid ja koordinaatteljed



- Descartes'i ristkoordinaadid (DRK)
- *Koordinaatteljed peavad moodustama parema käe kolmniku*
- Ümber telje toimuva *pöörde positione suund* määratakse kruvireeglga

### 1.9. Staatika

*Vabaks kehaks* nimetatakse keha, mille liikumist ei piira mitte ükski tingimus. Vaba keha saab antud asendist üle viia mistahes uude asendisse.

*Side* on keha liikumist kitsendav tingimus. Tavaliselt moodustab sideme mingi teine keha.

*Sidemereaktsioon ehk reaktsioonjõud* on jõud, millega sidet moodustav keha mõjub vaadeldavale kehale.

Inseneriülesannete puhul nimetatakse sidemeid tihti ka *tugedeks* ja vastavaid reaktsioonjõudusid *toereaktsioonideks*.

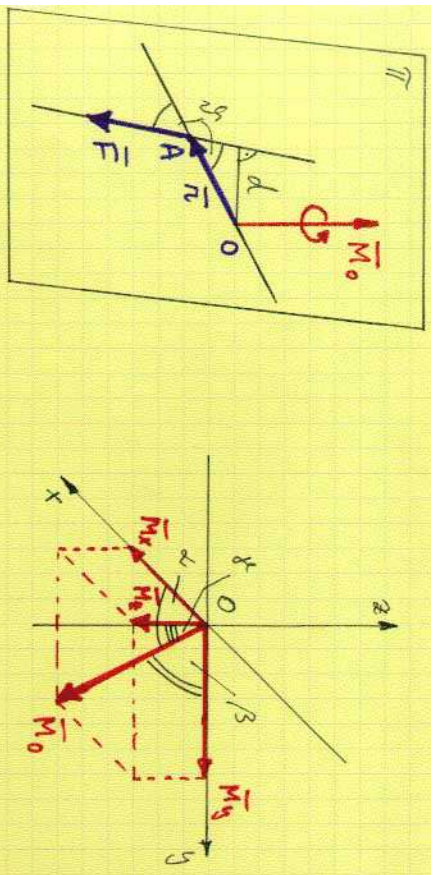
*Sidemetest vabastatause printsiip*: Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega.

*Sidemete tüübid*: sile pind, kare pind, liikumatu liigend(tugi), liikuv liigend(tugi), kerge varras, painduv ühendus jne.

*Jõu momentide punkti suhtes* nimetatakse vektorit, mis võrdub jõu rakenduspunkti  $A$  kohavektori  $\mathbf{r}$  ja jõuvektori  $\mathbf{F}$  vektorikorrutisega.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M_O \equiv |\mathbf{M}_O| = Fr \sin \vartheta = Fd. \quad (1.1)$$

*Jõu moment iseloomustab jõu pööravat toimet.*



Joonis 1.2: Jõu moment punkti suhtes.

Momentvektori  $\mathbf{M}_O$  suurus (ehk moodul) ja suund sõltub punkti  $O$  valikust kuid ei sõltu punkti  $A$  valikust jõu mõjusirgel.

### 1.2. Statika

### 1 - 10

Momentvektori  $\mathbf{M}_O$  mõjusirge määrab telje, mille ümber jõud  $\mathbf{F}$  püüab tekitada pöörlemist.

Pöörde suund määratakse *kruuvireegliga* — kui (parema käe) kruvi teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga, siis keha pöörlemise suund ühtib kruvi pöörlemise suunaga. Ja vastupidi, kui kruvi pöörata keha pöörlemise suunas, siis tema teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga.

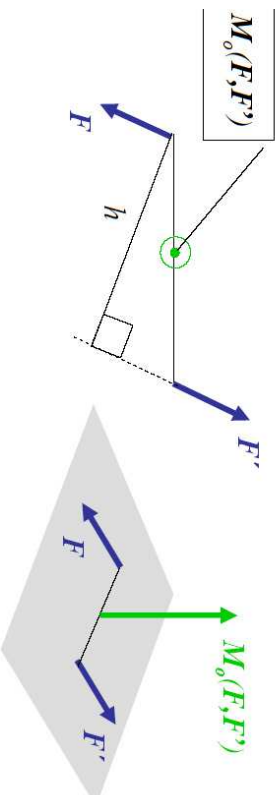
*Jõu moment telje suhtes* võrdub selle telje mistahes punkti suhtes leitud momentvektori projektsiooniga vaadeldaval teljel.

- See on üldlevinud määratlus ja selle põhjal on tegu skalaariga. Tegelikult võib ka jõu momenti telje suhtes käsitleda vektorina.
- Praktikas leitakse moment valemist  $M = \pm Fd$ , s.t. jõud korda jõu õlg, ning märk määratakse kruvireeglga.

✓

*Jõupaari* moodustavad kaks võrdvastupidist jõudu  $\mathbf{F}$  ja  $-\mathbf{F}$  millel on erinev mõjusirge.

*Jõupaari moment* võrdub ilme jõupaari moodustava jõu momendiga teise rakenduspunkti suhtes. Jõupaari moment on *vabavektor*.



Jõupaari moment on *vabavektor*, mille moodul  $M=Fh$ , kus  $h$  on jõupaari õlg.

Joonis 1.3: Jõupaar ja jõupaari moment

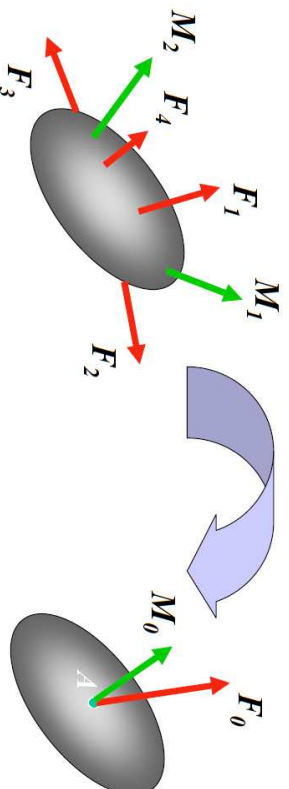
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

## 1.2. *Staatika*

## 1 - 12

*Lemmas jõu paralleellikkusest*. Jäiga keha mistahes punktis  $A$  rakendatud jõu võib paralleelselt tema mõjusirgega üle kanda uude rakenduspunkti  $B$  kui lisada punktis  $A$  rakendatud jõu moment punktis  $B$  suhtes.

*Staatika põhiteoreem (Poinsoi' teoreem)*: Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab asendada taandamistsentrisse rakendatud jõusüsteemi peavektoriga ja jõusüsteemi peamomendiga taandamistsentri suhtes.



Joonis 1.4: Jõusüsteemi peavektor ja peamoment.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

Jõusüsteemi peavektor:  $\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$

Jõusüsteemi peamoment:  $M_O = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i)$ , kus punkti  $O$  nimetatakse *taandamistsentriks*. (Joonisel on kahjuks  $O$  asemel  $A$ .)

*Jõusüsteem on tasakaalus* parajasti siis kui peavektor  $\mathbf{F}_O$  ja mingi punkti  $O$  suhtes leitud peamoment  $M_O$  on võrdsed nulliga:

$$\mathbf{F}_O = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad M_O = \sum_i M_O(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (1.2)$$

*Skalaarsed tasakaalu tingimused:*

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & \sum_i F_{iy} = 0, & \sum_i F_{iz} = 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

### 1.3 Kinemaatika

- *Kinemaatika* uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
- *Liikumisena* ehk mehaanikalise liikumisena mõistetakse vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes.
  - Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega järgalt koordinaatsüsteem.
  - Tulemust nimetatakse *taustsüsteemiks*.
- *Punktmassiks* nimetatakse materiaalet keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.
  - Materiaalne punkt
- Liikumise kirjeldamiseks peab olema kokkulepe kuidas mõõdetakse aega
  - *Aeg* loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides

- Punkti *trajektoriks* nimetatakse pidevat joont, mille joonistab liikuv punkt taustsüsteemi suhtes
- *Punkti liikumisseaduseks* nimetatakse eeskirja, mis määrab punkti asukoha igal ajahetkel.

— *Vektoriaalne viis.*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

— *Koordinaatviis.* — Descartes'i ristkoordinaadid (DRK)

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

— seos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

---

### 1.3. Kinemaatika

— *Loomulik viis.* Punkti asukoht ruumis määratakse tema loomuliku koordinaadiga

$$s = s(t).$$

— seos

$$s = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

- *Punkti kiiruseks* nimetatakse tema kohavektori esimest tuletist aja järgi

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

- DRK

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

- *Kiirus on vektor*, mis
  - on suunatud piki trajektoori puutujat liikumise suunas;
  - iseloomustab nii kohavektori pikkuse kui suuna muutumist.



- *Punkti kiirenduseks* nimetatakse kiirusvektori esimest tuletist aja järgi ehk tema kohavektori teist tuletist aja järgi.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

- DRK

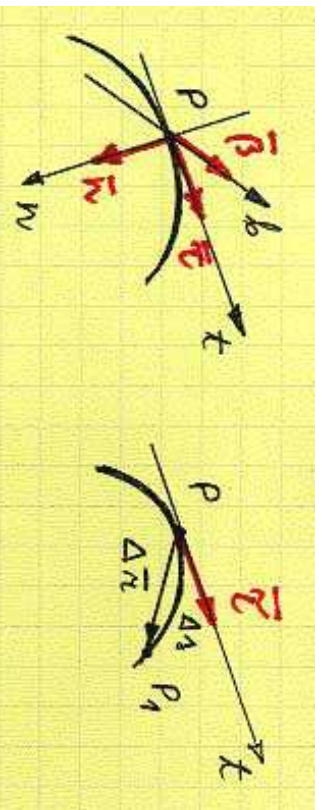
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}.$$

- *Kiirendus on vektor*, mis
  - on suunatud trajektoori sisse (v.a. sirgjooneline liikumine);
  - iseloomustab kiiruse muutumist (nii kiirusvektori pikkuse kui suuna muutumist).

### 1.3. Kinemaatika

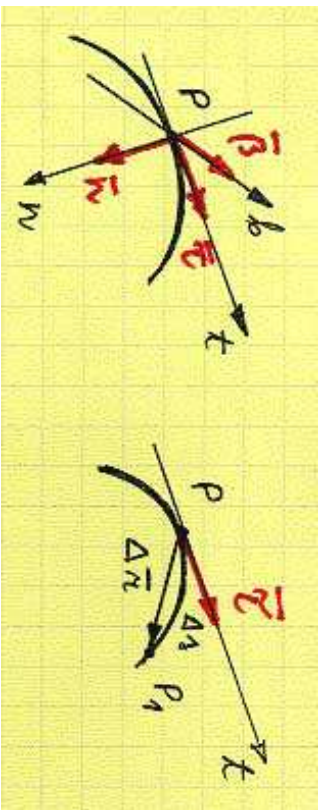
### 1 - 18

- *Loomulik teljestik*: parema käe teljestik  $t-n-b$ , mis liigub koos vaadeldava punktiga.



- telg  $t$  on puutuja,  $n$  peanormaali ja  $b$  binormaali sihis
- Vastavaid ühikvektoreid tähistame  $\tau$ ,  $\nu$  ja  $\beta$ .

- *Koordinaattasandid:*



- $t - n$  — kooldumistasand,
- $t - b$  — sirgestumistasand,
- $b - n$  — normaaltasand.

- *Kiirus*

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{T}$$

### 1.3. Kinemaatika

- *Kiirendus*

$$\mathbf{a} = \dot{s}\mathbf{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{v} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

- $\mathbf{a}_t$  — *puutekiirendus ehk tangentsiaalkiirendus*
- $\mathbf{a}_n$  — *normaalkiirendus*
- Vastavad projektsioonid

$$a_t = \ddot{s} = \dot{v}_t \quad \text{ja} \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$$

- $a_b = 0$  !!!

- Puutekiirendus  $\mathbf{a}_t$  iseloomustab kiirusvektori mooduli muutumist
- Normaalkiirendus  $\mathbf{a}_n$  iseloomustab kiirusvektori suuna muutumist
- Kuna kiirenduse projektsioon  $b$ -teljel (binormaamil) on null, siis kiirenduse moodul

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

### Jäiga keha liikumise tüübid

- *Rööplikumiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul iga kehaga muutumatult seotud sirge jääb kogu liikumise kestel oma algasuga paralleelseks
- *Pöörlemiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul kaks kehaga muutumatult seotud punkti jäävad kogu liikumise kestel paigale
  - *Keha pöörlemisseaduseks* nimetatakse pöördenurga muutumise eeskirja  $\varphi = \varphi(t)$ 
    - \* Kui pöörlemine toimub ümber  $z$  telje, siis võib pöörlemisseaduse esitada kujul
 
$$\varphi = \varphi(t) = \varphi_z(t)\mathbf{k}$$
  - *Nurkkiiruseks* nimetatakse pöördenurga vektori esimest tuletist aja järgi:
 
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}.$$

### 1.3. Kinemaatika

### 1 - 22

- Nurkkiirus (vektor)  $\boldsymbol{\omega}$  määrab
  - \* pöörlemise suuna (läbi kruvireegli)
  - \* pöörlemise kiiruse (rad/s ehk 1/s)
- *Nurkkiirenduseks* nimetatakse nurkkiiruse vektori esimest tuletist aja järgi ehk pöördenurga vektori teist tuletist aja järgi:
 
$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\varphi}.$$
- Pöörleva keha punkti kiirus
 
$$\mathbf{v} = \omega_z h \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$
- kiiruse projektsioon loomulikul teljel  $t$ 

$$v_t = \omega_z h = \dot{\varphi}_z h,$$
- kiiruse moodul
 
$$v = \omega h = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|.$$

– Pöörleva keha punkti kiirendus, puutekiirendus ja normaalkiirendus

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \\ \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{cases}$$

– Vastavad moodulid

$$\begin{cases} a = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4 h}, \\ |a_t| = \alpha h, \\ a_n = \omega^2 h \end{cases}$$

### 1.3. Kinemaatika

### 1 - 24

- *Tasapinnaliseks liikumiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul kõik keha punktid liiguvad tasapindades, mis on paralleelsed ühe paigalseisva tasapinnaga.
  - Tasapinnalise liikumise võib lahutada
    - \* tasapinnaliseks rööpliikumiseks koos vabalt valitud poolusega ja
    - \* pöörlemiseks ümber selle pooluse (pöörlemiseks ümber seda poolust läbiva ja vaadeldava tasandiga ristuva telje).
    - \* Rööpliikumine sõltub pooluse valikust, pöörlemine aga mitte
  - $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$ ,  $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}$
  - Hetkeline kiiruste tšenter ja hetkeline kiirenduste tšenter

- *Liikliikumine* — vaadeldav keha liigub taustsüsteemis, mis omakorda liigub mingi teise (paigalseisva) taustsüsteemi suhtes
  - *Absoluutseks liikumiseks* nimetatakse punkti (keha) liikumist liikumatu taustsüsteemi suhtes
  - *Relatiivseks liikumiseks* nimetatakse punkti (keha) liikumist liikuva taustsüsteemi suhtes
  - *Kaasalikumiseks* (ülekandeliikumiseks) nimetatakse liikuva taustsüsteemiga muutumatult seotud punktide liikumist liikumatu taustsüsteemi suhtes
- Absoluutne kiirus võrdub relatiivse kiiruse ja kaasalikumise kiiruse geomeetrilise summaga
 
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e.$$
- Absoluutne kiirendus võrdub relatiivse kiirenduse, kaasalikumise kiirenduse ja Coriolise kiirenduse geomeetrilise summaga
 
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_C$$
- *Coriolise kiirendus*

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$$

## 1.3. Kinemaatika

## 1 - 26

- *Sfaäriiliseks liikumiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul üks kehaga muutumatult seotud punkt jääb liikumatuks.
  - Seda liikumatut punkti nimetatakse *kinemispunktiks*<sup>1</sup>
  - Lõikuvate telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmine
- *Vaba jäiga keha liikumine*
  - Vaba jäiga keha liikumine on lahutatav rööpliikumiseks koos vabalt valitud poolusega ja pöördeks ümber poolust läbiiva pöörlemistelje

---

<sup>1</sup>Jäiga keha liikumine kinemispunkti ümber

## 1.4 Dünaamika

- *Dünaamika (klassikalises mõttes)* uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimel
- Newtoni seadused
  - I — inertiseadus
    - *Inerts*<sup>2</sup> on kehade võime püsida paigalseisus või ühtlases ja sirgjoonelises liikumises kuni mingi jõud seda olekut ei muuda.
      - \* Keha inertsi mõõduks on tema *mass*
  - II — dünaamika põhiseadus:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
  - III — mõju ja vastumõju seadus

---

<sup>2</sup>kr. *inertia* - tegevusetus, loidus

### Märkused:

- Newtoni seadused pole matemaatiliselt tõestatavad vaid nad põhinevad katsetel.
  - See annabki aluse nimetada neid ka aksioomideks.
  - Neile seadustele on ilesehitatud kogu klassikaline mehaanika (vastandina relativistlik mehaanika).
- Praktikas loetakse paigalseisvaks taustsüsteemiks tavaliselt Maaga seotud taustsüsteemi. Kui sellest ei piisa, seotakse liikumatu taustsüsteem Päikesega.
- *Aeg* loetakse universaalseks, st., tihtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.
  - Newton: ”Seadused kehтивad absoluutses ajas, millel pole mitte midagi ühist mitte millegagi väljaspool teda ja mis kulgeb ühtlaselt.”
  - Praktikas lähtutakse aja mõõtmisel ikkagi mingist konkreetsest nähtusest (Maa pöörlemine, isotoobi <sup>133</sup>Cs kiirguse periood).

- Praktikas määratakse keha mass kaalumise teel:

$$m = \frac{P}{g}.$$

- Newtoni II seadus käsitleb juhtu, kus punktmassile mõjub vaid üks jõud.
  - *Jõudude mõju sõltumatuuse printsiip*: Jõu mõju punktmassi liikumisele ei sõltu sellest, kas punktile on rakendatud peale tema veel teisi jõude või ei ole.

### *Punktmassi dünaamika kaks põhiülesannet*

- Newtoni II seadus + jõudude mõju sõltumatuuse printsiip

$$m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

1. On antud punktmassi liikumiseseadus. Leida millised punktmassile rakendatud jõud põhjustavad sellise liikumise!
  - diferentseerimine

### *1.4. Dünamaanika*

### *1 - 30*

2. On teada punktmassile mõjuvad jõud. Leida selle punktmassi liikumiseadus!
  - integreerimine
- *Punktmasside mehaanikaliseks süsteemiks* nimetatakse sellist ükssteist mõjutavate punktmasside kogumit, kus iga punktmassi liikumine sõltub teiste punktmasside liikumisest ja asukohast.
  - päikesesüsteem, vedelikud, gaasid, tahked kehad jne.
  - Lihiduse mõttes jäetakse sõna mehaanikaline tihti ära ja piirduetakse vaid terminiga punktmasside süsteem.
- *Välisjõud* on jõud, millega sellesse süsteemi mittekuluvad kehad mõjutavad vaadeldava süsteemi punkte.
- *Sisejõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid mõjutavad üksteist.
- Punktmasside süsteemi kõigi sisejõudude summa on null.
- Punktmasside süsteemi kõigi sisejõudude momentide summa mistahes punkti suhtes on null.

- *Punktmasside süsteemi mass*

$$m = \sum_i m_i$$

- *Punktmasside süsteemi masskese*

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m},$$

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}.$$

#### 1.4. Dünamika

### Masskeskme liikumise teoreem

- *Teoreem:* Punktmasside süsteemi masskese liigub nagu punktmass, mille mass võrdub süsteemi kogumassiga ja millele on rakendatud kõik sellele süsteemile mõjuvad välisjõud:

$$m\mathbf{a}_C = \sum_i \mathbf{F}_i$$

- DRK

$$m\ddot{x}_C = \sum_i F_{ix}, \quad m\ddot{y}_C = \sum_i F_{iy}, \quad m\ddot{z}_C = \sum_i F_{iz}$$

- $\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_C = 0, \sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0$  jne.



*Liikumishulk*

- *Punktmasside süsteemi liikumishulgaks*<sup>3</sup> nimetatakse süsteemi kõigi punktide liikumishulcade geometrilist summat —

$$\mathbf{K} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_C.$$

- $m_i \mathbf{v}_i$  —  $i$ -nda punktmassi liikumishulk
- $\mathbf{v}_C$  — masskeskme kiirus
- Eesti keeles on terminid impulss ja liikumishulk sünonüümid

*Jõu impulss*

- *Jõu  $\mathbf{F}$  elementaarimpulsiks* nimetatakse korrutist  $\mathbf{F} dt$ , kus  $dt$  on elementaarajavahemik.
- *Jõu impulsiks lõplikus ajavahemikus  $[t_0, t_1]$*  nimetatakse integraali

$$\mathbf{J} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt.$$

---

<sup>3</sup>I.k. (linear) momentum

*Liikumishulga teoreemi diferentsiaaljuu*

- Punktmasside süsteemi liikumishulga tuletis aja järgi võrdub süsteemile mõjuvate välisjõudude geometrilise summaga —

$$\dot{\mathbf{K}} = \sum_i \mathbf{F}_i.$$

- DRK

$$\dot{K}_x = \sum_i F_{ix}, \quad \dot{K}_y = \sum_i F_{iy}, \quad \dot{K}_z = \sum_i F_{iz}.$$

- *Järeldus (liikumishulga jäävuse seadus):* Välisjõududest vaba süsteem liigub muutumatu liikumishulgaga.

*Liikumishulga teoreemi integraalkuju*

- Punktmasside süsteemi liikumishulga muutus teatud ajavahemikus  $\Delta t$  võrdub samas ajavahemikus süsteemile mõjuvate välisjõudude impulsside geometrilise summaga —

$$\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0 = \sum_i \mathbf{J}_i,$$

- DRK

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum_i J_{ix},$$

$$K_{1y} - K_{0y} = \sum_i J_{iy},$$

$$K_{1z} - K_{0z} = \sum_i J_{iz}.$$

*1.4. Dünamika**Liikumishulga moment, kineetiline moment*<sup>4</sup>

- *Punktmassi liikumishulga momentiks* punkti  $O$  suhtes nimetatakse vektorkorrutist

$$\mathbf{L}_O(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v},$$

kus  $r$  on punktmassi kohavektor ja  $m\mathbf{v}$  tema liikumishulk.

- *Punktmasside süsteemi kineetiline moment* on võrdne süsteemi kõigi punktide liikumishulkade momentide geometrilise summaga —

$$\mathbf{L}_O = \sum_i \mathbf{L}_O(m_i\mathbf{v}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i$$

(Loomulikult peavad kõik momendid olema leitud ühe ja sama punkti  $O$  suhtes.)

- Nii punktmassi liikumishulga momendi kui punktmasside süsteemi kineetilise momendi puhul kasutatakse eestikeelses kirjanduses ka termineid *impulsi moment* või *pöördeimpulss*. (I.k. angular momentum, moment of momentum)

<sup>4</sup>I.k. angular momentum, moment of momentum

- Jõu momendi ja liikumishulga momendi definitsioonid on analoogsed ja analoogne on ka kogu teooria, mis meist räägib: komponendid, projektsioonid, peamoment jne
- Pöörleva keha puhul

$$L_z = I_z \omega_z,$$

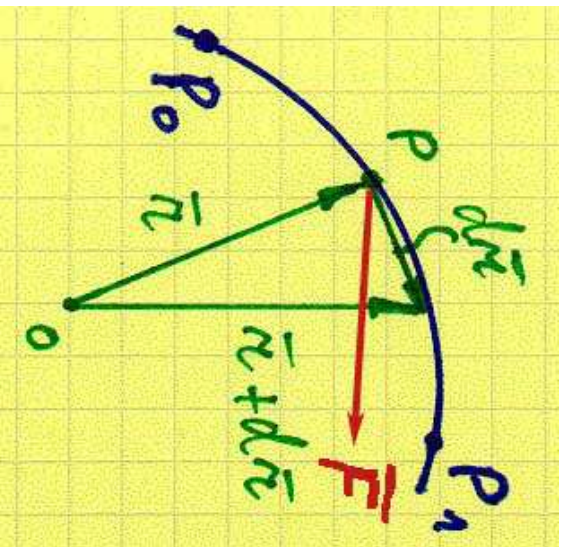
kus  $I_z = \int_m \rho^2 dm = \int_m (x^2 + y^2) dm$  on keha massinertsimoment.

- **Kineetilise momendi teoreem:** punktmasside süsteemi kineetilise momendi tuletis aja järgi võrdub vaadeldavale süsteemile rakendatud välisjõudude peamomendiga —

$$\dot{L}_O = \sum_i M_O(\mathbf{F}_i).$$

— Vaadeldav teoreem esitatakse diferentsiaal kujul. Võimalik on esitada teda ka integraalkujul.

- **Järeldus (kineetilise momendi jäävuse seadus):** Välisjõududest vaba süsteem liigub muutumatu kineetilise momendiga.
  - Seega, kui  $L = const.$  puhul muutub keha inertsimoment, siis peab vastavalt muutuma ka tema nurkkiirus



- **Jõu elementaartööks** nimetatakse jõu ja tema rakenduspunkti elementaarsirde skalaarkorrutist:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- **Jõu töö tema rakenduspunkti lõplikul siirdel** punktist  $P_0$  punkti  $P_1$  esitatakse joonintegraalina

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

- **Jõupaari elementaartöö** (pöördel ümber  $z$  telje)

$$dW = M_z d\varphi_z$$

- *Jõu paari töö lõplikul pöördel* asendist  $\varphi_0$  asendisse  $\varphi_1$

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z d\varphi_z.$$

- *Jõu võimsuseks* nimetatakse ajaühikus tehtavat tööd, st., töö muutmise kiirust —

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad \text{ehk} \quad P = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z.$$

- *Jõu paari võimsus*

$$P = M_z \omega_z.$$

#### 1.4. Dünamika

#### *Kineetilise energia teoreem*<sup>5</sup>

- *Punktmassi kineetiline energia*

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

- *Kineetilise energia teoreemi diferentsiaalkeelju punktmassi jaoks:* Kineetilise energia tuletis aja järgi võrdub vaadeldavale punktmassile mõjuva jõu võimsusega

$$\dot{T} = P.$$

- *Kineetilise energia teoreemi integraalkuju:* kineetilise energia muutus punktmassi üleminekul asendist  $P_0$  asendisse  $P_1$  võrdub talle rakendatud jõu poolt tehtava tööga sellel liikumisel.

$$T_1 - T_0 = W$$

- Seega tööd saadakse selle arvelt, et kineetiline energia muutub, annab osa endast ära.

<sup>5</sup>Vaadeldavat teoreemi nimetatakse ka kineetilise energia muutumise teoreemiks või lihtsalt energioteoreemiks.

- *Punktmasside süsteemi kineetiline energia*

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

- *Kineetilise energia teoreemi diferentsiaalvõrrandi punktmasside süsteemi jaoks:*

Kineetilise energia tuletis aja järgi võrdub kõigile süsteemi punktidele rakendatud sise- ja välisjõudude võimsuste summaga —

$$\dot{T} = \sum_{k=1}^n P_k^i + \sum_{k=1}^n P_k^e.$$

#### 1.4. Dünamiika

#### 1 - 42

- *Kineetilise energia teoreemi integraalvõrrandi punktmasside süsteemi jaoks:*

Kineetilise energia muutus punktmasside süsteemi liikumisel ühest asendist teise võrdub süsteemi punktidele rakendatud sise- ja välisjõudude tööde summaga sellel liikumisel —

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^n W_k^i + \sum_{k=1}^n W_k^e.$$

- Nagu näha, tuleb kineetilise energia teoreemi puhul sisejõud arvesse võtta.
  - *Süsteemi nimetatakse muutumatuks* kui süsteemi liikumisel tema sisejõudude rakenduspunktide vahelised kaugused ei muutu.
  - Muutumatu süsteemi puhul on süsteemi sisejõudude töö null

- Kineetilise energia leidmine

- rööplikumine

$$T = \frac{mv_C^2}{2}$$

- Pöörlemine ümber  $z$  telje

$$T = \frac{I_z \omega_z^2}{2}$$

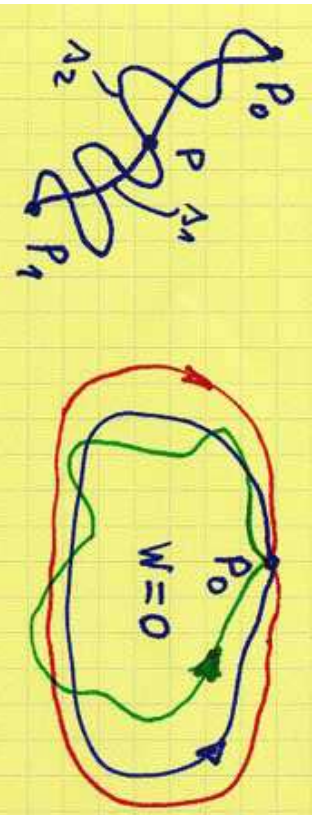
- Tasapinnaline liikumine

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_z^2}{2}$$

Vimmase avaldise puhul leitakse inertsimoment  $I_C$  masskeset läbiiva ja  $z$  teljega paralleelse telje suhtes.

#### 1.4. *Dünamika*

### *Konservatiivsed jõud*



- Kui jõu töö tema rakenduspunkti liikumisel asendist  $P_0$  asendisse  $P_1$  ei sõltu trajektoori kujust, siis nimetatakse sellist jõudu *konservatiivseks jõuks*

- Näiteks gravitatsioonijõud ja elastsusjõud.
- Kinnise trajektoori puhul on konservatiivse jõu töö null.
- Mittekonservatiivseid jõude nimetatakse *dissipatiivseteks jõududeks*
- \* Näiteks hõõrdejõud.

- Konservatiivse jõu  $\mathbf{F}$  töö tema rakenduspunkti lõplikul siirdel punktist  $P_0$  punkti  $P_1$

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

on sõltumatu integreerimistest.

- Joonintegraal ei sõltu integreerimistest siis ja ainult siis kui integraalilalune avaldis on mingi funktsiooni täisdiferentiaal. Seega võime sisse tuua funktsiooni  $V(x, y, z)$  kujul

$$-dV(x, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

- Sellist täitvat funktsiooni  $V$  nimetatakse *potentsiaalseks energiaks*. Miinus märk on siin sisse toodud kokkuleppe tõttu.
- Potentsiaalse energia defintitsiooni  $-dV(x, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$  põhjal

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

#### 1.4. *Dünaamika*

- Konservatiivse jõu töö

$$W = - \int_{P_0}^{P_1} dV = -V|_{P_0}^{P_1} = V_0 - V_1$$

kus  $V_0$  on süsteemi algasendile ja  $V_1$  süsteemi lõppasendile vastav potentsiaalne energia.

- Konservatiivse jõu töö  $W = V_0 - V_1$  võrdub süsteemi alg- ja lõppasendile vastavate potentsiaalsete energiatega (potentsiaalide) vahega.
- Potentsiaalne energia iseloomustab keha võimet teha tööd ja ta sõltub keha asendist (jõuväljas).
  - Kui keha potentsiaalne energia suureneb, siis  $W < 0$  — keha potentsiaalse energia suurendamiseks on vaja teha tööd.
  - Kui keha potentsiaalne energia väheneb, siis  $W > 0$  — potentsiaalse energia vähenemise arvelt võib "saada" tööd.
- Kui valemis defintitsioonis poleks sisse toodud miinus märki, saaks töö avaldis kuju  $W = V_1 - V_0$ .

- Olgu kõik muutumatule mehaanikalisele süsteemile mõjuvad jõud konserveeritavad
  - Nende jõudude töö süsteemi liikumisel algasendist lõppasendisse:  $W = V_0 - V_1$
  - Kineetilise energia teoreem:  $T_1 - T_0 = V_0 - V_1$

- Viimasest saame

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1 \quad \text{ehk} \quad \underbrace{T + V}_{=E} = \text{const.}$$

- Kineetilise ja potentsiaalse energia summat nimetatakse *mehaanikaliseks energiaks* ja tähistatakse  $E$ .

### *Mehaanikalise energia jäävuse seadus*

- Kui punktmasside süsteem liigub konserveerivate jõudude mõjul siis jääb tema mehaanikaline energia konstantseks:

$$E = T + V = \text{const.}$$

- Punktmasside süsteeme, kus kehtib mehaanikalise energia jäävuse seadus nimetatakse *konserveerivateks süsteemideks*.